АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ЦЕНТРАЛЬНЫЙ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ЗАДАЧИ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

МОСКВА
1987

А.В.Карзанов

МАКСИМАЛЬНЫЕ И СТОИМОСТНЫЕ МНОГОПРОДУКТОВЫЕ ПОТОКИ НЕОГРАНИЧЕННОЙ ДРОБНОСТИ

1. Один из вопросов, изучающихся в теории комбинаторной оптимизации, состоит в определении дробности решения класса линейных задач заданного вида. Формальная постановка выглядит так. Пусть $\mathcal{P}$ - некоторое множество задач вида $Ax \leq b$ (на допустимость) или $\max\{cx \mid Ax \leq b\}$ (оптимизационных) с целочисленными матрицами A и целочисленными векторами b и c ; обычно множество $\mathcal{P}$ (класс задач или массовая задача) имеет конкретный комбинаторный смысл. Дробностью $k(P)$ задачи $P \in \mathcal{P}$ называется минимальное натуральное число k такое, что для некоторого допустимого (соответственно, оптимального) решения x этой задачи вектор kx целочисленный; если P не имеет решения, полагается $k(P)=0$. Дробностью $k(\mathcal{P})$ класса $\mathcal{P}$ считается величина $\sup\{k(P) \mid P \in \mathcal{P}\}$; если $k(\mathcal{P})=\infty$, говорят, что $\mathcal{P}$ имеет неограниченную дробность.

К настоящему времени не известно никаких общих теорем, охватывающих достаточно широкие классы $\mathcal{P}$ с дробностью ≥ 2 (в отличие от хорошо известных результатов об абсолютно целочисленных задачах и задачах с субмодулярными ограничениями, описывающих классы с дробностью 1). Определение дробности и даже установление ее ограниченности для многих комбинаторных задач оказывается очень трудной проблемой, упомянем, например, гипотезу Татта-Сеймура о дробности задачи точного покрытия циклами неориентированного графа со взвешенными ребрами (см. [1]), на доказательстве которой сейчас сконцентрированы большие усилия.

В настоящей работе исследуется случай неограниченной дробности в многопродуктовых потоковых задачах на неориентированных сетях (для ориентированных сетей ситуация выглядит значительно проще, о чем будет сказано ниже).

Нам удобно будет рассматривать многопродуктовые потоковые задачи в форме задач об упаковке цепей (это эквивалентно традиционной функциональной форме задания потоков [2]). Под <u>графом</u> будем понимать конечный неориентированный граф без петель и кратных ребер, ребро с концевыми вершинами x и y может быть обозначено xy. <u>Цепью</u>, или xy-<u>цепью</u>, графа считается его непустой подграф $L=(VL, EL)$ с вершинами и ребрами вида $VL=\{x=x_0, x_1, \ldots, x_k=y\}$, $x_i \neq x_j$, и $EL=\{x_i x_{i+1} \mid i=0,\ldots,k-1\}$; цепь L может быть обозначена $x_0 x_1 \ldots x_k$.

Основными объектами рассмотрения будут граф $G=(V,E)$ с выделенным подмножеством $T \subseteq V$ вершин, называемых <u>полюсами</u>, неотрицательная целочисленная функция $c: E \to \mathbb{Z}_+$ пропускных способностей ребер в G и некоторый граф $H=(T,U)$ без изолированных вершин, называемый (потоковой) <u>схемой</u>. Для $x, y \in V$ пусть $\mathcal{L}(G, xy)$ обозначает множество всех xy-цепей в G. Положим $\mathcal{L}=\mathcal{L}(G,H)=\bigcup(\mathcal{L}(G,st) \mid st \in U)$. Функция $f: \mathcal{L} \to \mathbb{R}_+$ называется многопродуктовым потоком, или <u>мультипотоком</u>. Мультипоток f называется c-<u>допустимым</u>, если выполняются ограничения по пропускным способностям:

$$\xi^f(e) \overset{def}{=} \sum(f(L) \mid L \in \mathcal{L}, e \in EL) \leq c(e), \quad e \in E.$$

Для f определяются мощность $v(f,st)=\sum(f(L) \mid L \in \mathcal{L}(G,st))$ потока между полюсами s и t, где $st \in U$, и <u>общая мощность</u> $v(f)=1 \cdot f=\sum(f(L) \mid L \in \mathcal{L})$. Наиболее распространены следующие три типа задач о мультипотоках.

