Министерство высшего и среднего специального
образования РСФСР

Ярославский государственный университет

МОДЕЛИ И АЛГОРИТМЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К ОРГАНИЗАЦИИ РАБОТЫ В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

Межвузовский тематический сборник

Ярославль 1984

УДК 519.17

А.В.Карзанов

СЕМЕЙСТВА ЦЕПЕЙ С MFMC-СВОЙСТВОМ

В теории комбинаторной оптимизации важное место занимают задачи о максимальной упаковке заданного семейства подмножеств (объектов) некоторого множества. Как правило, эффективный алгоритм решения такой задачи удается построить в тех случаях, когда для нее имеется специальное ~~максимальное~~ минимаксное соотношение. Одно из распространенных минимаксных соотношений выглядит так: величина максимальной упаковки равна минимуму весов подмножеств, блокирующих (т.е. пересекающих) все объекты данного семейства. Если такое соотношение выполняется при любых неотрицательных весах элементов основного множества, говорят, что семейство обладает MFMC-свойством; это свойство имеют, например, семейства в задачах Менгера, Дилуорса, в задаче Эдмонса о ветвлениях и др. (термин "MFMC-свойство", или *max-flow-min-cut*-свойство" был введен Сеймуром [1] для класса семейств, удовлетворяющих аналогу теоремы Форда-Фалкерсона о максимальном потоке и минимальном разрезе).

В работе мы исследуем на наличие MFMC-свойства семейства цепей неориентированных графов, фигурирующие в задачах о многопродуктовых потоках. Доказывается, что в широком классе графов таким свойством обладают только семейства в задачах о максимальном двухпродуктовом потоке и о максимальном многополюсном однопродуктовом потоке. Для таких семейств минимальным блокирующим множеством является определенный разрез графа. Следует подчеркнуть сходство и различие результатов данной работы и работы [2]: в последней дается описание семейств цепей в задачах о многопродуктовых потоках, для которых величина максимальной упаковки определяется линейной комбинацией минимальных разрезов, а в данной работе - лишь некоторым одним разрезом.

Пусть $G=(V,E)$ - неориентированный граф, для наших целей достаточно рассматривать связный граф без петель и кратных ребер. Ребро с концевыми вершинами x и y будем обозначать xy. Цепью графа G будем считать непустое подмножество его ребер вида $L=\{x_1x_2, x_2x_3, \dots, x_{k-1}x_k\}$, где все вершины $x_1, x_2, \dots, x_k$ различны; пара "концевых" вершин $\{x_1, x_k\}$ цепи L обозначается eL. Для пары различных вершин $\{s,t\}$, пусть $\mathcal{F}^{st}$ обозначает множество всех цепей L в G, для которых $eL=\{s,t\}$.

Пусть $\mathcal{U}=\{(s_i,t_i): i=1,\dots,k\}\ (s_i\neq t_i)$ - некоторое множество различных пар вершин в G, и пусть $\mathcal{F}^{\mathcal{U}}$ обозначает семейство цепей $\mathcal{F}^{s_1t_1}\cup\mathcal{F}^{s_2t_2}\cup\dots\cup\mathcal{F}^{s_kt_k}$. Для заданной функции весов (или пропускных способностей) ребер $c: E\to R_+$ (R_+ - множество неотрицательных вещественных чисел) функция $f:\mathcal{F}^{\mathcal{U}}\to R_+$ называется c-<u>упаковкой</u>, если

$$\xi^f(xy)\overset{\text{def}}{=}\sum(f(L): xy\in L\in\mathcal{F}^{\mathcal{U}})\le c(xy)\quad\forall xy\in E.$$

Число $1\cdot f=\sum(f(L): L\in\mathcal{F}^{\mathcal{U}})$ называется <u>величиной</u> упаковки f; c-упаковка считается максимальной, если ее величина - максимально возможная, эту величину обозначим $p(\mathcal{F}^{\mathcal{U}}, c)$.

