1987

Кибернетика

ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК

УДК 519.854.2

А. В. КАРЗАНОВ

О МАКСИМАЛЬНЫХ ПАРОСОЧЕТАНИЯХ ЗАДАННОГО ВЕСА В ПОЛНЫХ И ПОЛНЫХ ДВУДОЛЬНЫХ ГРАФАХ

В работе рассматривается задача существования максимального паросочетания заданного веса во взвешенных полных и полных двудольных графах. Известно, что такая задача NP-полна при целочисленных неотрицательных весах ребер. Предлагается полиномиальный алгоритм ее решения в случае, когда ребра имеют веса 0 и 1.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть $G = (V, E)$ — конечный неориентированный граф, на ребрах которого задана целочисленная весовая функция $a : E \to \mathbf{Z}$. Паросочетанием в G считается подмножество $M \subseteq E$ попарно несмежных (т. е. не имеющих общих концов) ребер. Паросочетание M называется тупиковым, если оно максимально по включению, наибольшим, если его мощность $|M|$ максимально возможная, и совершенным, если $|M| = |V|/2$. Задачи о паросочетаниях имеют весьма широкий круг применений, и многие из них поддаются эффективному (полиномиальному) алгоритмическому решению. Таковы, в частности, задача о наибольшем паросочетании, задача о паросочетании M максимального веса $a(M) = \Sigma\ (a\ (e) : e \in M)$, задача о совершенном паросочетании минимального веса (например, [1]).

По-иному обстоит дело с задачами о паросочетаниях строго заданного веса. Обозначим $P\ (G, a, k)$ следующую задачу: для заданного целого числа k определить, существует ли в G тупиковое паросочетание M, вес которого $a\ (M)$ равен k. Она оказывается труднорешаемой уже в следующих частных случаях.

1. G — двудольный граф и $a \equiv 1$. К этой задаче сводится NP-полная задача о минимальном по мощности тупиковом паросочетании [2, с. 239].

2. G — полный двудольный граф и $a : E \to \mathbf{Z}^+$ (что эквивалентно варианту задачи о назначении, который можно назвать задачей о точном назначении: выяснить, существует ли в матрице размера $m \times n$ подмножество из $\min\{m, n\}$ независимых элементов, т. е. не более чем по одному в каждой строке и в каждом столбце, сумма которых равна заданному числу k). Как указано в [3], эта задача обобщает NP-полную задачу о разбиении множества чисел [2, с. 66]. Отметим, что если для последней имеется псевдополиномиальный алгоритм решения, то для первой такого алгоритма до сих пор не известно. В [3] для нее предложен псевдополиномиальный алгоритм вероятностного характера, который при заданных G, a, k и ε, $0 < \varepsilon < 1$, выдает правильный ответ, если требуемого паросочетания не существует, ошибается с вероятностью $< \varepsilon$, если оно существует, при этом алгоритм затрачивает $O\ (AQ\ (|V|) \log_{2A} \varepsilon^{-1})$ действий, где $A = \max\{|a\ (e)| : e \in E\}$ и $Q\ (n)$ — некоторый полином (фактически в [3] решается задача о произвольном паросочетании заданного веса в двудольном графе, но алгоритм легко модифицируется и для рассматриваемого случая).

3. G — полный граф и $a : E \to \mathbf{Z}^+$. Эта задача NP-полна, поскольку к ней также может быть легко сведена задача о разбиении множества чисел.

Напомним, что граф $G = (V, E)$ называется двудольным, если существует разбиение $\{I, J\}$ его вершин, при котором каждое ребро в G имеет один конец в I и другой в J. Если при этом I и J непусты и каждая пара вершин $x \in I$, $y \in J$ соединена ребром, граф G называется полным двудольным; будем обозначать его $(I : J, E)$. Граф называется полным, если каждые две его различные вершины соединены ребром.

В настоящей работе дается критерий разрешимости задачи $P(G, a, k)$ и предлагается полиномиальный алгоритм ее решения для случая, когда a принимает значения 0 и 1 и G является либо полным, либо полным двудольным графом.