<u>1. Задача о допустимости</u> (обозначение $EX(G,H,c,d)$): для заданной функции $d: U \to \mathbb{Z}_+$ (требований на мощности составляющих потоков) найти c-допустимый мультипоток f, удовлетворяющий

$$v(f,st)=d(st) \quad \text{для всех} \quad st \in U$$

(или установить, что такого мультипотока не существует).

<u>2. Задача о максимальном мультипотоке</u> (обозначение $\Sigma(G,H,c)$): найти максимальный c-допустимый мультипоток, т.е. мультипоток f, общая мощность $v(f)$ которого максимальна.

<u>3. Задача о максимальном мультипотоке минимальной стоимости</u> (обозначение $COST(G,H,c,a)$): для заданной функции $a: E \to \mathbb{Z}_+$ (удельной стоимости использования ребер) найти среди максимальных мультипотоков мультипоток f, стоимость которого

$$\sum(a(EL) f(L) \mid L \in \mathcal{L}(G,H)) = \sum(a(e)\xi^f(e) \mid e \in E)$$

минимальна (здесь и далее для функции g на S и конечного подмножества $S' \subseteq S$ через $g(S')$ обозначается величина $\sum(g(e) \mid e \in S')$).

Будем далее классифицировать задачи каждого типа по виду потоковой схемы, объединяя в один класс все задачи данного типа с одной и той же схемой H. А именно, для фиксированной схемы $H=(T,U)$ обозначим через $EX(H)$ множество задач о допустимости $EX(G,H,c,d)$ для всех графов $G=(V,E)$, $V \supseteq T$, и функций $c: E \to \mathbb{Z}_+$ и $d: U \to \mathbb{Z}_+$; аналогично определяются множества задач $\Sigma(H)$ и $COST(H)$. Будем обозначать через $k_1(H)$, $k_2(H)$ и $k_3(H)$ дробности $k(\mathcal{P})$ классов задач $\mathcal{P}=EX(H)$, $\mathcal{P}=\Sigma(H)$ и $\mathcal{P}=COST(H)$, соответственно. Справедливо следующее простое

<u>Утверждение 1.</u> (i) Если схема H' является подграфом схемы H, то $k_1(H') \leq k_1(H)$. (ii) Если схема H' является порожденным подграфом схемы H (т.е. H' – подграф, порожденный некоторым подмножеством вершин в H), то $k_i(H') \leq k_i(H)$, $i=2,3$.

Действительно, если $H'=(T',U') \subset H=(T,U)$, то задача $EX(G'=(V',E'), H', c', d')$ эквивалентна задаче $EX(G,H,c,d)$, где $G=(V' \cup (T-T'), E')$, $c(e)=c'(e)$

для $e\in E'$, $d(u)=d'(u)$ для $u\in U'$ и $d(u)=0$ для $u\in U-U'$, откуда следует (i). Аналогично доказывается (ii).

Цель настоящей статьи состоит в доказательстве следующих теорем.

Теорема 1. Если схема H содержит три различные попарно пересекающиеся антиклики A, B и C такие, что $A\cap B \neq A\cap C$, то $\kappa_2(H)=\infty$.

Теорема 2. Если схема H содержит две различные пересекающиеся антиклики (т.е. H не является полным многодольным графом), то $\kappa_3(H)=\infty$.

(Напомним, что антикликой графа называется максимальное по включению независимое (т.е. порождающее пустой подграф) подмножество его вершин).

Прокомментируем эти теоремы. Пусть K_n обозначает полный граф с n вершинами, Z_τ обозначает звезду с τ ребрами (т.е. граф, все τ ребер которого имеют общую вершину) и $\Gamma_1+\Gamma_2+\ldots+\Gamma_m$ обозначает объединение попарно не пересекающихся графов $\Gamma_1,\Gamma_2,\ldots,\Gamma_m$; вместо $\Gamma+\ldots+\Gamma$ (m раз) будем писать $m\Gamma$. Обозначим через $\mathcal{A}(H)$ множество антиклик в H.