Подмножество $B\subseteq E$ называется <u>блокирующим</u> для $\mathcal{F}^{\mathcal{U}}$, если $B\cap L\neq\emptyset$ для любого $L\in\mathcal{F}^{\mathcal{U}}$. Совокупность $\mathcal{B}(\mathcal{F}^{\mathcal{U}})$ всех минимальных по включению блокирующих множеств для $\mathcal{F}^{\mathcal{U}}$ в соответствии с общим определением в [3] будем называть <u>блокером</u> семейства $\mathcal{F}^{\mathcal{U}}$. Для произвольного $E'\subseteq E$ пусть $c(E')$ обозначает величину $\sum(c(xy): xy\in E')$. Если f - c-упаковка и $B\in\mathcal{B}(\mathcal{F}^{\mathcal{U}})$, то

$$1\cdot f\le\sum(f(L)|L\cap B|: L\in\mathcal{F}^{\mathcal{U}})=\sum(\xi^f(xy): xy\in B)\le c(B),\quad (1)$$

следовательно,

$$p(\mathcal{F}^{\mathcal{U}}, c)\le\min\{c(B): B\in\mathcal{B}(\mathcal{F}^{\mathcal{U}})\}.\quad (2)$$

Следуя общему определению в [1], скажем, что семейство $\mathcal{F}^{\mathcal{U}}$ обладает слабым MFMC-свойством, или просто MFMC-свойством, если неравенство (2) обращается в равенство для любой функции $c: E\to R_+$.

Для подмножества вершин $X\subset V$ множество ребер в G с одним концом в X и другим в $V-X$ называется <u>разрезом</u> и обозначается ∂X. Скажем, что разрез ∂X <u>рассекает</u> множество пар $\mathcal{U}$ (обозначение $\partial X\# \mathcal{U}$), если для каждой пары $\{s,t\}\in\mathcal{U}$ множеству X принадлежит ровно один из элементов s и t. Очевидно, всякий разрез, рассекающий $\mathcal{U}$, является блокирующим множеством для $\mathcal{F}^{\mathcal{U}}$, таким образом,

$$p(\mathcal{F}^{\mathcal{U}}, c) \le \min\{c(\partial X): X \subset V, \partial X \# \mathcal{U}\} \qquad (3)$$

и если (3) обращается в равенство, то обращается в равенство и (2). Пусть $T^{\mathcal{U}}$ – множество вершин в G, входящих в какие-либо пары в $\mathcal{U}$ (эти вершины назовем <u>полюсами</u>), и пусть $S^{\mathcal{U}}(T^{\mathcal{U}}, E^{\mathcal{U}})$ – граф, ребра которого соответствуют парам в $\mathcal{U}$. Известны два вида семейств $\mathcal{F}^{\mathcal{U}}$, для которых (3) обращается в равенство при любой функции $c \geq 0$: (а) $S^{\mathcal{U}}$ – полный двудольный граф, т.е. $T^{\mathcal{U}}$ допускает разбиение (T', T''), такое, что $E^{\mathcal{U}} = \{st: s \in T', t \in T''\}$ (в этом случае задача о максимальной c-упаковке тривиально сводится к задаче о максимальном потоке, см., например, [4]); (б) $|\mathcal{U}| = 2$ (см. [5]). Мы доказываем, что этими двумя случаями, вообще говоря, исчерпывается список семейств $\mathcal{F}^{\mathcal{U}}$, обладающих MFMC-свойством.

<u>Теорема</u>. Пусть для графа G и множества пар $\mathcal{U}$ выполняется: (i) G содержит ребро st для любых двух полюсов $s, t \in T^{\mathcal{U}}$ и (ii) G содержит дерево H, множество висячих вершин которого (т.е. вершин, инцидентных ровно одному ребру в H) есть $T^{\mathcal{U}}$. Тогда, если семейство $\mathcal{F}^{\mathcal{U}}$ имеет MFMC-свойство, то $|\mathcal{U}| = 2$ или $S^{\mathcal{U}}$ – полный двудольный граф.

