

ВСЕСОЮЗНЫЙ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ
СИСТЕМНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

КОМБИНАТОРНЫЕ МЕТОДЫ
В ПОТОКОВЫХ ЗАДАЧАХ

СБОРНИК ТРУДОВ

Выпуск 3

МОСКВА 1979

ПРЕДИСЛОВИЕ

Задачи о потоках в сетях составляют большой раздел математического программирования и имеют многочисленные приложения в сферах экономики и техники. К наиболее распространенным потоковым задачам относятся: 1) задача о максимальном (стационарном или динамическом) потоке, 2) задача о потоке минимальной стоимости и ее вариант — транспортная задача, 3) задачи о потоках многих продуктов. С математической точки зрения эти задачи допускают двоякую интерпретацию. С одной стороны, они обычно формулируются на языке линейного или линейного целочисленного программирования. С другой стороны, они могут рассматриваться как задачи об упаковках комбинаторных объектов определенного вида — как правило, путей или цепей, соединяющих некоторые полюса сети. Так, например, задача о максимальном потоке эквивалентна задаче о нахождении в данной сети упаковки максимальной мощности, состоящей из путей, ведущих из источника в сток; в сетевой транспортной задаче накладывается дополнительное условие: суммарная стоимость путей должна быть минимальна.

Двоякая интерпретация потоковых задач порождает различные подходы к их решению. Имеющиеся методы решения распадаются на две группы, между которыми, правда, нельзя провести четкой границы. Одну группу образуют алгоритмы, являющиеся переложениями общих методов линейного или линейного целочисленного программирования. Другую группу составляют алгоритмы, использующие разнообразные комбинаторные приемы и средства. В этих алгоритмах применяются способы локальной перестройки объектов текущей совокупности; сами совокупности обычно не отвечают базисам — вершинам соответствующих многогранников, а перестройки — преобразованиям базисов — движениям по ребрам. К таким, комбинаторным, методам можно отнести уже алгоритм Форда и Фалкерсона для задачи о максимальном потоке, несмотря на то, что в нем преобразуется функция, а не упаковка путей. Для решения ряда задач успешно применяются смешанные методы (например, для задачи о максимальном потоке минимальной стоимости).

Начальное развитие теории и методов решения потоковых задач затрагивало почти исключительно задачи об одном потоке. Эти задачи оказались подходящей областью для разработки и применения комбинаторных методов; к настоящему времени число созданных комбинаторных алгоритмов весьма велико, лучшие из них имеют высокую эффективность, как теоретическую, так и практическую, и, заметно превосходят «симплексные» методы. Обилие дискретных приложений,

богатство применяемых комбинаторных средств, а также имеющееся, как правило, свойство абсолютной целочисленности говорят о ярко выраженной комбинаторной природе задач об одном потоке.

В области задач о потоках многих продуктов (называемых в сборнике «мультипотоками» вместо громоздкого «многопродуктовые потоки») картина иная. Круг мультипотоковых задач, как и сфера их приложений, шире, чем для случая одного потока. До недавнего времени для их решения развивались почти исключительно «симплексные» методы, им посвящена обширная литература. Комбинаторный подход к задачам о мультипотоках наталкивается на значительные трудности, до сих пор не преодоленные для задач на ориентированных сетях. Комбинаторная природа мультипотоковых задач общего вида выражена довольно слабо, такие задачи по сложности приближаются к общим задачам линейного или линейного целочисленного программирования; характерно и то, что дробность решения «непрерывных» задач не ограничена. Существенным этапом в развитии комбинаторного подхода к задачам на неориентированных сетях явилось введение понятия «графа потоковых отношений» [1], или «потоковой схемы», выделяющего конфигурации пар полюсов, соединяющихся потоками, и введение классификации задач по типу потоковой схемы. Как оказалось, возможность комбинаторного решения зависит не столько от конкретной сети, сколько от вида потоковой схемы, причем число «продуктов» (ребер потоковой схемы) играет далеко не самую главную роль. В последнее время совокупность классов мультипотоковых задач, поддавшихся решению комбинаторными средствами, заметно расширилась. Задачи этих классов отличают ограниченная дробность решения (при целочисленных «пропускных способностях»), а также сравнительная простота двойственных препятствий. Как и для случая одного потока, теоретическая эффективность созданных комбинаторных методов оказалась более высокой, чем «симплексных». В настоящее время комбинаторная теория мультипотоков продолжает развиваться, и можно надеяться на получение новых результатов в этой области, важных как для практического решения задач, так и для теоретического изучения соответствующего раздела дискретной математики.

В предлагаемом сборнике наибольшее число работ посвящено задачам о мультипотоках (I, II, III, V, VIII, IX). В работе I проводится систематическое описание задач о мультипотоках и излагается группа комбинаторных методов, достаточных для решения классов задач, для которых двойственными препятствиями являются разрезы и их линейные комбинации. В работе II дается доказательство необходимости условий важной теоремы, касающейся полного описания классов разрезных задач о мультипотоках максимальной мощности. Изложению новых эффективных методов решения задачи о двух потоках и задачи о максимальном «свободном» мультипотоке посвящена работа V. В работе III исследуются возможности предварительной обработки сети и массового решения задач для случая сетей с 3, 4 и 5 полюсами. В работе VIII решается одна задача о мультипотоках с дополнительным условием целочисленности, задачи такого рода очень трудны для эффективного решения. Наконец, в работе IX приводится решение для обобщения транспортной задачи на мультипотоки — задачи о максимальном «свободном» мультипотоке минимальной стоимости; алгоритм этой работы является первым комбинаторным методом, разработанным для стоимостных мультипотоковых задач.

Работа IV посвящена классической задаче о максимальном потоке. Здесь излагается новый алгоритм решения этой задачи, имеющий

трудоемкость $O(n^3)$, а также приводятся результаты большого вычислительного эксперимента автора по сравнению практического быстродействия различных алгоритмов, решающих задачу о максимальном потоке. Работа VI имеет теоретический характер. В ней с новых позиций исследуется структура многогранника задачи о паросочетаниях — «ближайшего родственника» потоковых задач. Работа VII посвящена новому типу потоковых задач — задачам о «ветвлении», предложенным Дж. Эдмондсом. В этих задачах «пакуемым» объектом является не путь, как в обычных потоковых задачах, а ориентированное дерево, соответствующее передаче единицы информации от источника ко всем пунктам приема.