1). Известно, что $\kappa_1(H)=1$, если $H=Z_\tau$ [2]; $\kappa_1(H)=2$, если H – объединение двух звезд и $H\neq Z_\tau$ (это, как указал Диниц, легко следует из теоремы полуцелочисленности для двухпродуктовых потоков [3]); $\kappa_1(H)=2$, если H есть K_4 или цикл с пятью вершинами [4]. Недавно автор доказал, что $\kappa_1(H)=2$, если $H=K_5$ или объединение K_3 и звезды [8]. С другой стороны, в [4] показано, что $\kappa_1(H)=\infty$ для $H=3K_2$. Можно убедиться, что единственной схемой H, для которой $\kappa_1(H)$ не определяется из указанных результатов и утверждения 1(i), является схема $2K_3$. В этом случае задача о допустимости легко сводится к задаче о максимальном мультипотоке с такой же схемой $2K_3$ (заметим, что $H=2K_3$ не удовлетво-

ряет условиям в теореме 1); есть основания предполагать, что $\kappa_1(2K_3)=4$.

2) Известно, что $\kappa_2(H)=1$, если H – полный двудольный граф (теорема о максимальном многополюсном потоке [2]); $\kappa_2(H)=2$, если $|\mathcal{A}(H)|>2$ и $\mathcal{A}(H)$ допускает разбиение $\{\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2\}$, при котором каждое семейство $\mathcal{A}_i$ состоит из попарно не пересекающихся антиклик, и $\kappa_2(H)=4$, если предыдущее неверно, но в H нет трех различных попарно пересекающихся антиклик [5] (см. также [4, 6]). Таким образом, всякая схема H, для которой $\kappa_2(H)$ не определяется из указанных результатов и теоремы 1, должна, во-первых, содержать три различные попарно пересекающиеся антиклики и, во-вторых, для любых таких антиклик A, B и C должно выполняться $A\cap B=B\cap C=C\cap A$. Значения $\kappa_2(H)$ для этих оставшихся схем H ещё окончательно не установлены (предположительно $\kappa_2(H)\le 4$); недавно автор доказал, что для таких схем H задача, двойственная $\Sigma(G,H,c)$, имеет дробность ≤ 4.

3) Известно, что $\kappa_3(H)=1$, если H – полный двудольный граф [2], и $\kappa_3(H)=2$, если $H=K_n$, $n\ge 3$ [7]. Последний результат легко обобщается на случай полного многодольного графа H. Вместе с теоремой 2 это дает полное описание значений $\kappa_3(H)$ для всех схем H.

Для ориентированных мультипотоков проблема дробности решается существенно проще. Из классических результатов Форда и Фалкерсона [2] следует, что $\kappa_1(H)=1$, когда $H=(T,U)$ – ориентированная звезда (т.е. либо $U=\{(s,t)\mid t\in T-\{s\}\}$, либо $U=\{(t,s)\mid t\in T-\{s\}\}$ для некоторого $s\in T$), и $\kappa_2(H)=\kappa_3(H)=1$, когда H – ориентированный полный двудольный граф (т.е. $U=\{(s,t)\mid s\in S,\ t\in T-S\}$ для некоторого $S\subset T$). На несложных примерах можно показать, что для всех остальных случаев дробности задач равны ∞.

Доказательство теоремы I

Справедливо следующее утверждение (его доказательство оставляется читателю).

Утверждение 2. Схема H удовлетворяет условиям теоремы I тогда и только тогда, когда в H найдется порожденный подграф H' с шестью вершинами такой, что $3K_2 \subseteq H' \subseteq H^1$, где H^1 – граф, изображенный на рис. 1б.