<u>Доказательство</u>. Докажем сначала следующее утверждение:

I) Пусть в $T^{\mathcal{U}}$ есть три попарно непересекающихся подмножества T_1, T_2, T_3, таких, что для каждых двух из них T_i и T_j найдется $\{s, t\} \in \mathcal{U}$ с $s \in T_i$ и $t \in T_j$ и нет пар $\{s', t'\} \in \mathcal{U}$, целиком принадлежащих какому-либо множеству T_i. Тогда $\mathcal{F}^{\mathcal{U}}$ не имеет MFMC-свойства.

Выберем такие полюса $s_i, t_i \in T_i$ $(i = 1, 2, 3)$, что $\{s_1, t_2\}, \{s_2, t_3\}, \{s_3, t_1\}$ – пары в $\mathcal{U}$, и пусть $T' \subseteq T^{\mathcal{U}}$ – множество этих полюсов ($3 \le |T'| \le 6$, поскольку для некоторых i может быть $s_i = t_i$). Пусть L_i $(i = 1, 2, 3)$ – цепь в дереве H с $eL_i = \{s_i, t_{i+1}\}$ (мы полагаем $t_4 = t_1$) и W – подмножество ребер в $L_1 \cup L_2 \cup L_3$, инцидентных каким-либо полюсам в T'. В дереве H выберем некоторую невисячую вершину z (такая вершина имеется ввиду $|T^{\mathcal{U}}| \geq 3$); тогда $z \notin T^{\mathcal{U}}$. Пусть $L(s)$ $(s \in T')$ обозначает цепь в H,

соединяющую s и z, т.е. $eL(s) = \{s, z\}$. Положим $W' = \bigcup (L(s): s \in T') - W$ и $W'' = \{s_i t_i : i = 1, 2, 3, s_i \ne t_i\}$ (согласно условию (i) теоремы $s_i t_i$ – ребро в G при $s_i \ne t_i$). Очевидно, $L_i \subseteq L(s_i) \cup L(t_{i+1})$, и из условия (ii) теоремы следует, что $W \cap W'' = \emptyset$ и L_i содержит ровно два ребра из W ("начальное" и "конечное").

Зададим функцию c на E как: $c(xy) = d$, если $xy \in W$ и xy принадлежит d цепям из L_1, L_2, L_3 (очевидно, $1 \le d \le 2$); $c(xy) > 3$, если $xy \in W' \cup W''$; $c(xy) = 0$ – для остальных ребер в G. Определим функцию f как $f(L_i) = 1$ $(i = 1, 2, 3)$ и $f(L) = 0$ для остальных цепей L в $\mathcal{F}^{\mathcal{U}}$. Нетрудно убедиться, что f – максимальная c-упаковка. Предположим теперь, что $\mathcal{F}^{\mathcal{U}}$ имеет MFMC-свойство, и пусть $B \in \mathcal{B}(\mathcal{F}^{\mathcal{U}})$ – блокирующее множество, для которого $c(B) = 1 \cdot f = 3$. Тогда $|B \cap L_i| = 1$ $(i = 1, 2, 3)$ и для каждого ребра $xy \in B$ справедливо $\xi^f(xy) = c(xy)$ (см. выражение (I), в котором все неравенства должны обращаться в равенства). Отсюда, ввиду очевидного $\xi^f(xy) < c(xy)$ для $xy \in W' \cup W''$ имеем $B \cap (W' \cup W'') = \emptyset$, т.е. из $xy \in B$ и $c(xy) > 0$ следует $xy \in W$. Следовательно, для каждого $i = 1, 2, 3$, одна из цепей $L(s_i), L(t_{i+1})$ не пересекается с B, а другая имеет ровно одно ребро из B. Из этого можно заключить, что найдутся такие различные i, j и полюса $p \in \{s_i, t_i\}$, $q \in \{s_j, t_j\}$, для которых $(L(p) \cup L(q)) \cap B = \emptyset$; пусть, для определенности, $i = 1$, $j = 2$. Но множество ребер $L(p) \cup L(q) \cup W''$ содержит цепь $L' \in \mathcal{F}^{\mathcal{U}}$, соединяющую s_1 и t_2. Таким образом, $L' \cap B = \emptyset$, и это противоречие доказывает утверждение I.