Исследуем вначале случай полного двудольного графа $G = (I : J, E)$. Достаточно ограничиться рассмотрением сбалансированного графа, т. е. графа с $|I| = |J| = n$, поскольку если, например, $|I| > |J|$, то можно перейти к эквивалентной задаче, добавив $|I| - |J|$ новых вершин и соединив их ребрами веса 0 со всеми вершинами из I. В таком графе множества тупиковых, наибольших и совершенных паросочетаний, очевидно, совпадают и состоят из паросочетаний мощности n. Выделим подграфы $H^0 = (V, E^0)$ и $H^1 = (V, E^1)$, где $E^0 = \{e \in E : a\ (e) = 0\}$ и $E^1 = E \setminus E^0$. Пусть k^0 и k^1 — мощность наибольших паросочетаний в графах H^0 и H^1 соответственно. Ясно, что задача не имеет решения (т. е. требуемого паросочетания не существует), когда $k > k^1$ или $n - k > k^0$. Другие случаи отсутствия решения менее тривиальны. Через $m(\Gamma)$ будем обозначать число компонент (максимальных по включению связных подграфов) графа Γ.

Пример 1. Пусть $m\ (H^1) \geqslant 3$ (соответственно $m\ (H^0) \geqslant 3$) и каждая компонента в H^1 (в H^0) является сбалансированным полным двудольным графом. Тогда задача имеет решение

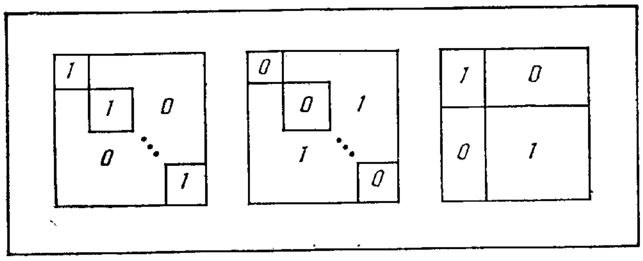

Рис. 1

при всех k от $n - k^0$ до $k^1 = n$, кроме $k = n - 1$ (соответственно при всех k от 0 до k^1, кроме $k = 1$).

Пример 2. Пусть $m(H^1) = 2$ и компонентами в H^1 служат полные двудольные графы $(I_i : J_i, E_i)$, $i = 1, 2$, (очевидно, аналогичное верно и для H^0). Тогда $k^1 = n - \| I_1 | - | J_1 \|$, $k^0 = n - \| I_1 | - | J_2 \|$, и при $n - k^0 \leqslant k \leqslant k^1$ задача имеет решение в том и только в том случае, когда $k + n + | I_1 | + | J_1 |$ четно.

Проверку этих примеров, а также приводимых ниже примеров 3 и 4 оставляем читателю (матрицы (a_{ij}), соответствующие примерам 1, 2, иллюстрируются на рис. 1).

Теорема 1 Пусть для сбалансированного полного двудольного графа $G = (I : J, E)$, $|I| = n$, и функции $a : E \to \{0, 1\}$ подграфы H^0 и H^1 отличны от указанных в примерах 1 и 2. Тогда G имеет совершенное паросочетание веса k для любого целого k, удовлетворяющего $n - k^0 \leqslant k \leqslant k^1$.

Рассмотрим теперь случай полного графа $G = (V, E)$, и пусть подграфы H^0, H^1 и k^0, k^1 определены аналогичным образом. Не теряя общности, можем считать, что $|V|$ четно и равно $2n$. Как и выше, задача не имеет решения при $k > k^1$ или $n - k > k^0$.

Пример 3. Пусть $m(H^1) = m \geqslant 2$ (соответственно $m(H^0) = m \geqslant 2$) и каждая компонента в H^1 (в H^0) — это либо полный граф с четным числом вершин, либо сбалансированный полный двудольный граф, причем если $m = 2$, то множество последних непусто. Тогда задача имеет решение при всех k от $n - k^0$ до n, кроме $k = n - 1$ (соответственно, при всех k от 0 до k^1, кроме $k = 1$).

Пример 4. Пусть $m(H^1) = 2$ (соответственно $m(H^0) = 2$) и компонентами в N^1 (в N^0) служат полные графы (V_i, E_i), $i = 1, 2$. Положим $n_i = | V_i |$. Тогда $k^1 = \lfloor n_1/2 \rfloor + \lfloor n_2/2 \rfloor$, $k^0 = \min\{n_1, n_2\}$ (соответственно $k^1 = \min\{n_1, n_2\}$, $k^0 = \lfloor n_1/2 \rfloor + \lfloor n_2/2 \rfloor$) и при $n - k^0 \leqslant k \leqslant k^1$ задача имеет решение в том и только том случае, когда $k + n + n_1$ (соответственно $k + n_1$) четно; $\lfloor c \rfloor$ обозначает целую часть числа c.