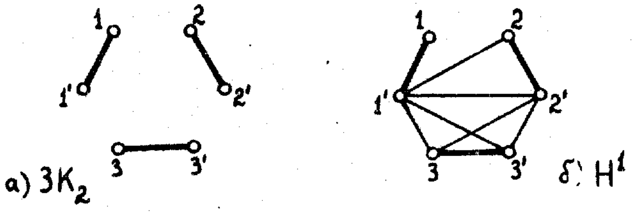
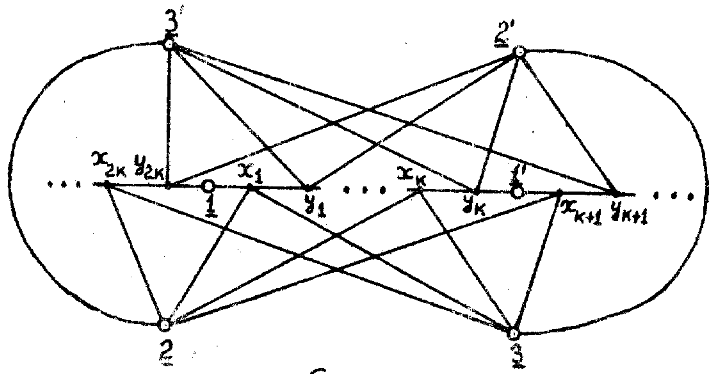


Рис.1

В силу утверждений I и 2 при доказательстве теоремы I достаточно ограничиться рассмотрением схем $H=(T,U)$ таких, что $3K_2 \subseteq H \subseteq H^1$. Надо показать, что для произвольного натурального числа k^* найдутся граф $G=(V,E)$, $V \supseteq T$, и функция $c: E \to \mathbb{Z}_+$ такие, что для любого оптимального решения f задачи $\Sigma(G,H,c)$ функция $k'f$ нецелочисленная при всех натуральных $k' < k^*$. Конструкция таких сетей (G,c) для указанных схем H использует конструкцию для "простейшей" схемы $H_0 = 3K_2$. Для H_0 можно взять контрпример из работы [4], §I2, однако мы здесь укажем более простые сети. А именно, рассмотрим граф $G_0=(V_0,E_0)$, изображенный на рис.2; он состоит из цикла $\underline{1}\, x_1 y_1 \dots x_k y_k\, \underline{1}'\, x_{k+1} y_{k+1} \dots x_{2k} y_{2k}\, \underline{1}$, к которому добавлены вершины $\underline{2}$, $\underline{2}'$, $\underline{3}$, $\underline{3}'$, ребра $\underline{2}x_i$, $\underline{3}x_i$, $\underline{2}'y_i$, $\underline{3}'y_i$, $i=1,\dots,2k$, и ребра $\underline{23}'$ и $\underline{32}'$; все ребра $e \in E_0$ имеют пропускную способность $c_0(e)$, равную I, кроме ребер

$\underline{23}'$ и $\underline{32}'$ пропускной способности 2. Положим $H_0=(T_0,U_0)$, $T_0=\{\underline{1}, \underline{1}', \underline{2}, \underline{2}', \underline{3}, \underline{3}'\}$ и $U_0=\{\underline{11}', \underline{22}', \underline{33}'\}$.



G_0

Рис. 2

Зададим в G_0 мультипоток f_0:

$$f_0(L_i) = f_0(L'_i) = \frac{k-1}{k}, \quad i=1,\dots,2k,$$
$$f_0(P_1) = f_0(P_2) = \frac{1}{k},$$
$$f_0(Q_i) = f_0(Q'_i) = \frac{1}{k}, \quad i=1,\dots,2k,$$

где

$$L_i = \underline{2}\, x_i y_i\, \underline{2}', \quad L'_j = \underline{3}\, x_j y_{j-1}\, \underline{3}' \quad (j \neq 1, k+1)$$
$$L'_1 = \underline{3}\, x_1\, \underline{1}\, y_{2k}\, \underline{3}', \quad L'_{k+1} = \underline{3}\, x_{k+1}\, \underline{1}'\, y_k\, \underline{3}',$$
$$P_1 = \underline{1}\, x_1 y_1 \dots x_k y_k\, \underline{1}', \quad P_2 = \underline{1}\, y_{2k} x_{2k} \dots y_{k+1} x_{k+1}\, \underline{1}',$$
$$Q_i = \underline{2}\, x_i\, \underline{3}\underline{2}', \quad Q'_i = \underline{2}\,\underline{3}'\, y_i\, \underline{2}'$$