Обратим внимание читателя на устройство библиографических ссылок. Ввиду повторения многих ссылок в разных работах сборника вся литература вынесена в конец сборника и для нее введена единая нумерация арабскими цифрами. Кроме того, в отдельных статьях имеются ссылки на другие работы сборника, эти ссылки даются римскими цифрами в соответствии с порядком расположения статей в сборнике.

A. B. Карзанов

А. В. Карзанов

КОМБИНАТОРНЫЕ СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ РАЗРЕЗНЫХ ЗАДАЧ О МУЛЬТИПОТОКАХ

До недавнего времени основная масса задач о мультипотоках в сетях (обычно называемых многопродуктовыми потоками) поддавалась решению только при помощи общих методов линейного и целочисленного программирования. Комбинаторными методами, более эффективными и теоретически и практически, были охвачены лишь единичные задачи. В последнее время класс таких задач заметно расширился. Были выработаны новые приемы преобразования мультипотоков в неориентированных сетях, позволяющие строить мультипотоки с определенными свойствами и, как следствие, получать решение конкретных задач. С другой стороны, были получены качественные результаты, описывающие характер «узких мест» (двойственных препятствий) сети для различных задач о мультипотоках. Среди многообразия мультипотоковых задач на неориентированных сетях выделялись классы, наиболее подходящие для применения комбинаторных методов. В задачах этих классов требования накладываются только на функцию мощности потоков и функцию общей «нагрузки на магистрали»; двойственные препятствия в этих задачах — это метрики на ребрах сети.

Первая часть статьи (§ 1, 2) может рассматриваться как введение в комбинаторную теорию мультипотоков в неориентированных сетях. В § 1 даются основные определения, описываются эквивалентные способы задания мультипотоков (функциональная, цепная и треугольная формы) и вводятся естественные классы задач; § 2 посвящен доказательству теорем существования и двойственности для задач рассматриваемых типов. В этих теоремах вскрывается двойственность мультипотоков и конечных метрик на основе непосредственной двойственности метрик и элементов мультипотока, заданного в треугольной форме.

Вторая часть статьи посвящена изложению новых методов решения мультипотоковых задач. Эти методы позволяют решать массовые нестоимостные задачи разных типов, в которых ответ зависит только от препятствий Форда-Фалкерсона — разрезов и их линейных комбинаций (задачи такого рода получили название «разрезных»). В основе предлагаемых методов лежит решение вспомогательной задачи о построении мультипотоков с так называемыми запирающими свойствами. Для решения последней применяется метод преобразования мультипотоков — D -операция, обобщающая известные приемы перестройки потоков в мультипотоке вдоль «увеличивающих» путей (§ 3). Параллельно изложению алгоритмов в § 3, 5 приводятся теоретические результаты, в частности, дается полное описание классов разрезных задач

A. B. Карзанов

КОМБИНАТОРНЫЕ СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ РАЗРЕЗНЫХ ЗАДАЧ О МУЛЬТИПОТОКАХ

До недавнего времени основная масса задач о мультипотоках в сетях (обычно называемых многопродуктовыми потоками) поддавалась решению только при помощи общих методов линейного и целочисленного программирования. Комбинаторными методами, более эффективными и теоретически и практически, были охвачены лишь единичные задачи. В последнее время класс таких задач заметно расширился. Были выработаны новые приемы преобразования мультипотоков в неориентированных сетях, позволяющие строить мультипотоки с определенными свойствами и, как следствие, получать решение конкретных задач. С другой стороны, были получены качественные результаты, описывающие характер «узких мест» (двойственных препятствий) сети для различных задач о мультипотоках. Среди многообразия мультипотоковых задач на неориентированных сетях выделялись классы, наиболее подходящие для применения комбинаторных методов. В задачах этих классов требования накладываются только на функцию мощности потоков и функцию общей «нагрузки на магистрали»; двойственные препятствия в этих задачах — это метрики на ребрах сети.

Первая часть статьи (§ 1, 2) может рассматриваться как введение в комбинаторную теорию мультипотоков в неориентированных сетях. В § 1 даются основные определения, описываются эквивалентные способы задания мультипотоков (функциональная, цепная и треугольная формы) и вводятся естественные классы задач; § 2 посвящен доказательству теорем существования и двойственности для задач рассматриваемых типов. В этих теоремах вскрывается двойственность мультипотоков и конечных метрик на основе непосредственной двойственности метрик и элементов мультипотока, заданного в треугольной форме.

Вторая часть статьи посвящена изложению новых методов решения мультипотоковых задач. Эти методы позволяют решать массовые нестоимостные задачи разных типов, в которых ответ зависит только от препятствий Форда-Фалкерсона — разрезов и их линейных комбинаций (задачи такого рода получили название «разрезных»). В основе предлагаемых методов лежит решение вспомогательной задачи о построении мультипотоков с так называемыми запирающими свойствами. Для решения последней применяется метод преобразования мультипотоков — D -операция, обобщающая известные приемы перестройки потоков в мультипотоке вдоль «увеличивающих» путей (§ 3). Параллельно изложению алгоритмов в § 3, 5 приводятся теоретические результаты, в частности, дается полное описание классов разрезных задач

рассматриваемых типов. Одним из существенных результатов является описание класса разрезных задач о мультипотоках максимальной мощности. В § 4 излагается эффективный алгоритм построения мультипотока с «запирающими» свойствами, позволяющий эффективно решать ряд разрезных задач в произвольных неориентированных сетях.

