ДОКЛАДЫ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

1983

ТОМ 269 № 5

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

Доклады Академии наук СССР
1983. Том 269, № 5

УДК 519.95

МАТЕМАТИКА

А.В. КАРЗАНОВ

КОМБИНАТОРНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА ЗАДАЧ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С СУБМОДУЛЯРНЫМИ МАТРИЦАМИ

(Представлено академиком Л.В. Канторовичем 9 VII 1982)

Рассматривается задача целочисленного программирования с $\{0, \pm 1\}$-матрицей, векторы-строки которой соответствуют определенной части абстрактной структуры и удовлетворяют условиям субмодулярности и плотности. Частными случаями такой задачи являются известные задачи на графах и структурах, предложенные Эдмондсом–Джайлсом, Хоффманом–Шварцем и Гришухиным. Предлагается комбинаторный алгоритм построения оптимального решения, если известно некоторое ее допустимое решение.

1. Пусть L – произвольная конечная структура [1]. Элементы $\alpha, \beta \in L$ считаются трансверсальными (обозначение $\alpha \nparallel \beta$), если $\{\alpha \wedge \beta, \alpha \vee \beta\} \cap \cap \{0, 1, \alpha, \beta\} = \phi$, где 0 (1) – минимальный (максимальный) элемент в L, и считаются параллельными (обозначение $\alpha \parallel \beta$) в противном случае. Подмножество $S \subset L$ называется квазиструктурой, если:

1) $0, 1 \notin S$;

2) $\alpha, \beta \in S$, $\alpha \nparallel \beta \Rightarrow \alpha \wedge \beta, \alpha \vee \beta \in S$;

3) $\alpha, \beta, \gamma \in S$: $\alpha \wedge \beta = \alpha \wedge \gamma = 0 \Rightarrow \alpha \wedge (\beta \vee \gamma) = 0$, $\alpha \vee \beta = \alpha \vee \gamma = 1 \Rightarrow \Rightarrow \alpha \vee (\beta \wedge \gamma) = 1$, $\alpha \wedge \beta = 0$, $\beta \vee \gamma = 1 \Rightarrow \alpha \leqslant \gamma$.

Пусть E – некоторое конечное множество и $A = (a_\alpha^e)$ – $(S \times E)$-матрица с коэффициентами 0, 1 и –1, векторы-строки которой обозначаются $a_\alpha, \alpha \in S$, а векторы-столбцы a^e, $e \in E$. Рассматривается пара двойственных друг другу задач линейного программирования:

(I) $\quad \{cx \to \min: x \in \mathbf{R}^E,\ b_0 \leqslant x \leqslant b_1,\ Ax \geqslant d\}$;

(II) $\quad \{yd + z_0 b_0 - z_1 b_1 \to \max: y \in \mathbf{R}^S, z_0, z_1 \in \mathbf{R}^E, y, z_0, z_1 \geqslant 0,\ yA + z_0 - z_1 = c\}$,

где c, b_0, b_1, A, d удовлетворяют совокупности следующих условий:

(C1) $b_0, b_1, c \in \mathbf{R}^E$ и $b_0 \leqslant b_1$;

(C2) A – субмодулярная (по строкам) матрица, т.е. $\alpha, \beta \in S$, $\alpha \nparallel \beta \Rightarrow \Rightarrow a_\alpha + a_\beta \geqslant a_{\alpha \wedge \beta} + a_{\alpha \vee \beta}$;

(C3) $d \in \mathbf{R}^S$ – супермодулярная функция, т.е. $\alpha, \beta \in S, \alpha \nparallel \beta \Rightarrow d(\alpha) + d(\beta) \leqslant \leqslant d(\alpha \wedge \beta) + d(\alpha \vee \beta)$;

(C4) $b_0(e) \geqslant 0$ для всех $e \in \hat{E}$, где $\hat{E} = \{e \in E: \exists \alpha, \beta \in S\ (\alpha \nparallel \beta, a_\alpha^e + a_\beta^e > > a_{\alpha \vee \beta}^e + a_{\alpha \vee \beta}^e)\}$;