(на остальных цепях в $\mathcal{L}(G_0,H_0)$ f_0 равен 0). Непосредственный подсчет показывает, что:

(i) все ребра в G_0 насыщены f_0, т.е. $\xi^{f_0}(e)=c_0(e)$ для всех $e\in E_0$;

$$(ii)\quad v(f_0,\underline{1}\underline{1}')=\frac{2}{\kappa},\quad v(f_0,\underline{2}\underline{2}')=2\kappa+2,\quad v(f_0,\underline{3}\underline{3}')=2\kappa-2;$$

следовательно, f_0 – c_0- допустимый мультипоток общей мощности $v(f_0)=4\kappa+2/\kappa$.

Докажем, что f_0 – оптимальное решение для $\Sigma(G_0,H_0,c_0)$, откуда будет следовать, что дробность этой задачи не менее $\kappa/2$ (поскольку $v(f_0)$ имеет дробную часть $2/\kappa$). Для этого рассмотрим двойственную задачу $\Sigma^*(G_0,H_0,c_0)$. Допустимым решением задачи $\Sigma^*(G,H,c)$, двойственной (в смысле линейного программирования) задаче $\Sigma(G,H,c)$, является функция $\ell: E\to\mathbb{R}_+$, удовлетворяющая ограничениям

$$\ell(EL)\geq 1,\quad L\in\mathcal{L}(G,H),$$

которые можно переписать как

$$m_\ell(st)\geq 1,\quad st\in U,$$

где $m_\ell(xy)$ обозначает расстояние между вершинами x и y в графе G, ребра которого имеют длины $\ell(e)$, т.е. $m_\ell(xy)=\min\{\ell(EL)\mid L\in\mathcal{L}(G,xy)\}$. По теореме двойственности линейного программирования допустимые решения f и ℓ оптимальны тогда и только тогда, когда

$$v(f)=c\cdot\ell\quad(=\Sigma(c(e)\ell(e)\mid e\in E)),$$

что эквивалентно выполнению соотношений дополняющей нежесткости

$$(C1)\quad L\in\mathcal{L}(G,H),\ f(L)>0\Rightarrow \ell(EL)=1,$$

$$(C2)\quad e\in E,\ \ell(e)>0\Rightarrow \xi^{f}(e)=c(e).$$

В нашем случае положим

$$\ell_0(\underline{1}x_1)=\ell_0(\underline{1}y_{2\kappa})=\ell_0(\underline{1}'x_{\kappa+1})=\ell_0(\underline{1}'y_\kappa)=\frac{1}{4\kappa};$$

$$\ell_0(\underline{2}\underline{3}')=\ell_0(\underline{3}\underline{2}')=\ell_0(x_iy_i)=\ell_0(y_jx_{j+1})=\frac{1}{2\kappa},$$

$$i=1,\dots,2\kappa,\quad j=1,\dots,\kappa-1,\kappa+1,\dots,2\kappa-1;$$

$$\ell_0(\underline{2}x_i)=\ell_0(\underline{3}x_i)=\ell_0(\underline{2}'y_i)=\ell_0(\underline{3}'y_i)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4\kappa},\quad i=1,\dots,2\kappa.$$

Нетрудно проверить, что ℓ_0 – допустимое решение для $\Sigma^*(G_0,H_0,c_0)$ и что для f_0 и ℓ_0 выполняются соотношения (C1) и (C2), что и требуется.

Таким образом, мы получили нужный пример для схемы $H_0=3K_2$. Для того, чтобы получить требуемые примеры для других схем H, $H_0\subset H\subseteq H^1$, нам понадобится сначала несколько перестроить G_0, c_0 и f_0 с тем, чтобы каждый из трех составляющих потоков в новой сети имел целочисленную мощность.