Покажем теперь, что любой элемент $B \in \mathcal{B}(\mathcal{F}^{\mathcal{U}})$ является разрезом. Для $s \in T^{\mathcal{U}}$ пусть X_s обозначает множество вершин компоненты связности графа $(V, E - B)$, содержащей s. Положим $T_s = X_s \cap T^{\mathcal{U}}$. Для любых двух полюсов $s', t' \in T_s$ справедливо $\{s', t'\} \notin \mathcal{U}$, поскольку в противном случае B не пересекалось бы с цепью $[s't'] \in \mathcal{F}^{\mathcal{U}}$. Далее, для любых $s, t \in T^{\mathcal{U}}$: если $X_s \ne X_t$ (и, значит, $X_s \cap X_t = \emptyset$), то найдется пара $\{s', t'\} \in \mathcal{U}$, для которой $s' \in T_s$ и $t' \in T_t$ (иначе множество $B - \{st\}$ также было бы блокирующим для $\mathcal{F}^{\mathcal{U}}$, вопреки минимальности B). Наконец, если B не является разрезом то найдутся три полюса s, t, p, для которых множества T_s,

T_t и T_p попарно не пересекаются; применяя к ним утверждение I, получаем, что $\mathcal{F}^{\mathcal{U}}$ не имеет $MFMC$ -свойства.

Поскольку разрез $\partial X \in \mathcal{B}(\mathcal{F}^{\mathcal{U}})$ рассекает $\mathcal{U}$, граф $S^{\mathcal{U}}$ является двудольным. Пусть $|\mathcal{U}| > 2$. Надо доказать, что $S^{\mathcal{U}}$ – полный двудольный граф. Предположим, что это не так. Тогда, как легко показать, найдется такая последовательность различных полюсов $s_0, s_1, \ldots, s_{m-1}$, что цикл $J = \{s_0 s_1, s_1 s_2, \ldots, s_{m-1} s_0\}$ содержит ровно три ребра из $E^{\mathcal{U}}$ и из любых двух последовательных ребер $s_{i-1} s_i$, $s_i s_{i+1}$ по крайней мере одно принадлежит $E^{\mathcal{U}}$ (индексы берутся по модулю m). Пусть $J \cap E^{\mathcal{U}} = \{s_i s_{i+1}, s_j s_{j+1}, s_z s_{z+1}\}$. Зададим функцию c как $c(xy) = 1$ $(xy \in J)$ и $c(xy) = 0$ $(xy \in E - J)$. Определим функцию f как $f(\{s_i s_{i+1}\}) = f(\{s_j s_{j+1}\}) = f(\{s_z, s_{z+1}\}) = 1$ и $f(L) = 0$ для остальных цепей L в $\mathcal{F}^{\mathcal{U}}$. Легко видеть, что f – максимальная c -упаковка. Пусть $\partial X \in \mathcal{B}(\mathcal{F}^{\mathcal{U}})$ – разрез, для которого $c(\partial X) = 1 \cdot f$. Но $1 \cdot f = 3$ и, следовательно, величина $|J \cap \partial X| = c|\partial X|$ – нечетна, что невозможно. Теорема доказана.

Следует отметить, что при нарушении условия (i) или (ii) утверждение теоремы может быть неверным. Рассмотрим, например, граф $G = (V, E)$ с $V = \{s, t, p, q, x\}$ и $E = \{st, tp, pq, sx, tx, px, qx\}$ и множество пар $\mathcal{U} = \{\{s, t\}, \{t, p\}, \{p, q\}\}$ (для этих G и $\mathcal{U}$ выполнено условие (ii), но нарушено условие (i)). Можно проверить, что данное семейство $\mathcal{F}^{\mathcal{U}}$ имеет $MFMC$ -свойство, в то же время $|\mathcal{U}| = 3$, и $S^{\mathcal{U}}$ не является полным двудольным графом.