Теорема 2. Пусть для полного графа $G = (V, E)$ с четным числом вершин $2n$ и функции $a : E \to \{0, 1\}$ подграфы H^0 и H^1 отличны от указанных в примерах 3 и 4. Тогда G имеет совершенное паросочетание веса k для любого целого k, удовлетворяющего $n - k^0 \leqslant k \leqslant k^1$.

Теоремы 1, 2 будут доказаны ниже, причем из этих доказательств будут непосредственно следовать эффективные алгоритмы, которые либо находят требуемое паросочетание, либо устанавливают, что имеет место некоторый из указанных неразрешимых случаев (выяснить, являются ли подграфы H^1 и H^0 такими, как в примерах 1—4, можно заранее, потратив $O(n^2)$ действий). Эти алгоритмы сравнимы по трудоемкости с алгоритмами нахождения наибольшего паросочетания соответственно в двудольном графе и графе общего вида, т. е. задача может быть решена за $O(n^{2,5})$ действий в случае полного двудольного графа G и за $O(n^{2,5} \log n)$ действий в случае полного графа G.

В дальнейшем понадобятся дополнительные определения и обозначения. Ребро с концами x и y может быть обозначено xy. Под цепью (циклом) в G будем понимать непустое подмножество ребер $L \subseteq E$ такое, что $L = \{x_i x_{i+1} : i = 0, \ldots, r - 1\}$, где $x_0, \ldots, x_r$ — различные вершины (различные, кроме $x_0 = x_r$); будем говорить, что цепь L соединяет вершины x_0 и x_r. Цепь L называется чередующейся относительно паросочетания M, если в каждой паре соседних ребер в L одно ребро принадлежит M_0. Множество всех совершенных паросочетаний в G будем обозначать $\mathcal{M} = \mathcal{M}(G)$. Для $M \in \mathcal{M}$ и чередующегося относительно M цикла C обозначим через $q(M, C)$ величину $a(C \cap M) - a(C \setminus M)$; очевидно, $M \Delta C$ — совершенное паросочетание, вес которого равен $a(M) - q(M, C)$ ($A \triangle B$ обозначает симметрическую разность $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$). Для произвольного графа $\Gamma = (W, U)$ и непересекающихся подмножеств $X, Y \subseteq W$ через $U(X : Y)$ обозначается множество ребер в Γ с одним концом в X и другим в Y; порожденный X и Y двудольный подграф $(X \cup Y, U(X : Y))$ обозначим $\Gamma(X : Y)$. Через $\Gamma(X) = (X, U(X))$ будем обозначать подграф в Γ, порожденный X, т. е. $U(X) = \{xy \in U : x, y \in X\}$.

СЛУЧАЙ ПОЛНОГО ДВУДОЛЬНОГО ГРАФА

Пусть $G = (I : J, E)$ — сбалансированный полный двудольный граф, $|I| = n$, и для заданного k выполняется $n - k^0 \leqslant k \leqslant k^1$. Если $k = k^1$ (соответственно $k = n - k^0$), то требуемое паросочетание получается из наибольшего паросочетания в H^1 (в H^0) путем произвольной достройки до совершенного паросочетания в G, поэтому будем считать, что $n - k^0 < k < k^1$.

Лемма 1. Существует $M \in \mathcal{M}$, вес которого равен k или $k + 1$.

(Следует отметить, что лемма остается верной, если G — произвольный граф и $\mathcal{M}$ — множество всех его тупиковых паросочетаний.)

Доказательство. Можно считать, что $k \leqslant k^1 - 2$. Зафиксируем некоторое $M_0 \in \mathcal{M}$ с $a(M_0) < k$ и выберем произвольное $M' \in \mathcal{M}$, для которого $a(M') \geqslant k + 2$. Для доказательства леммы достаточно показать, что существует $M'' \in \mathcal{M}$ такое, что $0 \leqslant a(M') - a(M'') \leqslant 2$ и $|M'' \cap M_0| > |M' \cap M_0|$. Множество $M' \triangle M_0$ состоит из попарно непересекающихся циклов (чередующихся относительно M' и M_0), выберем среди них цикл C с $q(M', C) > 0$, существующий ввиду $a(M') > a(M_0)$. Легко видеть, что в C найдутся соседние ребра xy и yz такие, что $xy \in M' \cap E^1$ и $yz \in M_0 \cap E^0$. Пусть zt — ребро в C, отличное от yz. Поскольку граф G полный двудольный, то $tx \in E$; положим $C' = \{xy, yz, zt, tx\}$. Ясно, что C' — цикл, чередующийся относительно M', и $0 \leqslant q(M', C') \leqslant 2$. Для $M'' = M' \Delta C'$ имеем $(M' \cap M_0) \cup \{yz\} \subseteq M'' \cap M_0$ и $a(M'') = a(M') - q(M', C')$, что и требуется. □

Заметим, что приведенное доказательство указывает процедуру трудоемкости $O(n^2)$, отыскивающую $M \in \mathcal{M}$ с $a(M) = k$ или $k+1$, если известны M_0, $M_1 \in \mathcal{M}$ с $a(M_0) = n - k^0$ и $a(M_1) = k^1$.