§ 1. ОСНОВНЫЕ ТИПЫ ЗАДАЧ О МУЛЬТИПОТОКАХ

1. Определения и обозначения

В этой работе мы будем использовать следующие обозначения:

- $|A|$ — число элементов в конечном множестве A ;
- V — конечное множество вершин сети;
- T — множество полюсов, $T \subseteq V$;
- \bar{X} — множество $V \setminus X$, для $X \subseteq V$;
- 2^M — множество всех подмножеств множества M ;
- (x, y) — упорядоченная пара вершин $x, y \in V$, при $x \neq y$, называемая *дугой*;
- $[x, y]$ — неупорядоченная пара вершин $x, y \in V$, при $x \neq y$, называемая *ребром*;
- $\{(x, y); x, y \in X\}$, для $X \subseteq V$;
- $\{(x, y); x, y \in X, x \neq y\}$, для $X \subseteq V$;
- $\{[x, y]; x, y \in X\}$, для $X \subseteq V$;
- $\{[x, y]; x, y \in X, x \neq y\}$, для $X \subseteq V$;
- (X, Y) — множество всех пар (x, y) , где $x \in X, y \in Y$;
- $[X, Y]$ — множество всех пар $[x, y]$, где одна вершина принадлежит X , а другая — Y (при $X \cap Y = \emptyset$, $X \cup Y = V$, т. е. при $Y = \bar{X}$, множество дуг (X, Y) (соответственно, множество ребер $[X, Y]$) называется *упорядоченным разрезом* (соответственно, *разрезом*) на множестве V);
- \mathcal{E} — евклидово пространство всех действительно-значимых функций на $[V]^d$ (имеющее размерность $\frac{|V| \cdot (|V| - 1)}{2}$); среди самых важных для нас подмножеств в \mathcal{E} укажем:

 - \mathcal{E}_+ — замкнутый неотрицательный ортант в \mathcal{E} ;
 - \mathcal{M} — множество всех метрик в \mathcal{E} (определение см. в § 2);
 - \mathcal{F} — множество всех функций в \mathcal{E} , представляющих разрешимые задачи о допустимости (определение см. в § 2);
 - θ_A — индикатор множества $A \subseteq [V]^d$: $\theta_A(e) = 1$ при $e \in A$, $\theta_A(e) = 0$ при $e \in [V]^d \setminus A$;
 - $\text{supp}(g)$ — носитель функции $g \in \mathcal{E}$ — множество $\{e \in [V]^d; g(e) \neq 0\}$;
 - $g^+; g^+(e) = \max\{g(e), 0\}$, $e \in [V]^d$ — для $g \in \mathcal{E}$;
 - $g^-; g^-(e) = |\min\{g(e), 0\}|$, $e \in [V]^d$ — для $g \in \mathcal{E}$ (таким образом $\text{supp}(g^+) \cap \text{supp}(g^-) = \emptyset$, $g = g^+ - g^-$);
 - $g \cdot h = \sum_{e \in [V]^d} g(e) \cdot h(e)$ — скалярное произведение функций $g, h \in \mathcal{E}$;
 - c — функция пропускной способности ребер — $c \in \mathcal{E}_+$;
 - d — функция требований на мощности потоков — $d \in \mathcal{E}_+$;
 - ρ_X — индикатор разреза $[X, \bar{X}]$, т. е. функция $\theta_{[X, \bar{X}]}$;
 - $a[X, Y]$ — величина $\sum_{e \in [X, Y]} a(e)$, для $a \in \mathcal{E}$, $X, Y \subseteq V$, $X \cap Y = \emptyset$;
 - $c(X)$ — величина, равная $\min_{Z \subseteq V} \{c[Z, \bar{Z}]\}$, где $Z \subseteq V$, $Z \cap T = X$, для $X \subseteq T$ (минимальная пропускная способность разреза сети, разделяющего X и $T \setminus X$);

$N = (V, T; c)$ — (неориентированная) сеть — объект, состоящий из множества вершин V , множества полюсов T и функции пропускной способности c ;

$S = (T, U)$ — (потоковая) схема (определение в п. 5) — граф с множеством вершин T и множеством ребер $U \subseteq [T]$.

Для дуги $e = (x, y) \in (V)^d$ может использоваться обозначение \vec{e} .

2. Цепи и пути

В дальнейшем мы будем пользоваться распространенными терминами «ориентированная цепь», «цепь» и «путь». Уточним их смысл. *Ориентированной цепью* называется чередующаяся последовательность вершин и ребер вида $L = (x_0, e_0, x_1, e_1, \dots, x_{k-1}, e_{k-1}, x_k)$, где $x_i \in V$, $i \in 0, k$, и $e_i = [x_i, x_{i+1}] \in [V]^d$. Вершина x_0 называется началом, вершина x_k — концом, а x_1, x_2, \dots, x_{k-1} — промежуточными вершинами в L . Длиной L считается число ребер $k-1$. Если в ориентированной цепи L все ребра различные, то она называется *простой по ребрам*, или *реберно-простой*, если же различны все вершины, кроме, может быть, x_0 и x_k , то L называется *простой* ориентированной цепью. Ориентированная цепь L с совпадающими началом и концом называется *замкнутой*, или *ориентированным циклом* (при этом в каждом случае из контекста будет следовать, фиксируется ли вершина $x_0 = x_k$ в качестве отмеченной вершины — начала цикла — или нет), если к тому же цепь L — простая, то она называется простым ориентированным циклом. Заметим, что цикл $L = (x, e, y, e, x)$ (цикл длины два) также считается простым. Говорят, что ориентированная цепь $\bar{L} = (y_0, u_0, y_1, u_1, \dots, u_{k-1}, y_k)$ обратна ориентированной цепи L , если $y_j = x_{k-j}$, $j \in 0, k$. Рассматривая L и \bar{L} как один и тот же объект, мы приходим к понятию *цепи*. Среди цепей также выделяются реберно-простые и простые цепи, а также циклы и простые циклы.

Путь — это чередующаяся последовательность вершин и дуг вида $P = (x_0, (x_0, x_1), x_1, (x_1, x_2), \dots, (x_{k-1}, x_k), x_k)$. Простые (соответственно, простые по дугам) пути — это пути с неповторяющимися вершинами (соответственно, дугами). Понятие пути близко понятию ориентированной цепи (переход осуществляется заменой дуги соответствующим ребром или наоборот). Заметим однако, что ориентированная цепь, соответствующая простому по дугам пути, необязательно является реберно-простой. Пути с совпадающим началом и концом считаются замкнутыми путями, или *контурами*.