(C5) A – плотная матрица, т.е. для любого $e \in E$ справедливо

$$\alpha, \beta, \gamma \in S, \quad \alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma \Rightarrow a_\alpha^e a_\beta^e \geqslant a_\alpha^e a_\gamma^e \geqslant 0,$$

$$\alpha \leqslant \beta,\ \beta \wedge \gamma = 0 \text{ или } \alpha \geqslant \beta,\ \beta \vee \gamma = 1 \Rightarrow a_\alpha^e a_\beta^e \geqslant a_\alpha^e(-a_\gamma^e) \geqslant 0,$$

$$\alpha \wedge \beta = 0,\ \beta \vee \gamma = 1 \Rightarrow a_\alpha^e(-a_\beta^e) \geqslant a_\alpha^e a_\gamma^e.$$

Теорема. 1) *Если векторы* b_0, b_1 *и* d *целочисленные и если задача* (I) *имеет допустимое решение, то она имеет целочисленное оптимальное решение.*

2) *Если вектор* c *целочисленный и задача* (II) *имеет оптимальное решение, то она имеет и целочисленное оптимальное решение.*

Отметим, что матрица A не является, вообще говоря, вполне унимодулярной. Частными случаями задач (I), (II) и данной теоремы являются соответствующие задачи и теоремы работ [2–5]. В [2] L – это структура всех подмножеств вершин ориентированного графа (V, E), а a_α, $\alpha \in S$, – индикатор ребер разреза $(\alpha, V \setminus \alpha)$ (задачи в [2] обобщают ряд известных задач на графах, матроидах и полиматроидах). В [3, 4] A – это $\{0, 1\}$-матрица, а S – подструктура произвольной структуры или квазиструктура дистрибутивной структуры. Отметим, что для задач в [2] известны алгоритмы решения, трудоемкость которых полиномиальна от $|E|$ и линейна от $\eta(b_0, b_1) = \Sigma(b_1(e) - b_0(e) : e \in E)$, в то время как для задач в [3, 4] "хороших" алгоритмов известно не было.

2. Задача (II), очевидно, эквивалентна следующей задаче:

$$\text{(II}'\text{)} \quad \{yd + (c - yA)^+ b_0 - (yA - c)^+ b_1 :\ y \in \mathbf{R}^S,\ y \geqslant 0\},$$

где для $f \in \mathbf{R}^E$ значение f^+ определяется как $f^+(e) = \max\{0, f(e)\}$, $e \in E$.

Следующее утверждение конкретизирует соотношения дополняющей нежесткости для (I), (II$'$).

1°. *Планы* (*т.е. допустимые решения*) x *и* y *задач* (I), (II$'$) *оптимальны тогда и только тогда, когда справедливо*:

(A1) $x(e) > b_0(e) \Rightarrow ya^e \geqslant c(e)$;

(A2) $x(e) < b_1(e) \Rightarrow ya^e \leqslant c(e)$,

(A3) $y(\alpha) > 0 \Rightarrow a_\alpha x = d(\alpha)$.

Подмножество $D \subseteq S$, состоящее из попарно параллельных элементов, назовем параллельным; пусть $M = \max\{|D|\}$ по всем параллельным D в S. Доказательство теоремы следует из предлагаемого алгоритма. Он работает с целочисленными b_0, b_1, d и некоторым начальным целочисленным планом задачи (I) и находит целочисленный план x задачи (I) и план y задачи (II$'$) (целочисленный в случае целочисленности c), которые удовлетворяют (A1)–(A3). Считается, что S, A и d заданы неявно при помощи оракулов, перечисленных в конце статьи.