Пусть $M \in \mathcal{M}$ — паросочетание веса $k+1$. Наша цель — найти для него чередующийся цикл C с $q(M, C) = 1$ (если это удастся, то $M \Delta C$ — требуемое паросочетание веса k). Положим $M^0 = M \cap E^0$, $M^1 = M \cap E^1$ и обозначим X и Y множества вершин, соответственно из I и J, инцидентных ребрам в M^1.

1. С самого начала можем исключить из рассмотрения случай, когда $q(M, C) = 1$ для какого нибудь чередующегося цикла C с $|C| = 4$. Иными словами, будем считать выполненными условия:

$C1$) если xy, $zt \in M^1$, $x, z \in I$, то либо xt, $zy \in E^1$, либо xt, $zy \in E^0$;

$C2$) если $xy \in M^1$, $zt \in M^0$, $x,z \in I$, то по крайней мере одно из ребер xt, zy принадлежит E^1.

2. Исследуем строение графа $H^1(X:Y)$. Для $x \in X$ положим $D(x) = \{y \in Y : xy \in E^0\}$ и пусть $Q = \{x \in X : D(x) \neq \varnothing\}$. Для $x \in X$ определим множества X^x и Y^x, состоящие из всех вершин z в X и Y соответственно таких, что в графе $H^1(X:Y)$ существует чередующаяся относительно M^1 цепь, соединяющая x и z и содержащая ребро из M^1, инцидентное x; саму вершину x также будем считать входящей в множество X^x. Если для некоторого $x \in Q$ выполняется $Y^x \cap D(x) = \varnothing$, то, взяв для произвольного $y \in Y^x \cap D(x)$ указанную чередующуюся цепь, соединяющую x и y, и добавив к ней ребро xy, получим чередующийся цикл C с $q(M, C) = 1$ (поскольку все ребра в C, кроме xy, принадлежат E^1). В то же время справедлива следующая лемма.

Лемма 2. Если $Y^x \cap D(x) = \varnothing$ для всех $x \in Q$, то каждая компонента в $H^1(X:Y)$ является сбалансированным полным двудольным графом.

Доказательство. Пусть $x \in X$. Применяя стандартные рассуждения о чередующихся цепях двудольного графа, получаем, что: а) для $vu \in M^1$ из $v \in X^x$ следует $u \in Y^x$ и наоборот; б) $vu \in E^0$ для любых $v \in Y^x$ и $u \in X \setminus X^x$; в) $|X^x| = |Y^x|$. Из а), б) и условия $C1$) следует $vu \in E^0$ для любых $v \in X^x$ и $u \in Y \setminus Y^x$, т. е. $H^1(X^x : Y^x)$ — компонента в $H^1(X:Y)$. Это означает, что для любых $x, x' \in X$ графы $H^1(X^x : Y^x)$ и $H^1(X^{x'} : Y^{x'})$ либо совпадают, либо не пересекаются. Если теперь для некоторого $x \in Q$ граф $H^1(X^x : Y^x)$ не является полным двудольным, то, очевидно, найдется $x' \in X^x$, для которого $Y^x \cap D(x') \neq \varnothing$, что приводит к противоречию ввиду $Y^x = Y^{x'}$. □

Замечание. Нахождение указанного чередующегося цикла либо выявление того, что $H^1(X:Y)$ имеет структуру, как в лемме 2, может быть выполнено за $O(|X|^2)$ действий. Действительно, множества X^x и Y^x (и соответствующие чередующиеся цепи для вершин в них) могут быть построены стандартным методом расстановки пометок за $O(|X^x|^2)$ действий. Если для очередной вершины $x \in Q$ подграф $H^1(X^x : Y^x)$ не будет полным двудольным, то, как следует из доказательства леммы, взяв в качестве очередной вершины произвольное $x' \in X^x$, для которого $Y^x \cap D(x') \neq \varnothing$, построим соответствующий чередующийся цикл.