То обстоятельство, что некоторые элементы a, b, \dots, c , каждый из которых может быть либо вершиной либо ребром, расположены в указанном порядке на ориентированной цепи L (с началом x_0 и концом x_k), считая от x_0 к x_k , будем обозначать символом $\langle x_0, a, b, \dots, c, x_k \rangle_L$; если ориентированная цепь не является простой, эта запись означает наличие в L представителей a, b, \dots, c , следующих в указанном порядке. Аналогичные символы применяются и для цепей и путей. Обозначение цепи L , ориентированной цепи L и пути P может сопровождаться указанием их крайних вершин (x_0 и x_k), в этом случае будет записано, соответственно, $L(x_0, x_k)$, $L(x_0, x_k)$, $P(x_0, x_k)$. Если цепь $L = L[x_0, x_k]$ уже определена, то ее отрезок, заключенный между вершинами x и y , обозначается через $L[x, y]$ (если L — не простая цепь, то в тех случаях, когда нами применяется обозначение $L[x, y]$, двусмысленности не возникает). *Произведением* цепей $L = L[r, s]$ и $J = J[s, t]$ (с общим концом s) называется цепь $K = K[r, t] = L \cdot J$, получающаяся сращива-

нием L и J в конечной вершине s . Обозначение отрезка и понятие произведения используются также для ориентированных цепей и путей.

Будем обозначать через \mathcal{L}_{st} , $\vec{\mathcal{L}}_{st}$, \mathcal{P}_{st} , \mathcal{C} , \mathcal{K} , соответственно, множества цепей с концами s и t , ориентированных цепей с началом s и концом t , путей с началом s и концом t , циклов, контуров на множестве V . Через $S\mathcal{L}_{st}$, $\vec{S}\mathcal{L}_{st}$, $S\mathcal{P}_{st}$, $S\mathcal{C}$, $S\mathcal{K}$ будем обозначать подмножества простых объектов соответствующих множеств.

3. Двухполюсный поток

Двухполюсным потоком, или просто *потоком* на V , называется неотрицательная функция f , определенная на $(V)^d$ и удовлетворяющая условию *сохранения*

$$\operatorname{div}_f(x) \equiv \sum_{y \in V \setminus \{x\}} (f(x, y) - f(y, x)) = 0 \quad (1.1)$$

для всех вершин $x \in V$, кроме, быть может, двух, которые в этом случае называются *полюсами* потока f . Полюс s потока f , для которого $\operatorname{div}_f(s) > 0$, называется *источником* f , тогда как другой — t , для которого $\operatorname{div}_f(t) < 0$, называется *стоком* f . Неотрицательная величина

$$\|f\| \equiv \operatorname{div}_f(s) = -\operatorname{div}_f(t)$$

называется *мощностью* потока f . Поток f , для которого во всех вершинах x выполняется $\operatorname{div}_f(x) = 0$, называется *циркуляцией*. Если для потока f определены полюса s и t , то применяется обозначение \vec{f}_{st} (при этом априори допускается возможность $\operatorname{div}_f(s) = \operatorname{div}_f(t) = 0$). В определенных случаях мы будем включать в рассмотрение потоки вида \vec{f}_{ss} — циркуляции с отмеченным полюсом. Если $[s, t] = e \in [V]^d$, то \vec{f}_{st} обозначается также \vec{f}_e . Если для потока f полюс s выделен в качестве источника, а полюс t — в качестве стока, $s \neq t$ (опять-таки априори допускается $\operatorname{div}_f(s) = \operatorname{div}_f(t) = 0$), то для f могут использоваться обозначения $\vec{f}_{(s,t)}$, \vec{f}_{st} .

Поток \bar{f} , определенный равенством $\bar{f}(x, y) = f(y, x)$, $\forall (x, y) \in (V)^d$, называется *обратным* относительно f , или *обращением* f . Очевидно, $\operatorname{div}_{\bar{f}}(x) = -\operatorname{div}_f(x)$ и $\|\bar{f}\| = \|f\|$. С потоком f будет связываться функция *нагрузки* (на ребра) $\zeta_f \in \mathcal{E}_+$, определяемая соотношением

$$\zeta_f[x, y] \equiv f(x, y) + f(y, x); \quad (1.2)$$

очевидно, $\zeta_f = \zeta_{\bar{f}}$.

Пример. Путь $P = (s = x_0, (x_0, x_1), x_1, \dots, x_k = t)$ порождает поток θ_P , для которого $\theta_P(x, y)$ равно числу вхождений дуги (x, y) в P (т. е. $\theta_P(x, y) = |\{i : (x_i, x_{i+1}) = (x, y), i \in \overline{0, k-1}\}|$). Если $s \neq t$, то θ_P — поток с источником s и стоком t мощности $\|\theta_P\| = 1$; если $s = t$, то θ_P — циркуляция. Поток θ_P называется *цепным*, а если путь P — простой, то — *элементарным цепным потоком*.

Поток f называется *связным*, если носитель $\operatorname{supp}(\zeta_f)$ порождает связной граф, и *ациклическим* или *бесконтуальным*, если множество дуг $(x, y) \in (V)^d$, для которых $f(x, y) > 0$, порождает ориентированный граф без контуров. Будем писать $f \geq g$, где f и g — функции, определенные на $(V)^d$, если $f(x, y) \geq g(x, y)$, $\forall (x, y) \in (V)^d$. Известную теорему о разложении потока (см. [18,1]) можно изложить в следующем виде.