3. Под графом $G = (VG, EG)$ будем понимать ориентированный граф, в котором допускаются кратные ребра, но не петли. Для $w \in EG$ $t(w)$ $(h(w))$ обозначает начало (конец) ребра w. Последовательность $P = (v_0 w_0 v_1 \ldots w_{k-1} v_k)$ считается путем (циклом) в G, если $k \geqslant 1$, $v_i \in VG$, $i = 0, 1, \ldots, k$, $w_i \in EG$, $i = 0, 1, \ldots, k-1$, все v_i различны (различны, кроме $v_0 = v_k$) и $v_i = t(w_i)$, $v_{i+1} = h(w_i)$ либо $v_i = h(w_i)$, $v_{i+1} = t(w_i)$, $i = 0, 1, \ldots, k-1$; положим $EP = \{w_0, w_1, \ldots, w_{k-1}\}$, $EP^+ = \{w_i :\ t(w_i) = v_i\}$ и $EP^- = \{w_i :\ h(w_i) = v_i\}$. Слабосвязный граф G назовем квазидеревом, если любой его цикл C содержит ровно два ребра и либо $EC^+ = \phi$, либо $EC^- = \phi$; для $w \in EG$ пусть $EG^+(w)$ (соответственно $EG^-(w)$) обозначает множество ребер w' в $EG \setminus \{w\}$, для которых существует путь вида $(t(w), w, \ldots, w', v)$ (соответственно $(v, w', \ldots, w, h(w))$). Граф G называется ориентированным деревом с корнем r, $r \in VG$, или r-деревом, если для любого $v \in VG \setminus \{r\}$ существует и единствен путь $P = (r, \ldots, v)$ и при этом справедливо $EP^- = \phi$. Для $e \in E$ и $i \in \{-1, +1\}$ положим $S^i(e) = \{\alpha \in S :\ a^e_\alpha = i\}$. Для $S' \subseteq S$ положим $E_{S'} = \{e \in E :\ (S^1(e) \cup S^{-1}(e)) \cap S' \neq \phi\}$.

Для построения и обоснования алгоритма нужны следующие утверждения 2°–7° (2° и 4° следуют из аксиом структуры и квазиструктуры, 3° – из условия (C5), 6° и 7° – из условий (C2), (C3) и (C4)). В них D обозначает произвольное параллельное подмножество в S.

2°. *Для любого D существуют и единственны такие квазидерево $T_D = (VT_D, ET_D)$ и взаимно однозначное отображение ψ_D: $D \to ET_D$, что*:

а) *если $D = \phi$, то* $|VT_D| = 1$,

б) *для любого $\alpha \in D$ множество $ET_D^+(\psi_D(\alpha))$ совпадает с $\{\beta \in D$: $\beta > \alpha$ либо $\beta \wedge \alpha = 0$, $\beta \vee \alpha \neq 1\}$, а множество $ET_D^-(\psi_D(\alpha))$ – с $\{\beta \in D$: $\beta < \alpha$ либо $\beta \vee \alpha = 1$, $\beta \wedge \alpha \neq 0\}$.*

Для $\alpha \in D$ будем обозначать вершину $t(\psi_D(\alpha))$ $(h(\psi_D(\alpha)))$ через t_D^α (соответственно h_D^α).

3°. *Для каждого $e \in E_D$ существует и единственна такая упорядоченная пара (t_D^e, h_D^e) вершин в T_D, что $D \cap S^1(e) = \cup\, \psi^{-1}(EP^+)$ и $D \cap S^{-1}(e) = \cup\, \psi^{-1}(EP^-)$, где в объединениях участвуют все пути P с началом t_D^e и концом h_D^e.*

4°. *Пусть $\alpha, \beta, \gamma \in S$, $\alpha \nparallel \beta$, $\alpha \parallel \gamma$, $\beta \parallel \gamma$. Тогда $(\alpha \wedge \beta) \parallel \gamma$ и $(\alpha \vee \beta) \parallel \gamma$.*

Будем обозначать $\beta \parallel D$, если $\beta \parallel \alpha$ для всех $\alpha \in D$, и $\beta \nparallel D$ в противном случае.