1) Возьмем k копий $(G_1,c_1),\dots,(G_k,c_k)$ сети (G_0,c_0) и склеим их друг с другом, отождествляя между собой вершины $\underline{1}_j$ (полученную вершину обозначим $\tilde{1}$) и вершины $\underline{1}'_j$ (полученную вершину обозначим $\tilde{1}'$), где w_j обозначает копию вершины $w\in V_0$ в графе G_j.

2) К полученному графу добавим новые вершины 1, 1', 2, 2', 3, 3', ребра $1\tilde{1}$ и $1'\tilde{1}'$ пропускной способности 2, ребра $2\underline{2}_j$ и $2'\underline{2}'_j$ пропускной способности $2\kappa+2$ и ребра $3\underline{3}_j$ и $3'\underline{3}'_j$ пропускной способности $2\kappa-2$, $j=1,\dots,k$. Полученную сеть обозначим $(G=(V,E),c)$; пусть $\tilde{H}=(\tilde{T},\tilde{U})$ – схема с ребрами $1\,1'$, $2\,2'$ и $3\,3'$.

Мультипоток f_0 естественно "продолжается" до мультипотока f для G, H и c. А именно, каждой цепи $L=\underline{i}v\dots w\underline{i}'$ $(i\in\{1,2,3\})$ сопоставим κ цепей $L_j=i\underline{i}_jv_j\dots w_j\underline{i}'_ji'$, $j=1,\dots,\kappa$, в G и положим $f(L_j)=f_0(L)$. Ясно, что все ребра в G насыщены f, и f – оптимальное решение для G, c и $\tilde{H}$.

Докажем, что любой максимальный поток f' для G, c и $\widetilde{H}$ имеет дробность не менее $k/4$. Пусть $E(x)$ обозначает множество ребер в G, инцидентных $x \in V$. Положим $E' = \bigcup(E(s) \mid s \in \widetilde{T})$. Рассмотрим две функции ℓ^1 и ℓ^2 на E:

а) $\ell^1(e)$ равно 0 для $e \in E'$ и $\ell^1(e) = \ell_0(e')$ для $e \in E - E'$, где e' – ребро в G_0, копией которого является e;

б) $\ell^2(e) = \frac{1}{2}$ для $e \in E'$ и 0 для $e \in E - E'$.

Легко видеть, что ℓ^1 и ℓ^2 являются оптимальными решениями задачи $\Sigma^*(G, \widetilde{H}, c)$. Пусть $L = i \ldots i'$ – цепь в $\mathcal{L}(G, \widetilde{H})$, для которой $f'(L) > 0$. Из соотношения $(C1)$ для f' и ℓ^2 следует, что L не содержит вершин из $\widetilde{T}$, отличных от i и i'. Далее, если $i \in \{2, 3\}$ и L содержит вершину $s \in \{\widetilde{1}, \widetilde{1}'\}$, то, ввиду $\ell^1(EL) = 1$ и $m_{\ell^1}(is) = m_{\ell^1}(si') = \frac{1}{2}$ (что нетрудно проверить), имеем $\ell^1(EL') = \ell^1(EL'') = \frac{1}{2}$, где L' и L'' – отрезки цепи L от i до s и от s до i', соответственно. Пусть $G_j' = (V_j', E_j')$ – подграф в G, получающийся при добавлении к графу G_j вершин 2, 2', 3, 3' и ребер $2\underline{2}_j$, $2'\underline{2}_j'$, $3\underline{3}_j$ и $3'\underline{3}_j'$. Пусть g – мультипоток в G_j' с полюсами в $T' = \{\widetilde{1}, \widetilde{1}', 2, 2', 3, 3'\}$, индуцируемый f', т.е. $g(L') = \sum f'(L)$, где L' – произвольная цепь в G_j' с обоими концами в T' и суммирование ведется по всем цепям $L \in \mathcal{L}(G, \widetilde{H})$ таким, что L' – отрезок L; обозначим множество цепей в G_j' с обоими концами в T' через $\mathcal{L}'$. Поскольку f' должен насыщать все ребра в G, то g насыщает все ребра в G_j, откуда

$$\sum(\ell^1(EL')g(L') \mid L' \in \mathcal{L}') = \sum(c(e)\ell^1(e) \mid e \in E_j') = c_0 \cdot \ell_0 = 4k + \frac{2}{k}$$

В то же время из сказанного выше следует, что для каждой цепи $L' \in \mathcal{L}'$ такой, что $g(L') > 0$, величина $\ell^1(EL')$ может равняться только I или I/2. Отсюда следует, что g имеет дробность не менее $k/4$. (Заметим, что построенный пример доказывает также неограниченную дробность задач <u>о допустимости</u> со схемой $3K_2$).