Теорема 1.1. Пусть $f = f_{(s, t)}$ — поток на V с источником \bar{s} и стоком t (быть может, $s = t$). Тогда:

а) f допускает представление в виде

$$f = \sum_{P \in \mathcal{P}_{st}} \alpha(P) \cdot \theta_P + \sum_{K \in \mathcal{K}} \beta(K) \cdot \theta_K, \quad \forall \alpha(P), \beta(K) \geq 0 \quad (1.3)$$

(*потоковое разложение*, обозначаемое $\{\alpha(P), \beta(K)\}$;

б) если поток f — связный, то второе слагаемое в (1.3) может быть опущено;

в) если поток f — ациклический, то существует представление

$$f = \sum_{P \in \mathcal{P}_{st}} \alpha(P) \cdot \theta_P, \quad \forall \alpha(P) \geq 0; \quad (1.4)$$

г) существует ациклический поток $g = g_{(s, t)}$, такой, что $g \leq f$ и $\|g\| = \|f\|$;

д) если все значения $f(x, y)$ кратны некоторому $\varepsilon > 0$ (так называемый ε -целочисленный поток), то существует представление, для которого все $\alpha(P), \beta(K)$ в (1.3) или все $\alpha(P)$ в (1.4) кратны ε . ■

Замечание 1.1. Получить некоторое разложение $\{\alpha(P), \beta(K)\}$ потока f можно при помощи известной процедуры разложения (см. например, [18, 1]). Эти процедуры в общем случае имеют трудоемкость (верхнюю оценку числа действий «абстрактной ЭВМ») — $O(|V|^3)$. Все пути P , участвующие в полученном разложении (т. е. при $\alpha(P) > 0$) — простые; общее число участвующих цепей и циклов не превосходит $|V|^d$.

В дальнейшем мы, как правило, будем иметь дело только со связными потоками. Однако мы не можем ограничиться ациклическими потоками по принципиальным соображениям: каждая из рассматриваемых задач, имеющая решение общего вида, имеет также решение в виде совокупности ациклических потоков, но в промежуточных построениях избежать возникновения неациклических потоков в общем случае нам не удается.

Каждому слагаемому $\alpha(P) \cdot \theta_P$ ($P \in \mathcal{P}_{st}, \alpha(P) > 0$) какого-либо разложения потока вида (1.3) отвечает объект $\varphi_P = (P, \alpha)$ — *выделенная ориентированная потоковая нить*: путь P считается *носителем* нити, а величина $\|\varphi_P\| = \alpha = \alpha(P)$ — ее мощностью. Пара $\varphi_P = (P, \alpha), \alpha > 0$ называется ориентированной потоковой нитью потока $f_{(s, t)}$, если $P \in \mathcal{P}_{st}$ и для любой дуги $e \in (V)^d$ выполняется $(\alpha \theta_P)(e) \leq f_{(s, t)}(e)$. В случае, когда путь P замкнутый, при выполнении данного неравенства пара $\varphi_L = (P, \alpha)$ называется *нитью-контуром*. Следующее утверждение очевидно.

Утверждение 1.1. Каждая ориентированная нить φ_P потока $f_{(s, t)}$ является выделенной нитью некоторого его разложения (1.3).

Пара $\tilde{f} = \{f, \bar{f}\}$ образует объект, который мы назовем *неориентированным* потоком, каждый из f, \bar{f} является представителем неориентированного потока. В рассматриваемых нами задачах несущественно, какой из потоков — f или \bar{f} — входит в решение, что дает основание говорить о неориентированном потоке, связывающем данную пару полюсов. Неориентированный поток может быть задан в *цепной* форме: пусть $f = f_{(s, t)}$ имеет разложение $\{\alpha(P), \beta(K)\}$. Тогда совокупность пар $\{(L_P, \alpha_P), (C_K, \beta_K)\}$ (где $L_P(C_K)$ — цепь (цикл), соответствующая пути P (контуру K), $\alpha_P = \alpha(P) > 0, \beta_K = \beta(K) > 0$) определяет цепной поток \tilde{f} , соответствующий \bar{f} . Пары (L, α) , встречающиеся в \tilde{f} , называются его неориентированными нитями, а пары (C, β) — нитями-циклами. Неориентированными нитями в \tilde{f} считаются таковые в каком-либо цепном потоке \tilde{f} , соответствующем f .

4. Мультипотоки. Цепная и треугольная формы мультипотока

Мультипотоком на множестве V с множеством соединений $U \subseteq [V]$ называется совокупность $F = \{f_u\}$ двухполюсных потоков $f_u = f_{st}$ по одному потоку (который может тождественно равняться нулю) для каждой пары $u = [s, t] \in U$. В рассматриваемых задачах мультипотоки, отличающиеся обращением отдельных входящих в них потоков, не различаются, поэтому, говоря о мультипотоке, мы обычно понимаем класс эквивалентности семейств потоков по отношению обращения. При каждом конкретном рассмотрении мы вольны выбирать поток $f_{(s, t)}$ либо $f_{(t, s)} = \bar{f}_{(s, t)}$, выбор одного варианта автоматически предполагает отсутствие ему противоположного. Заметим также, что множество U может включать пары одинаковых вершин $[s, s]$, т. е. в F допускаются циркуляции с отмеченной вершиной f_{ss} . В рассматриваемых нами задачах потоки f_{ss} в окончательном ответе не учитываются, однако такие потоки могут возникать на промежуточных стадиях алгоритмов, описываемых ниже.

С мультипотоком $F = \{f_u; u \in U\}$ связываются две функции в \mathcal{E}_+ : функция *нагрузки* (на ребра) $\zeta_F: \zeta_E(e) \equiv \sum_{u \in U} \zeta_{f_u}(e), e \in [V]^d$,

функция *мощностей* $\delta_F(e) \equiv \begin{cases} \|f_e\|, & e \in U \cap [V]^d \\ 0, & e \in [V]^d \setminus U \end{cases}$.

Мощностью мультипотока F считается величина

$$\|F\| \equiv \sum_{u \in U \cap [V]^d} \delta_E(u) = \sum_{u \in U} \|f_u\|.$$

Мультипоток F на множестве V считается мультипотоком в *сети* $N = (V, T; c)$, если

$$\text{supp}(\delta_F) \subseteq [T] \text{ и } \zeta_F \leq c \quad (1.5),$$

т. е. F имеет предписанное множество полюсов и удовлетворяет ограничениям пропускных способностей ребер.

Данное нами определение мультипотока есть его определение в функциональной форме. Наряду с этим мы будем рассматривать цепную и треугольную формы мультипотока.