5° (Следствие из 4°). *Пусть $\beta \nparallel D$, и пусть β последовательно преобразуется следующим образом: на очередном шаге выбирается произвольное $\alpha \in D$ такое, что $\alpha \nparallel \beta$, и полагается либо $\beta := \beta \wedge \alpha$, либо $\beta := \beta \vee \alpha$. Тогда не более чем через $|D|$ шагов мы получаем такое β, что $\beta \parallel D$.*

6°. *Пусть $E' \subseteq E$, $\tilde{x} \in \mathbf{R}^{E'}$, $b_0(e) \leqslant \tilde{x}(e)$ для всех $e \in E'$. Тогда функция $f(\alpha) = d(\alpha) - \Sigma(a_\alpha^e \tilde{x}(e)$: $e \in E')$, $\alpha \in S$, супермодулярная.*

Для произвольного плана x задачи (I) положим $Q_x = \{\alpha \in S$: $a_\alpha x = d(\alpha)\}$.

7°. *Пусть x – план задачи* (I), $\alpha, \beta \in Q_x$ *и* $\alpha \nparallel \beta$. *Тогда*: (а) $\alpha \wedge \beta, \alpha \vee \beta \in Q_x$; (б) *из* $x(e) > b_0(e)$ *следует* $a_\alpha^e + a_\beta^e = a_{\alpha\wedge\beta}^e + a_{\alpha\vee\beta}^e$.

4. Идея алгоритма. В процессе алгоритма имеются следующие текущие объекты: (а) целочисленный план x задачи (I), (б) параллельное подмножество $D \subseteq Q_x$, (в) вектор $p \in \mathbf{R}^{VT_D}$ (потенциалы вершин), причем если вектор c – целочисленный, то вектор p также целочисленный. Для p выполняется условие

(A4) $p(h_D^\alpha) - p(t_D^\alpha) \geqslant 0$ для всех $\alpha \in D$.

Определим векторы $\Delta p \in \mathbf{R}^E$ и $y^p \in \mathbf{R}^S$ как $\Delta p(e) = p(h_D^e) - p(t_D^e)$, $e \in E_D$, $\Delta p(e) = 0$, $e \in E \setminus E_D$, $y^p(\alpha) = p(h_D^\alpha) - p(t_D^\alpha)$, $\alpha \in D$; $y^p(\alpha) = 0$, $\alpha \in S \setminus D$. Вектор y^p считается текущим планом задачи (II′) (в силу (A4) имеем $y^p \geqslant 0$). Из 3° легко следует $y^p a^e = \Delta p(e)$ для всех $e \in E$, таким образом, соотношения (A1)–(A3) принимают вид

(A1′) $x(e) > b_0(e) \Rightarrow \Delta p(e) \geqslant c(e)$;

(A2′) $x(e) < b_1(e) \Rightarrow \Delta p(e) \leqslant c(e)$;

(A3′) $y^p(\alpha) > 0 \Rightarrow \alpha \in Q_x$.

В процессе алгоритма (A3′) автоматически выполняется, а (A1′) и (A2′) могут нарушаться. Для текущих x и p положим

$$H_0 = \{e \in E\colon x(e) > b_0(e)\}, \quad H_1 = \{e \in E\colon x(e) < b_1(e)\},$$

$$K_0 = \{e \in H_0\colon \Delta p(e) < c(e)\}, \quad K_1 = \{e \in H_1\colon \Delta p(e) > c(e)\}, \quad K = K_0 \cup K_1,$$

$$\epsilon(e) = x(e) - b_0(e),\ e \in K_0, \quad \epsilon(e) = b_1(e) - x(e),\ e \in K_1, \quad \epsilon(e) = 0,\ e \in E \setminus K.$$

Как только (A1′) и (A2′) окажутся выполненными (т.е. станет $K = \phi$), текущие x и y^p будут оптимальными (в соответствии с 1°) и алгоритм окончится. Алгоритм состоит из не более, чем $|E|$ этапов, в начале этапа в текущем K фиксируется произвольный элемент q. Этап работы с q состоит из не более, чем $b_1(q) - b_0(q)$ итераций. В результате каждой итерации $\epsilon(q)$ уменьшается не менее, чем на 1, а остальные $\epsilon(e)$, $e \in E \setminus \{q\}$, не возрастают. В начале алгоритма полагается $D := \phi$ (тогда $\Delta p \equiv 0$ и $y^p \equiv 0$).