Наконец, рассмотрим произвольную схему $H = (T, U)$ такую, что $3K_2 \subset H \subseteq H^1$. Легко видеть, что в H^1 имеется единственный подграф, изоморфный $3K_2$. Поэтому можно считать. что $T = \widetilde{T}$, $U \supset \widetilde{U} = \{11', 22', 33'\}$ и H^1 имеет множество ребер $U^1 = \widetilde{U} \cup \{1'2, 1'2', 1'3, 1'3', 2'3, 2'3'\}$. Покажем, что для построенных выше G и c всякое оптимальное решение f^* задачи $\Sigma(G, H, c)$ удовлетворяет $v(f^*, st) = 0$ для всех $st \in U - \widetilde{U}$, откуда будет следовать, что ограничение f^* на $\mathcal{L}(G, \widetilde{H})$ является оптимальным решением задачи $\Sigma(G, \widetilde{H}, c)$ и, таким образом, f^* имеет дробность $\geqslant k/4$. Для этого достаточно предъявить оптимальное решение ℓ двойственной задачи $\Sigma^*(G, H, c)$ такое, что $m_\ell(st) > 1$ для всех $st \in U - \widetilde{U}$ (тогда в силу $(C1)$ справедливо $v(f^*, st) = 0$). Требуемую функцию ℓ определим следующим образом:

$$\ell(1\widetilde{1}) = 0, \quad \ell(1'\widetilde{1}') = 1,$$

$$\ell(2\underline{2}_j) = \tfrac{1}{4},\ \ell(2'\underline{2}_j') = \tfrac{3}{4},\ \ell(3\underline{3}_j) = \ell(3'\underline{3}_j') = \tfrac{1}{2},\ j = 1, \ldots, k,$$

и $\ell(e) = 0$ для остальных ребер в G. Нетрудно проверить, что:

(i) $m_\ell(st) = 1$ для $st \in \widetilde{U}$ и $m_\ell(st) > 1$ для $st \in U^1 - \widetilde{U}$;

(ii) для ℓ и построенного выше мультипотока f (для G, c и $\widetilde{H}$) выполняются соотношения $(C1)$ и $(C2)$, следовательно, ℓ и f (продолженное нулем на $\mathcal{L}(G, H - \widetilde{H})$) – оптимальные решения для $\Sigma^*(G, H, c)$ и $\Sigma(G, H, c)$, что и требуется.

Теорема I доказана.

Доказательство теоремы 2

Следующее утверждение достаточно тривиально (его проверка оставляется читателю).

<u>Утверждение 3.</u> Пусть H – граф без изолированных вершин. В H имеются две различные пересекающиеся антиклики тогда и только тогда, когда в H найдется такое подмножество из четырех вершин $T'=\{1,1',2,2'\}$, что порожденный ими подграф H' удовлетворяет $H_0 \subseteq H' \subseteq H_1$, где $H_0=(T',U_0)$, $H_1=(T',U_1)$, $U_0=\{11',22'\}$ и $U_1=\{12,12'\} \cup U_0$.

В силу утверждения 1(ii) достаточно ограничиться рассмотрением схем $H=(T,U)$, для которых $H_0 \subseteq H \subseteq H_1$. Пусть $T=\{1,1',2,2'\}$ и реберные множества U_0 и U_1 графов H_0 и H_1 определены как в утверждении 3.

Для произвольного положительного четного числа k укажем простой пример задачи $COST(G,H,c,a)$, имеющей единственное оптимальное решение f, дробность которого равна k. Граф $G=(V,E)$ изображен на рис.3; пропускные способности всех ребер равны 1, кроме ребер $2w$ и $2'w'$, имеющих пропускную способность $k-1$.