Цепная форма мультипотока. Мультипотоком на V с множеством соединений $U \subseteq [V]$, заданным в *цепной* форме, или *цепным мультипотоком*, называется неотрицательная вещественная функция Φ , определенная на множестве $\mathcal{L}_U \cup \mathcal{C}$ (где $\mathcal{L}_U \equiv \bigcup_{[s, t] \in U} \mathcal{L}_{st}$), или иначе — совокупность неориентированных нитей и нитей-циклов

$$\Phi = \{\Phi_L = (L, a_L), \Phi_C = (C, a_C); L \in \mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}_U, C \in \mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}, a_L, a_C > 0\}.$$

Аналогично условию (1.5) цепной мультипоток Φ считается мультипотоком в сети $N = (V, T; c)$, если $U \subseteq [T]$ и

$$\zeta_\Phi \equiv \sum_{L \in \mathcal{L}} a_L \theta_L + \sum_{C \in \mathcal{C}} a_C \theta_C \leq c. \quad (1.6)$$

Функция ζ_Φ — это функция нагрузки мультипотока Φ . Функция мощности δ_Φ определяется так:

$$\delta_\Phi[x, y] = \begin{cases} \sum_{L \in \mathcal{L} \cap \mathcal{L}_{xy}} \|\Phi_L\|, & \text{при } [x, y] \in U \cap [V]^d \\ 0, & \text{в остальных случаях;} \end{cases} \quad (1.7)$$

т. е. $\delta_\Phi[x, y]$ — это сумма мощностей нитей в Φ , соединяющих x и y . Переход от функционального мультипотока F к цепному осуществляется в соответствии с теоремой 1.1. Обратно, пусть $\Phi = \{\Phi_L, \Phi_C\}$ — цепной мультипоток с множеством соединений U . Упорядочим каждую пару $[s, t] \in U$ каким-нибудь образом, скажем (s, t) , и образуем потоки

$$f_{(s, t)} \equiv \sum_{L \in \mathcal{L} \cap \mathcal{L}_{st}} \|\Phi_L\| \cdot \theta_{P(L)},$$

где $P(L)$ — путь с началом s и концом t , соответствующий цепи L (если $s=t$, то ориентация для пути $P(L)$ определяется произвольно). Произвольно ориентировав каждый цикл $C \in C'$, образуем контур $K(C)$ и определим циркуляцию

$$f = \Sigma_{C \in C'} \| \varphi_C \| \cdot \theta_{K(C)}.$$

Мультипоток $F = \{f_{(s,t)} f; [s,t] \in U\}$ есть функциональный мультипоток, соответствующий Φ . Переход от функционального мультипотока к цепному и обратно осуществляется, вообще говоря, не единственным способом. Однако при таком переходе, как легко видеть, сохраняются функции ζ и δ .

Треугольная форма мультипотока. Рассмотрим следующие функции на $[V]^d$:

а) орт I_u — индикатор ребра $u \in [V]^d$:

$$I_u = \theta_{\{u\}} = \begin{cases} 1, & e=u \\ 0, & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

б) треугольник Δ_{xz}^y — функция, определяемая ребром $[x,z] \in [V]^d$ и вершиной y , отличной от x и z :

$$\Delta_{xz}^y(e) = \begin{cases} 1, & e=[x,y] \text{ или } [y,z], \\ -1, & e=[x,z], \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Объект, состоящий из ребра $[x,z]$ и вершины y ($y \neq x, z$), назовем *тройкой* и обозначим t_{xz}^y .

Пусть $L = (x_0, e_0, x_1, e_1, \dots, x_k)$ ($k \geq 2$) — простая цепь. Тогда, подобно [12], представим функцию $\theta_L - I_u$, где $u = [x_0, x_k]$, в виде

$$\theta_L - I_u = \sum_{l=1}^{k-1} \Delta_{x_l x_{l+1}}^{x_k} \quad (1.8)$$

(см. рис. 1; здесь сплошными линиями изображены ребра со значением функции, равным 1, а пунктирными — со значениями —1). Функция $\theta_L - I_u$ допускает, вообще говоря, не единственное представление в виде суммы треугольников.

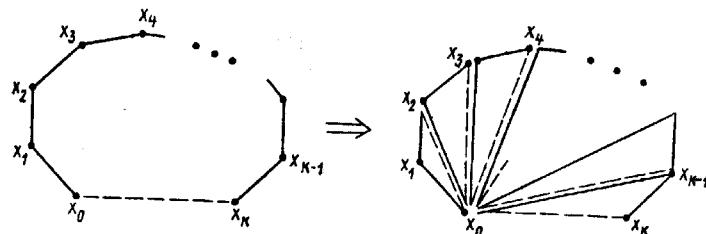


Рис. 1

Лемма 1.1. Пусть $|V| \geq 3$ и C — некоторая замкнутая цепь на V . Тогда функция θ_C может быть представлена в виде суммы треугольников.

Доказательство. Достаточно провести его для простого цикла C . Если $C = (x_0, e_0, x_1, e_1, x_2, e_2, x_3 = x_0)$, то

$$\theta_C = \Delta_{x_0 x_1}^{x_1} + \Delta_{x_1 x_0}^{x_0} + \Delta_{x_2 x_1}^{x_1}. \quad (1.9)$$

Если $C = (x_0, e_0, x_1, e_1, \dots, x_k = x_0)$, $k > 3$, то $\theta_C = \theta_{C'} + (\theta_L - I_{[x_2, x_0]})$, где $C' = (x_0, e_0, x_1, e_1, x_2, [x_1, x_0], x_0)$ и $L = (x_2, l_2, x_3, e_3, \dots, x_k = x_0)$, и представление следует из (1.8) и (1.9). Наконец, если $C = (x, e, y, e, x)$,

$$\theta_C = \Delta_{xz}^y + \Delta_{yz}^x, \quad (1.10)$$

где z — вершина, отличная от x и y .

Пусть $[V]^3$ — совокупность всех троек на V .