Положим $Q_x(e) = Q_x \cap S^1(e)$ для $e \in K_0$ и $Q_x(e) = Q_x \cap S^{-1}(e)$ для $e \in K_1$.

О п и с а н и е и т е р а ц и и. Текущие объекты, измененные на шаге итерации, условимся отмечать штрихами (возвращаясь затем к прежним обозначениям). Индекс D в обозначениях объектов будет, как правило, опускаться.

Если в начале итерации имеет место $Q_x(q) \cap D \neq \phi$, то переходим к основной стадии итерации, иначе производим следующую процедуру.

П р о ц е д у р а I. Вычисляем величину $\lambda(q) = \max\{d(\alpha) - \Sigma(a^e_\alpha x(e):\ e \in E \setminus \{q\}):\ \alpha \in S\}$ и полагаем $x'(q) := \max\{b_0(q),\ \lambda(q)\}$, если $q \in K_0$, и $x'(q) := \min\{b_1(q),\ -\lambda(q)\}$, если $q \in K_1$ (очевидно, новое x продолжает быть планом и $\epsilon(q)$ не увеличивается). Если для нового x стало $\epsilon(q) = 0$, то итерация и этап оканчиваются. Если $\epsilon(q) > 0$ и $Q_x(q) \cap D \neq \phi$, то процедура оканчивается. Иначе произвольно выбираем элемент $\beta \in Q_x(q)$ и последовательно преобразуем его следующим образом: для текущего β выбираем $\alpha \in D$ такое, что $\alpha \nparallel \beta$, и заменяем β на такой элемент $\beta' \in \{\alpha \wedge \beta,\ \alpha \vee \beta\}$, что $\beta' \in Q_x(q)$ (существование такого β' при $q \in K_0$ следует из 7° (б), а при $q \in K_1$ – из условия (С2)). Согласно 5°, произведя не более $|D|$ преобразований, мы получаем такое $\beta \in Q_x(q)$, что $\beta \parallel D$. Полагаем $D' := D \cup \{\beta\}$.

О с н о в н а я с т а д и я. На стадии всегда будет выполнено $q \in E_D$ (это обеспечивается начальным условием $Q_x(q) \cap D = \phi$). Для текущих x, p, D положим $B_0 = \{e \in E_D \cap H_0:\ \Delta p(e) \leqslant c(e)\}$, $B_1 = \{e \in E_D \cap H_1:\ \Delta p(e) \geqslant c(e)\}$. Поскольку возможно $B_0 \cap B_1 \neq \phi$, то условимся обозначать через $B_0 \hat{\cup} B_1$ множество $\{e_0, \ldots, e_k, e'_0, \ldots, e'_{k'}\}$, где $B_0 = \{e_0, \ldots, e_k\}$, $B_1 = \{e'_0, \ldots, e'_{k'}\}$. Каждому $e \in B_0 \hat{\cup} B_1$ сопоставим ребро $u_D(e)$ с началом $\tilde{t}^e_D$ и концом $\tilde{h}^e_D$, где $\tilde{t}^e_D = h^e_D$, $\tilde{h}^e_D = t^e_D$, если $e \in B_0$, и $\tilde{t}^e_D = t^e_D$, $\tilde{h}^e_D = h^e_D$, если $e \in B_1$ (где t^e_D, h^e_D определены согласно 3°). Для текущего D положим $s_0 = \tilde{h}^q_D$, $s_1 = \tilde{t}^q_D$. Пару (e', e) элементов из $B_0 \hat{\cup} B_1$ назовем т а н д е м о м, если $\tilde{h}^{e'}_D = \tilde{t}^e_D$ и не существует такого $\beta \in Q_x \setminus D$, что $\beta \parallel D$ и $\tilde{h}^{e'}_{D'} = t^\beta_{D'}$, $\tilde{t}^e_{D'} = h^\beta_{D'}$, где $D' = D \cup \{\beta\}$. Для $F \subseteq B_0 \hat{\cup} B_1$ пусть $\Gamma = \Gamma_D(F)$ обозначает граф, порожденный множеством ребер $\{u_D(e):\ e \in F\}$ (если $F = \phi$, то полагается $\Gamma_D(F) = (\{s_0\},\ \phi)$). Скажем, что множество $F \subseteq B_0 \hat{\cup} B_1$ п р а в и л ь н о е, если Γ является s_0-деревом и для любого $e \in F$ пара $(\nu(\tilde{t}^e_D), e)$ является тандемом, где для $v \in V\Gamma$ $\nu(v)$ обозначает такое $e' \in F \cup \{q\}$, что $\tilde{h}^{e'}_D = v$.