3. Пусть компонентами графа $H^1(X:Y)$ являются сбалансированные полные двудольные графы $G(X_1 : Y_1), \ldots, G(X_m : Y_m)$, где $X_i \subset I$, $i = 1, \ldots, m$. В дальнейшем не будем фиксировать паросочетание M внутри каждого $G(X_i : Y_i)$, т. е. будем считать, что M может содержать произвольные попарно несмежные ребра из каждого $G(X_i : Y_i)$.

Покажем, что в случае $m = 1$ в G имеется чередующийся цикл C с $q(M, C) = 1$. Прежде всего заметим, что $M^0 \neq \varnothing$ (иначе было бы $k + 1 = |M^1| = n$ и $k^0 = |E^0| = 0$, откуда $k < n - k^0$). Пусть S и T — множества всех вершин z в I и J соответственно таких, что либо $z \in X$, либо в подграфе H^0 найдется чередующаяся относительно M^0 цепь, соединяющая z с некоторой вершиной в X. Ясно, что $|S \setminus X| = |T \setminus Y|$ и $xy \notin E^0$ для любых $x \in S$, $y \in J \setminus T$. Поскольку в H^0 имеется паросочетание мощности $k^0 \geqslant n - k$, то по теореме Кенига—Оре (см. [4]) должно выполняться $|S| - |T| \leqslant k$, откуда получаем $|S \cap X| - |T \cap Y| \leqslant k$. Но $|S \cap X| = |X| = k + 1$, следовательно, $T \cap Y \neq \varnothing$. Таким образом, в H^0 есть чередующаяся цепь L, соединяющая некоторые $x \in X$ и $y \in Y$, и тогда $C = L \cup \{xy\}$ — искомый чередующийся цикл с $q(M, C) = 1$.

4. Пусть $m \geqslant 2$. Если $M^0 = \varnothing$, то $k = n - 1$ и получаем неразрешимый случай из примера 1 (при $m \geqslant 3$) или 2 (при $m = 2$). Будем далее считать, что $M^0 \neq \varnothing$. Для произвольного ребра $zt \in M^0$, $z \in I$, и вершин $x \in X_i$, $y \in Y_i$, $u \in X_j$, $v \in Y_j$, где $i \neq j$, очевидна альтернатива: либо для чередующегося цикла $C = \{zt, tx, xy, yu, uv, vz\}$ выполняется $q(M, C) = 1$, либо $a(tx) = a(zv)$. Пусть для всех таких z, t, x, y, u, v справедливо второе. Учитывая условие $C2$), отсюда нетрудно вывести, что для каждого $zt \in M^0$, $z \in I$, возможна только какая-либо из следующих двух ситуаций:

$A1$) $m \geqslant 2$, $E(\{z\} : Y) \cup E(X : \{t\}) \subset E^1$;

$A2$) $m = 2$ и с точностью до переиндексации выполняются

$$E(\{z\} : Y_1) \cup E(X_2 : \{t\}) \subset E^1,$$

$$E(\{z\} : Y_2) \cup E(X_1 : \{t\}) \subset E^0.$$

Предположим, что $m \geqslant 3$. Тогда, ввиду A1), для произвольного ребра $zt \in M^0$, $z \in I$, и шести вершин $x_i \in X_i$, $y_i \in Y_i$, $i = 1, 2, 3$, имеем чередующийся

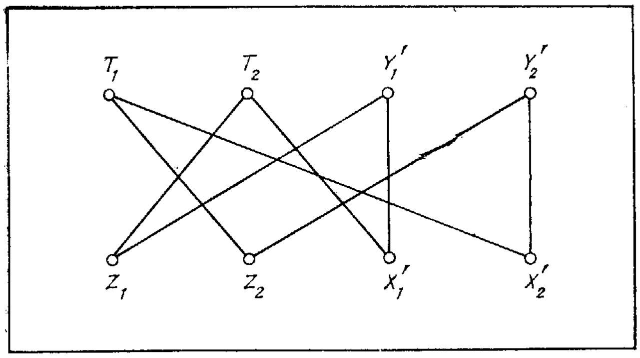

Рис. 2

цикл $C = \{zt,\ tx_1,\ x_1y_1,\ y_1x_2,\ x_2y_2,\ y_2x_3,\ x_3y_3,\ y_3z\}$, для которого $q(M, C) = 1$.