Мультипотоком на V с множеством соединений $U \subseteq [V]$, заданным в *треугольной* форме, или *треугольным мультипотоком*, назовем неотрицательную вещественную функцию π , определенную на множестве $[V]^3 \cup (U \cap [V]^d)$ или, иначе, совокупность взвешенных троек и ребер $\Pi := \{\pi_{xz}^y = (\iota_{xz}^y, \lambda_{xz}^y), \pi_{xy} = ([x, y], \eta[x, y]); \iota_{xz}^y \in A \subseteq [V]^3, [x, y] \in B \subseteq U \cap [V]^d, \lambda_{xz}^y, \eta[x, y] > 0\}$, такую, что

$$\zeta_\Pi = \sum_{\iota_{xz}^y \in A} \lambda_{xz}^y \Delta_{xz}^y + \sum_{[x, y] \in B} \eta[x, y] I_{[x, y]} \geq 0. \quad (1.11)$$

Треугольный мультипоток π считается мультипотоком в сети $N = (V, I; c)$, если

$$\zeta_\Pi \leq c \text{ и } U \subseteq [T]. \quad (1.12)$$

За функцию мощности δ_Π мультипотока π принимается функция, равная $\eta[x, y]$ для $[x, y] \in B$ и равная нулю — для $[x, y] \in [V]^d \setminus B$, т. е.

$$\delta_\Pi = \sum_{[x, y] \in B} \eta[x, y] I_{[x, y]}. \quad (1.13)$$

Определим соответствие между треугольной и другими формами мультипотока. Пусть $\Phi = \{\varphi_L, \varphi_C\}$ — цепной мультипоток. Сохраняя функции ζ_Φ и δ_Φ , можно перейти к цепному мультипотоку, все нити φ_L которого имеют простые носители L (для этого надо последовательно «упрощать» самопересекающиеся нити, отделяя от них нити-циклы). Заменим каждую нить $\varphi_L = (L, \alpha_L)$ с целью L не менее чем из двух ребер функцией $\alpha_L \theta_L$ и каждую нить-цикл $\varphi_C = (C, \alpha_C)$ — функцией $\alpha_C \theta_C$; далее представим θ_L в виде суммы треугольников и орта (согласно (1.10)), а θ_C — в виде суммы треугольников (согласно лемме 1.1). Нить $\varphi_L = (L, \alpha_L)$ с $L = (x, e, y)$ заменим функцией $\alpha_L I_{(x, y)}$. Приведя подобные члены в общей сумме, мы получим треугольный мультипоток Π , для которого, как легко доказать, $\zeta_\Pi = \zeta_\Phi$, $\delta_\Pi = \delta_\Phi$.

Предположим один из возможных способов перехода от треугольного мультипотока $\Pi = \{\pi_{xz}^y, \pi_{yz}\}$ к функциональному мультипотоку E . Ориентируем произвольным образом каждое из ребер в $[V]^d$, полученное множество дуг обозначим через M . На множестве дуг $(V)^d$ введем следующие функции:

$$I_{(x, y)} : I_{(x, y)}(e) = \begin{cases} 1, & e = (x, y), \\ 0, & e = (V)^d \setminus \{(x, y)\} \end{cases} \quad (1.14)$$

(ориентированный орт) и

$$\Delta_{(x, z)}^y : \Delta_{(x, z)}^y(e) = \begin{cases} 1, & e = (x, y) \text{ или } (y, z), \\ -1, & e = (x, z), \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases} \quad (1.15)$$

(ориентированный треугольник). Выделим из π «подмультипоток» $\Pi' = \{\pi_{xz}^y\}$, состоящий из всех взвешенных троек (для π' неравенство (1.12) может не выполняться, т. е., строго говоря, π' — не мультипоток). Для каждой дуги $(x, z) \in M$, такой, что в π' существует некоторый π_{xz}^y , образуем поток $f_{xz}^0 \equiv \sum_{y: \pi_{xz}^y \in \Pi'} \lambda_{xz}^y (\Delta_{(x, z)}^y + I_{(x, z)})$; совокупность этих потоков есть исходный мультипоток F^0 . Нетрудно проверить, что для F^0 выполняется равенство (здесь $a = 0$):

$$\zeta_{F^\alpha} - \delta_{F^\alpha} = \zeta_{\Pi'} \equiv \sum_{xy} \lambda_{xz}^y \Delta_{xz}^y. \quad (1.16)$$

Для получения требуемого потока F многократно применяется операция *встраивания* одного потока в другой, состоящая в следующем. Пусть f' и $f''_{(s'', t'')}$ — два потока и пусть выполняется: а) $\min\{f'(s'', t''), f''_{(s'', t'')}\} = 0$; б) $\zeta_{f'}(s'', t'') = a > 0$; в) $\|f''\| = b > 0$. Пользуясь процедурой потокового разложения (см. замечание 1.1), выделим из f'' подпоток \tilde{f} мощности $r = \min\{a, b\}$ (если $r = b$, то положим $\tilde{f} \equiv f''$). Пусть для определенности $f'(s'', t'') = a$ (если $f'(t'', s'') = a$, то переориентируем поток \tilde{f}). Операция встраивания f'' в f' состоит в переходе к потокам \tilde{f}', \tilde{f}'' : поток \tilde{f}' получается из f' «заменой» части потока в дуге (s'', t'') потоком \tilde{f} , т. е. $\tilde{f}' \equiv f' - a\theta_{(s'', t'')} + \tilde{f}$, а поток \tilde{f}'' равен $f'' - \tilde{f}$. Заметим, что

$$\begin{aligned} \zeta_{f'}[x, y] + \zeta_{f''}[x, y] &= \zeta_{\tilde{f}'}[x, y] + \zeta_{\tilde{f}''}[x, y], \\ \forall [x, y] \in [V]^d \setminus \{[s'', t'']\}, \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$\zeta_{f'}[s'', t''] + \zeta_{f''}[s'', t''] - \|f''\| = \zeta_{\tilde{f}'}[s'', t''] + \zeta_{\tilde{f}''}[s'', t''] - \|\tilde{f}''\|. \quad (1.18)$$