Стадия заключается в последовательном расширении правильного множества F и преобразованиях D и p при помощи процедур II–IV и оканчивается, когда либо станет $\epsilon(q) = 0$, либо окажется $s_1 \in V\Gamma$ и $(\nu(s_1), q)$ – тандем. Вначале полагаем $F = \phi$.

П р о ц е д у р а II. Имеется такое $e \in B_0 \hat{\cup} B_1$, что $\tilde{t}^e \in V\Gamma$ и либо $\tilde{h}^e \notin V\Gamma$, либо $e = q$. Отыскивается такое $\beta \in Q_x \setminus D$, что $\beta \parallel D$ и $\tilde{t}^e_{D'} = h^\beta_{D'}$, $\tilde{h}^{e'}_{D'} = t^\beta_{D'}$, где $e' = \nu(\tilde{t}^e_D)$ и $D' = D \cup \{\beta\}$. Если такого β нет, то в случае $e = q$ стадия оканчивается, а в случае $e \neq q$ полагаем $F' := F \cup \{e\}$. Если β найдено, то полагаем $D' := D \cup \{\beta\}$, $p'(\tilde{t}^e_{D'}) := p'(\tilde{h}^e_{D'}) := p(\tilde{t}^e_D)$, пересчитывая B_0 и B_1 и не изменяя F (очевидно, в обоих вариантах новое F будет правильным).

П р о ц е д у р а III. Имеется такое $\alpha \in D$, что $p(t^\alpha) = p(h^\alpha)$, $h^\alpha \in V\Gamma$, $t^\alpha \notin V\Gamma$. Полагаем $D' := D \setminus \{\alpha\}$, и если в D нет такого α', что $\alpha \wedge \alpha' = 0$, $\alpha \vee \alpha' = 1$, то пересчитываем B_0 и B_1 и полагаем $p'(v) := p(t^\alpha_D)$, где v – вершина в $T_{D'}$, в которую склеиваются t^α_D и h^α_D при переходе от D к D'. F не изменяем. (Показывается, что для нового D множество F остается правильным, доказательство этого – наиболее трудоемкая часть обоснования алгоритма. Показывается также, что q продолжает принадлежать E_D.)

П р о ц е д у р а IV. Она применяется всякий раз, когда проведение процедур II и III невозможно. Полагаем $p'(v) := p(v)$, $v \in V\Gamma$, $p'(v) := p(v) + \delta$, $v \in VT_D \setminus V\Gamma$, где $\delta = \min\{\delta^q, \delta^D, \delta_0, \delta_1\}$ и

$$\delta^q = c(q) - \Delta p(q),\ \text{если}\ q \in K_0,\ \text{и}\ \delta^q = \Delta p(q) - c(q),\ \text{если}\ q \in K_1,$$

$$\delta^D = \min\{\Delta p(\alpha)\colon\ \alpha \in D,\ h^\alpha \in V\Gamma,\ t^\alpha \,\bar{\in}\, V\Gamma\},$$

$$\delta_0 = \min\{\Delta p(e) - c(e)\colon\ e \in E_D \cap H_0,\ h^e \in V\Gamma,\ t^e \,\bar{\in}\, V\Gamma\},$$

$$\delta_1 = \min\{c(e) - \Delta p(e)\colon\ e \in E_D \cap H_1,\ t^e \in V\Gamma,\ h^e \,\bar{\in}\, V\Gamma\},$$

и затем пересчитываем B_0 и B_1. Справедливо следующее утверждение.