5. Осталось рассмотреть случай $m = 2$. Выберем четыре вершины $x_i \in X_i$, $y_i \in Y_i$, $i = 1, 2$, и перейдем к совершенному паросочетанию $M' = M \triangle C$, где $C = \{x_1y_1, y_1x_2, x_2y_2, y_2x_1\}$, имеющему вес $a(M') = a(M) - 2 = k - 1$. Попытаемся преобразовать M' в совершенное паросочетание веса k, применяя те же самые рассуждения, что и для M (поменяв местами множества E^1 и E^0). Тогда либо найдем требуемое паросочетание, либо установим неразрешимость задачи (получив подграф H^0 из примера 1 или 2), либо установим, что:

а) $a(M') = |M' \cap E^1| > 0$;

б) граф $H^0(Z:T)$, где $Z = (I \setminus X) \cup \{x_1, x_2\}$ и $T = (J \setminus Y) \cup \{y_1, y_2\}$, состоит из двух компонент — $G(Z_1:T_1)$ и $G(Z_2:T_2)$, $Z_i \subset I$, каждая из которых является сбалансированным полным двудольным графом;

в) для любых $i \in \{1, 2\}$, $x \in X_i \setminus \{x_i\}$, $y \in Y_i \setminus \{y_i\}$ имеет место одна из двух ситуаций (аналогичных $A1$) и $A2$)):

$B1$) $E(\{x\}:T) \cup E(Z:\{y\}) \subset E^0$;

$B2$) с точностью до переиндексации выполняется

$$E(\{x\}:T_1) \cup E(Z_2:\{y\}) \subset E^0,$$

$$E(\{x\}:T_2) \cup E(Z_1:\{y\}) \subset E^1.$$

Положим $X_i' = X_i \setminus \{x_i\}$ и $Y_i' = Y_i \setminus \{y_i\}$, $i = 1, 2$. Рассматривая произвольные i, $j \in \{1, 2\}$, $z \in Z_i$, $t \in T_i$, $x \in X_j'$, $y \in Y_j'$, убеждаемся, что для пары (z, t) возможна только ситуация $A2$), а для пары (x, y) — только $B2$). Отсюда следует, что для любых $i, j \in \{1, 2\}$ все ребра одного из множеств — $E(Z_i:Y_j')$ или $E(X_j':T_i)$ целиком принадлежат E^0, а другого — E^1. Заметим, что ввиду $M' \cap E^1 \neq \varnothing$ по крайней мере одно из множеств X_1' и X_2' непусто. Пусть, для определенности, $X_1' \neq \varnothing$ и $E(Z_1:Y_1') \subset E^1$. Тогда

$$E(X_1':T_2) \cup E(X_2':T_1) \cup E(Z_2:Y_2') \subset E^1,$$

$$E(Z_1:Y_2') \cup E(X_2':T_2) \cup E(Z_2:Y_1') \cup E(X_1':T_1) \subset E^0.$$

Отсюда непосредственно получаем, что H^1 есть объединение двух непересекающихся полных двудольных графов $G(Z_1 \cup X_1':T_2 \cup Y_1')$ и $G(Z_2 \cup X_2':T_1 \cup Y_2')$ (см. рис. 2, где каждое из восьми вершинных подмножеств изображено в виде одной вершины). Кроме того, из $|Z_1| + |T_2| = |M' \cap E^0| = n - k + 1$ и $|X_1'| = |Y_1'|$ следует нечетность числа $k + n + |Z_1 \cup X_1' \cup T_2 \cup Y_1'|$. Таким образом, пришли к неразрешимому случаю из примера 2.

Теорема 1 доказана.

Из приведенного доказательства ясно просматривается алгоритм решения данной задачи. Он начинается с нахождения наибольших паросочетаний в графах H^0 и H^1, что осуществимо за $O(n^{2,5})$ действий (см. [5 — 7]. Все остальные процедуры алгоритма могут быть выполнены с суммарной трудоемкостью $O(n^2)$.

СЛУЧАЙ ПОЛНОГО ГРАФА

Пусть $G = (V, E)$ — полный граф, $|V| = 2n$, и для заданного k выполняется $n - k^0 \leqslant k \leqslant k^1$. Можно считать, что $n - k^0 < k < k^1$. Легко убедиться, что доказательство леммы 1 остается корректным и для случая полного графа. Таким образом, можем считать, что имеются $M, M' \in \mathcal{M}$, для которых $a(M) = k + 1$ и $a(M') = k - 1$. Поскольку все циклы в $M \cup M'$ имеют четную мощность, может быть выбрано такое подмножество $I \subset V$, $|I| = n$, что M и M' содержатся в полном двудольном графе $G_I = G(I:J)$, где $J = V \setminus I$. Пусть E_I, H_I^0, H_I^1, k_I^0, k_I^1 обозначают соответственно множество ребер в G_I, подграфы $(V, E^0 \cap E_I)$, $(V, E^1 \cap E_I)$ и мощности наибольших паросочетаний в этих подграфах. Тогда $n - k_I^0 < k < k_I^1$ и можем попытаться найти требуемое паросочетание уже в G_I. Если его там нет, то по теореме 1 имеем один из неразрешимых случаев в примерах 1 и 2.