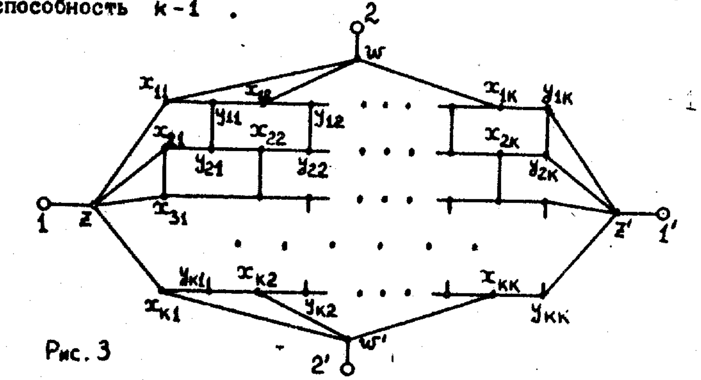


Рис. 3

Стоимости ребер задаются следующим образом:

$$a(x_{ij}y_{ij})=0,\quad a(1z)=2k,\quad a(1'z')=0,\quad a(2w)=a(2'w')=k;$$
$$a(y_{ij}x_{ij+1})=a(y_{pq}y_{p+1q})=a(x_{rm}x_{r+1m})=1,$$
$$a(zx_{i1})=a(z'y_{ik})=a(wx_{1j})=a(w'x_{kj})=k.$$

Выделим цепи: $L_i=1zx_{i1}y_{i1}x_{i2}\ldots x_{ik}y_{ik}z'1'$,

$P_i=2wx_{1i}y_{1i}y_{2i}x_{2i}x_{3i}y_{3i}\ldots y_{ki}x_{ki}w'2'$, $i=1,\ldots,k$,

и зададим мультипоток f, полагая $f(P_i)=(k-1)/k$, $f(L_i)=1/k$, $i=1,\ldots,k$, и $f(L)=0$ для остальных цепей в $\mathcal{L}(G,H)$. Непосредственно проверяется, что:

1) $v(f)=k$, и для любого c- допустимого мультипотока $f' : \mathcal{L}(G,H) \to \mathbb{R}_+$ имеет место $v(f') \leq \frac{1}{2}(c(1z)+c(1'z')+c(2w)+c(2'w'))=k$ следовательно, f – максимальный мультипоток;

2) цепи L_i и P_i имеют стоимость $5k-1$, а любая другая цепь L в $\mathcal{L}(G,H_1)$ имеет стоимость $a(EL)$ не менее $5k$; следовательно, f имеет минимальную стоимость среди всех других мультипотоков (для G, c и H) той же мощности;

3) мультипоток f единственен среди мультипотоков мощности k, текущих только по цепям вида L_i или P_i.

Это доказывает теорему 2.

Литература

1. Seymour P.D. Sums of circuits. – In: Bondy J.A. and Murty U.S.R., eds, Graph Theory and Related Topics. – NY, Acad. Press, 1978, 341-355.

2. Форд Л.Р., Фалкерсон Д.Р. Потоки в сетях. – М.: Мир, 1966.

3. Hu T.C. Multicommodity network flows. – Oper. Research, 1963, v. 11, pp. 344-360.

4. Lomonosov M.V. Combinatorial approaches to multiflow problems. – Discrete Applied Math., 1985, v. 11, N 1, pp. 1-94.

5. Карзанов А.В., Ломоносов М.В. Системы потоков в неориентированных сетях. – В кн.: Математическое программирование и т.д. – М.: ВНИИСИ, 1978, вып.I, с.59-66.

6. Карзанов А.В. О многопродуктовых потоковых задачах с целочисленными оптимальными решениями. – Доклады АН СССР, 1985, т.280, № 4, с.789-792.

7. Карзанов А.В. Задача о максимальном мультипотоке минимальной стоимости. – В кн.: Комбинаторные методы в потоковых задачах. – М.: ВНИИСИ, 1979, вып.3, с.138-156.

8. Karzanov A.V. Half-integral five-terminus flows. – Discrete Applied Math., v. 18, N 3, 1987, pp. 263-278.