8°. (а) $\delta > 0$. (б) *В K_0 и K_1 не возникает новых элементов.* (в) *Если $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1\}$ (соответственно $\delta = \delta^D$), то к новым p, B_0, B_1 и прежнему F может быть применена процедура* II (*соответственно* III).)

Если $\Delta p'(q) = c(q)$ (т.е. $\delta = \delta^q$), то итерация и этап оканчиваются. Иначе продолжаем стадию, применяя процедуры II, III и т.д. После окончания стадии (в случае $\epsilon(q) > 0$) выполняется процедура V, завершающая итерацию. Показывается, что последовательность процедур II, III между процедурами IV можно организовать таким образом, чтобы общее число процедур II–IV на стадии не превышало CM, где C – некоторая константа.

П р о ц е д у р а V (проводится в случае $\epsilon(q) > 0$, $s_1 \in V\Gamma$ и $(\nu(s_1), q)$ – тандем). Пусть P – путь в Γ с началом s_0 и концом s_1, и пусть $X = \{q\} \cup \{e\colon u(e) \in EP\}$, $X^+ = X \cap B_1$, $X^- = X \cap B_0$. Положим $x'(e) := x(e) + 1$, $e \in X^+$, $x'(e) := x(e) - 1$, $e \in X^-$.

Очевидно, $b_0 \leqslant x' \leqslant b_1$ и $\epsilon(e)$ не увеличивается для всех $e \in E$ и уменьшается для $e = q$. Если все еще $\epsilon(q) > 0$, то переходим к следующей итерации с тем же q и текущими D, x и p. Процедура V обосновывается следующим утверждением.

9°. (а) $a_\alpha x' = d(\alpha)$ *для всех* $\alpha \in D$. (б) $a_\beta x' \geqslant d(\beta)$ *для любого* $\beta \in S \setminus D$.

Доказательство (а) очевидное. Предположим, что $a_{\beta'} x' < d(\beta')$ для некоторого $\beta' \in S \setminus D$. Если $\beta' \nparallel \alpha$ для некоторого $\alpha \in D$, то, применяя 6° к x', β' и α, получаем, что $a_{\beta''} x' < d(\beta'')$ для некоторого $\beta'' \in \{\alpha \wedge \beta',\ \alpha \vee \beta'\}$. Тогда в силу 5° имеется такое $\beta \in S \setminus D$, что $a_\beta x' < d(\beta)$ и $\beta \parallel D$. Пусть $D' = D \cup \{\beta\}$. Из $a_\beta x' < d(\beta)$, 2° и 3° следует, что множество ребер $\{u_{D'}(e)\colon e \in X\}$ порождает путь $P' = (v, u_{D'}(e), \dots, u_{D'}(e'), v')$ $(EP'^- = \phi)$ такой, что $v = h^\beta_{D'}$, $v' = t^\beta_{D'}$. Но пара (e', e) образует тандем относительно D. Это противоречие доказывает (б).