Случай 1. Верно $k = n - 1$ и H_I^1 состоит из $m \geqslant 2$ сбалансированных полных двудольных графов $G(I_i:J_i)$, $I_i \subset I$, $i = 1, \ldots, m$ (к общему случаю из примера 1 добавили частный случай из примера 2). Как и раньше, будем считать, что M не фиксировано внутри графов $G(I_i:J_i)$.

Лемма 3. Пусть в G нет паросочетания веса k. Тогда справедливо:

а) для каждого $i \in \{1, \ldots, m\}$ либо $E(I_i) \cup E(J_i) \subset E^0$, либо $E(I_i) \cup E(J_i) \subset E^1$;

б) для любых различных $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ либо $E(I_i:I_j) \cup E(J_i:J_j) \subset E^0$, либо $E(I_i:I_j) \cup E(J_i:J_j) \subset E^1$;

в) если $xz \in E^1$ для некоторых $x \in I_i$, $z \in I_j$, $i, j \in \{1, \ldots, m\}$, $i \neq j$, то $E(J_i) \subset E^0$ и для любого $l \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i, j\}$ выполняется $E(J_i:J_l) \subset E^0$.

Доказательство. Утверждения а), б) обусловлены следующим: если бы для некоторых различных вершин $x \in I_i$, $y \in J_i$, $z \in I_j$, $t \in J_j$ (допускается $i = j$) было $a(xz) \neq a(yt)$, то для чередующегося относительно M цикла $C = \{xy, yt, tz, zx\}$ имели бы $q(M, C) = 1$. Для доказательства в) рассмотрим произвольные различные вершины $y \in J_i$, $t \in J_j$, $u \in I_l$

$v \in J_l$, где $l \neq j$ (допускается $l = i$). Если бы было $yv \in E^1$, то для чередующегося цикла $C = \{xy, yv, vu, ut, tz, zx\}$ имели бы $q(M, C) = 1$. □

Из леммы 3 непосредственно следует, что в случае отсутствия решения компонентами графа H^1 могут быть только полные графы вида $G(I_i \cup J_i)$ и сбалансированные полные двудольные графы видов $G(I_i{:}J_i)$, $G(I_i \cup J_j{:}I_j \cup J_i)$. Таким образом, получаем неразрешимую ситуацию из примера 3 или 4 (если H_l^1 состоит из двух полных графов либо является полным двудольным графом, имеем частные случаи из примера 4).

Симметричный случай с $k = 1$ рассматривается аналогично.

Случай 2. Граф H_l^1 состоит из двух полных двудольных графов — $G(I_i{:}J_i)$, $I_i \subset I$, $i = 1, 2$, и $k + n + |I_1| + |J_1|$ нечетно. Можно считать, что $M \cap E^0 \neq \varnothing$ и $M' \cap E^1 \neq \varnothing$, поскольку в противном случае имели бы $k = n - 1$, $|I_i| = |J_i|$, $i = 1, 2$, или $k = 1$, $|I_1| = |J_2|$, $|J_1| = |I_2|$, что рассмотрено выше. Заметим, что из $k > n - k_l^0$ следует $M \cap E(I_i{:}J_i) \neq \varnothing$, $i = 1, 2$. Пусть, для определенности, $|I_1| \geqslant |J_1|$. Очевидно, в $M \cap E^0$ имеется ребро xy, для которого $x \in I_1$, $y \in J_2$. Можем считать, что M содержит ребра xy, zt, uv для произвольно выбранных различных $z, x \in I_1$, $t \in J_1$, $u \in I_2$, $y, v \in J_2$.

Лемма 4. Пусть в G нет паросочетания веса k. Тогда верно одно из двух:

а) $E(I_1{:}I_2) \cup E(J_1{:}J_2) \subset E^0$, $E(I_1) \cup E(I_2) \cup E(J_1) \cup E(J_2) \subset E^1$;

б) $E(I_1{:}I_2) \cup E(J_1{:}J_2) \subset E^1$, $E(I_1) \cup E(I_2) \cup E(J_1) \cup E(J_2) \subset E^0$.