Литература

I. Seymour P.D. The matroids with the max-flow min-cut property, J. Combinatorial Theory (B), 23 (1977), No 2-3, 189-222.

2. Карзанов А.В., Ломоносов М.В. Системы потоков в неориентированных сетях. – В кн.: Математическое программирование. Проблемы социальных и экономических систем. Вып.I. М.: ВНИИСИ, 1978, с. 59-66.

3. Edmonds J. and Fulkerson D.R. Bottleneck extrema, J. Combinatorial Theory, 8 (1970), 299-306

4. Адельсон-Вельский Г.М., Диниц Е.А., Карзанов А.В. Потоковые алгоритмы. – М.: Наука, 1975.

5. Hu T.C. Multi-commodity network flows, Oper. Research, 11 (1963), 344-360.

ВНИИСИ

СОДЕРЖАНИЕ

Бондаренко В.А., Карлин А.К. Оценка надежности комплекса программ методом искусственного внесения ошибок 3

Короткин А.А., Мунилова Л.С. Самоорганизующиеся поисковые деревья 9

Абросимова Т.Г., Белов Ю.А. Замечание о толщине 3-многогранников I7

Кельманс А.К. Об отображениях ребер графов, сохраняющих подграфы заданного вида I9

Гайнуллин В.Р. Об эффективности алгоритмов обмена между сверхоперативной и оперативной памятью для независимой модели 30

Васильчиков В.В. Приближенные модели функционирования МПС с мультишиной 33

Дмитриев А.Г. Методы автоматической сегментации сложных кривых (обзор литературы) 40

Грязнухин А.П., Бадин Н.М. Оптимизация времени выполнения программ специального вида при конвейерной обработке 53

Гремнев С.Н. О планировании вычислений над регулярными структурами данных 57

Маматов Ю.А., Булычев С.Ф. Условное среднее время ожидания в системе М/М/2 с распределительным алгоритмом кругового опроса 65

Карзанов А.В. Семейства цепей с $MFMC$ -свойством. . . 80

Панов С.Ю. Минимизация времени выполнения линейных программ для ЭВМ с независимыми устройствами ввода данных и вычислений 85

Алещенко Б.М., Мороз П.А., Пендюр А.Д., Цитович И.И. Исследование одной непрерывной допредельной модели диффузионного процесса с разрывными коэффициентами диффузии 99

Борискин А.А., Тимашев А.В. Оценка эффективности конвейерной системы с учетом взаимодействий между процессорами . . I08

Першин Р.А. О связи времени обработки с объемом буфера при параллельном вводе и обработке II7

Маматов Ю.А., Карлин А.К., Панов С.Ю., Булычев С.Ф., Гарбер И.В. Условная векторно-конвейерная вычислительная машина "Вектор-I" I2I

Св. план. I984 , поз. 494

МОДЕЛИ И АЛГОРИТМЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ
К ОРГАНИЗАЦИИ РАБОТЫ В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

Межвузовский тематический сборник
Под редакцией
кандидата технических наук
ЮРИЯ АЛЕКСАНДРОВИЧА М А М А Т О В А

Технический редактор М.Д.Ляпина
Корректор Т.В.Яблокова
Подписано в печать I8.07.84. АК07884. Формат 60х84 I/I6.
Бумага газетная. Офсетная печать.Усл.печ.л.7,90 Уч.-изд.л. 7,65.
Тираж 500. Заказ I5I5. Цена 88коп.

Редакционно-издательский отдел Ярославского государственного университета. Ярославль, ул. Советская, I4. Типография Ярославского политехнического института.Ярославль, ул.Советская, I4а
Отпечатано на ротапринте