С л о ж н о с т ь а л г о р и т м а. Число итераций алгоритма не более $\eta(b_0, b_1)$, а число шагов (применений процедур I–V) на каждой итерации $O(M)$. Каждый шаг требует $O(|E| + M)$ стандартных действий, кроме того, как может быть показано, на итерации для реализации процедур I, II и поддержания текущего E_D достаточно $O(|E|M)$ обращений к следующим оракулам: 1) для $e \in E$ и $\alpha \in S$ указать a^e_α; 2) для $\alpha, \beta \in S$ указать $\alpha \wedge \beta$ и $\alpha \vee \beta$; 3) для $E' \subsetneq E$, $\tilde{x} \in \mathbf{Z}^{E'}$, $b_0|_{E'} \leqslant \tilde{x} \leqslant b_1|_{E'}$, и супермодулярной функции $f(\alpha) = d(\alpha) - \Sigma(a^e_\alpha \tilde{x}(e)\colon e \in E')$, $\alpha \in S$ указать элемент $\beta \in S$ такой, что $f(\beta) = \max\{f(\alpha)\colon \alpha \in S\}$, и указать $f(\beta)$; 4) для $e', e \in B_0 \hat{\cup} B_1$, $\alpha', \alpha \in D$, $x \in \mathbf{Z}^E$, удовлетворяющих $a^{e'}_{\alpha'} \neq 0$, $a^e_\alpha \neq 0$, $b_0 \leqslant x \leqslant b_1$, в подструктуре L' элементов $\beta' \in S$ таких, что $\beta' \parallel \{\alpha', \alpha\}$, $\tilde{h}^{e'}_{D'} = t^{\beta'}_{D'}$, $\tilde{t}^{e'}_{D'} = h^{\beta'}_{D'}$, $(D' = \{\alpha', \alpha, \beta'\})$, для функции $f'(\beta') = d(\beta') - a_{\beta'} x$, $\beta' \in L'$, указать элемент

$\beta \in L'$ такой, что $f'(\beta) = \max\{f'(\beta'): \beta' \in L'\}$, и указать $f'(\beta)$. Таким образом, трудоемкость алгоритма $O(\eta(b_0, b_1)(M^2 + |E|M + |E|M\rho))$, где ρ – оценка трудоемкости оракулов. Можно показать, что если структура L дистрибутивная, то $M < 4\sigma$, где σ – число неприводимых элементов в L. Если, кроме того, матрица A модулярная, то оракулы 3) и 4) можно свести к процедурам, трудоемкость которых полиномиальна от $|E|$, σ и $\varphi = \log(|b_0| + |b_1| + \max\{|d(\alpha)|: \alpha \in S\})$ (для этого используется полиномиальный алгоритм максимизации супермодулярной функции на структуре подмножеств, включающий обращения к элементарным оракулам, см. [6]).

5. При целочисленных b_0, b_1, d существование допустимого целочисленного решения задачи (I) при условии существования допустимого решения этой задачи доказывается путем применения изложенного алгоритма к некоторому расширению (I′) задачи (I), матрица A' которой в общем случае имеет $|E| + |S|$ столбцов. Задача (I′) имеет стандартный целочисленный начальный план, а ее оптимальный план либо определяет допустимое решение задачи (I), либо показывает отсутствие такого решения. Это завершает доказательство теоремы.

Всесоюзный научно-исследовательский институт
системных исследований, Москва

Поступило
6 IX 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. *Биркхоф Г.* Теория структур. М.: ИЛ, 1952. 2. *Edmonds J., Ciles R.* – Ann. Disc. Math., 1977, № 1, p. 185–204. 3. *Hoffman A.J., Schwartz D.E.* In: Combinatorics. North–Holland. Amsterdam, 1978, p. 593–598. 4. *Grishuhin V.P.* – Math. Progr. 1981, vol. 21, p. 70–89. 5. *Frank A.* – Acta Sci. Math., 1979, vol. 41, p. 63–76. 6. *Grötschel M., Lovász L., Schrijver A.* – Combinatorica, 1981, vol. 1, № 2, p. 169–197.

УДК 517.988.8

МАТЕМАТИКА

Т.Х. КАРИМОВ

О НЕКОТОРЫХ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(Представлено академиком А.Н. Тихоновым 16 VII 1982)

1. Рассмотрим нелинейное операторное уравнение

$$(1) \qquad P(x) = 0$$

с непрерывным оператором P, действующим в вещественном гильбертовом пространстве H. Удобными и эффективными методами решения таких уравнений, не требующими обращения операторов, являются нестационарные итерационные методы (методы типа минимальных невязок, скорейшего спуска и др.), исследованию которых посвящено большое число работ, например [1–14]. Но вычисление итерационных параметров указанных методов сопряжено с определенными трудностями, в частности, для одних методов [1–10] приходится на каждом шаге итерации вычислять значения производной Гато $P'(x)$ оператора P; для других [11–14] – значения оператора разделенной разности $P(u, v)$ [15].