Доказательство. Из предположения, что для некоторых $z_0 \in I_1$, $t_0 \in I_2$ выполняется $z_0t_0 \in E^0$, получаем следующую цепочку утверждений:

1) $uv \in E^0$ для любых $u \in J_1$, $v \in J_2$ (иначе для чередующегося цикла $C = \{z_0u, uv, vt_0, t_0z_0\}$ имели бы $q(M, C) = 1$); аналогично получаем $zt \in E^0$ для всех $z \in I_1$, $t \in I_2$;

2) $zx \in E^1$ для любых различных $z, x \in I_1$ (иначе $C = \{zx, xy, yu, uz\}$, где $u \in J_1$, $y \in J_2$ — чередующийся цикл с $q(M, C) = 1$); аналогично $yv \in E^1$ для любых различных $y, v \in J_2$;

3) если в $M \cap E^0$ имеется ребро $x'y'$ с $x' \in I_2$, $y' \in J_1$, то из тех же соображений, что и в 2), получаем $E(I_2) \cup E(J_1) \subset E^1$; предположим, что таких ребер $x'y'$ в $M \cap E^0$ нет, тогда $|M \cap E(I_1{:}J_1)| = |J_1|$ и, следовательно, для любых различных $u, u' \in J_1$, $z, z' \in I_1$ цикл $C = \{zu, uu', u'z', z'z\}$ — чередующийся; поскольку $q(M, C) \neq 1$, то $uu' \in E^1$; аналогично показывается, что $E(I_2) \subset E^1$.

Таким образом, справедливо а). Ситуация б) возникает в предположении, что $z_0t_0 \in E^1$ для некоторых $z_0 \in I_1$, $t_0 \in I_2$ (надо провести те же самые рассуждения относительно M', поменяв местами E^0 и E^1). □

Из леммы 4 немедленно следует, что если задача не имеет решения, то либо H^1 состоит из полных графов $G(I_i \cup J_i)$, $i = 1, 2$, либо H^0 состоит из полных графов $G(I_1 \cup J_2)$ и $G(I_2 \cup J_1)$. Наконец, как легко видеть, оба числа $k + n + |I_1 \cup J_1|$ и $k + |I_1 \cup J_2|$ нечетны, т. е. в обоих вариантах имеем неразрешимые случаи из примера 4.

Теорема 2 доказана.

Данное доказательство легко трансформируется в алгоритм решения рассматриваемой задачи. Он начинается с построения наибольших паросочетаний в графах H^0 и H^1, что выполнимо за $O(n^{2.5} \log n)$ действий [8] (более простые алгоритмы в [9, 10] делают это за $O(n^3)$ действий). Остальные процедуры алгоритма могут быть осуществлены за On^2 действий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Edmonds J., Johnson E. L. Matching : a well-solved class of integer linear programs // Combinatorial structures and their applications.— New York : Gordon and Breach, 1970.— P. 89—92.
2. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи.— М. : Мир, 1982.— 416 с.
3. Хачиян Л. Г. Паросочетания заданного веса в двудольных графах // Методы и программы решения оптимизационных задач на графах и сетях: Тез. докл. 3-го Всесоюз. совещ. (авг. 1984, Ташкент).— Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1984.— Ч. 2.— С. 117—119.
4. Оре О. Теория графов.— М. : Наука, 1968.— 352 с.
5. Карзанов А. В. Точная оценка алгоритма нахождения максимального потока, примененного к задаче о представителях множеств // Вопр. кибернетики.— 1973.— Вып. 1.— С. 66—70.
6. Hopcroft J. E., Karp R. M. An $n^{5/2}$ algorithm for maximum matching in bipartite graphs // SIAM J. Comput.— 1973.— 2.— P. 225—231.
7. Адельсон-Вельский Г. М., Диниц Е. А. Карзанов А. В. Потоковые алгоритмы.— М.: Наука, 1975.— 119 с.
8. Even S., Kariv O. An $O(n^{2.5})$ algorithm for maximum matching in general graphs // Conf. record, IEEE 16 th ann. symp. on foundations of computer sci.— New York: IEEE, 1975.— P. 100—112.
9. Карзанов А. В. Экономные реализации алгоритмов Эдмондсона нахождения паросочетаний максимальной мощности и максимального веса // Исследования по дискретной оптимизации / Под ред. А. А. Фридмана.— М. : Наука, 1976.— С. 306—327.
10. Gabow H. N. An efficient implementation of Edmonds' algorithm for maximum matching on graphs // J. Assoc. Comput. Mach.— 1976.— 23.— P. 221—234.

Поступила 26.11.84