Пусть уже получен мультипоток $F^i = \{f_{(s, t)}^i, g^i; (s, t) \in M^i \subseteq M\}$, такой, что выполнены следующие условия (здесь $a = i$): (А) g^a — циркуляция; (Б) для любого $f_{(s, t)}^a$ справедливо $\zeta_{f_{(s, t)}^a}[s, t] = 0$, $\min\{f_{(s, t)}^a(x, y), f_{(s, t)}^a(y, x)\} = 0$, $\forall [x, y] \in [V]^d$ и (В) для $F^i = F^a$ выполняется равенство (1.16) (при $a = 0$ условия (А) — (Б), очевидно, удовлетворяются). Пусть имеется ребро $[s'', t''] \in [V]^d$, такое, что $\zeta_{F^i}[s'', t''] > 0$, $\delta_{F^i}[s'', t''] > 0$, и пусть для определенности $(s'', t'') \in M$. Тогда в F^i имеется поток $f'' = f_{(s'', t'')}^i$: $\|f''\| = \delta_{F^i}[s'', t'']$ и набор потоков $\{f'_1, f'_2, \dots, f'_j\}$, таких, что $\zeta_{f'_j}[s'', t''] > 0$, $\sum_{j=1}^i \zeta_{f'_j}[s'', t''] = \zeta_{F^i}[s'', t'']$ (f'_j может быть как потоком $f_{(s, t)}^i$, так и циркуляцией g^i). Будем производить операцию встраивания потока f'' поочередно в потоки $f' = f'_1, f'_2, \dots$ до тех пор, пока либо не уничтожится поток f'' (при $\delta_{F^i}[s'', t''] \leq \zeta_{F^i}[s'', t'']$) либо не исчерпается весь набор $\{f'_j\}$ (при $\zeta_{F^i}[s'', t''] < \delta_{F^i}[s'', t'']$). В результате, как следует из (1.17), (1.18), значения функций ζ и δ сохранятся на всех ребрах, кроме $[s'', t'']$, а для ребра $[s'', t'']$ будет $\min\{\zeta[s'', t''], \delta[s'', t'']\} = 0$ и величина $\zeta[s'', t''] - \delta[s'', t'']$ останется прежней. Предположим, что для какого-нибудь из измененных потоков $\tilde{f}' = f_{(s, t)}^i$ нарушилось условие (Б). В случае $\tilde{f}'(x, y) > 0$, $\tilde{f}'(y, x) > 0$ «отделим» от \tilde{f}' циркуляцию по контуру $(x, (x, y), y, (y, x), x)$, присоединив ее к g , т. е. положим $\tilde{f}' := \tilde{f}' - \epsilon\theta_{(x, y)} - \epsilon\theta_{(y, x)}$, $g^i := g^i + \epsilon\theta_{(x, y)} + \epsilon\theta_{(y, x)}$ (где $\epsilon = \min\{\tilde{f}'(x, y), \tilde{f}'(y, x)\}$). В случае $\tilde{f}'(t, s) > 0$, пользуясь процедурой потокового разложения, выделим из \tilde{f}' циркуляцию \tilde{g}' с $\tilde{g}'(t, s) = \tilde{f}'(t, s)$ (такая циркуляция найдется, поскольку $\|\tilde{f}'\| = \text{div}_{\tilde{f}'}(s) > 0$). В случае $\tilde{f}'(s, t) > 0$ положим $\tilde{f}'(s, t) := \tilde{f}'(s, t) - \min\{\tilde{f}'(s, t), \|\tilde{f}'\|\}$, в результате либо для нового \tilde{f}' при $\|\tilde{f}'\| > 0$ будет выполнено условие (Б) либо \tilde{f}' станет циркуляцией, которую прибавим к g^i . Окончательный мультипоток обозначим $F^{i+1} = \{f_{(s, t)}^{i+1}, g^{i+1}; (s, t) \in M^{i+1} \subseteq M\}$. Для $F^a = F^{i+1}$ будут

выполнены условия (A)–(B), кроме того, справедливо $\delta_{F^{i+1}} \leq \delta_{F^i}$ и $\min\{\zeta_{F^{i+1}}[s'', t''], \delta_{F^{i+1}}[s'', t'']\} = 0$.

Таким образом, не более чем за $k \leq |V|^d$ операций мы получим мультипоток F^k , для которого соблюдается равенство (1.16), а также верно:

$$\min\{\zeta_{F^k}[x, y], \delta_{F^k}[x, y]\} = 0. \quad (1.19)$$

Из (1.16), (1.19) следует

$$\zeta_{F^k} = \zeta_{\Pi}^+, \quad \delta_{F^k} = \zeta_{\Pi}^-. \quad (1.20)$$

Искомый мультипоток $F = \{f_{(s, t)}, g\}$ получается из F^k путем прибавления к каждому потоку $f_{(s, t)}^{(k)}$, $[s, t] \in B$ «прямого» подпотока $(\eta[s, t] - \|f_{(s, t)}^k\|) \cdot I_{(s, t)}$. Для F мы имеем

$$\begin{aligned} \zeta_F &= \zeta_{F^k} + \sum_{[s, t] \in B} (\eta[s, t] - \|f_{st}^k\|) \cdot I_{[s, t]} = \zeta_{\Pi}^+ - \zeta_{\Pi}^- + \\ &+ \sum_{[s, t] \in B} \eta[s, t] I_{[s, t]} = \zeta_{\Pi}; \\ \delta_F &= \delta_{F^k} + \sum_{[s, t] \in B} (\eta[s, t] - \|f_{st}^k\|) \cdot I_{[s, t]} = \zeta_{\Pi}^- - \\ &- \sum_{[s, t] \in B} \|f_{(s, t)}^k\| \cdot I_{[s, t]} + \sum_{[s, t] \in B} \eta[s, t] I_{[s, t]} = \delta_{\Pi}. \end{aligned}$$

Установленные соответствия между разными формами мультипотоков выражает следующая

Теорема 1.2. Для каждого функционального мультипотока F существуют (вообще говоря, не единственные) цепной мультипоток Φ и треугольный мультипоток Π , такие, что $\zeta_E = \zeta_{\Phi} = \zeta_{\Pi}$, $\delta_F = \delta_{\Phi} = \delta_{\Pi}$. Имеются эффективные (полиномиальные от $|V|$) процедуры перехода от F к Φ и к Π . Аналогичные утверждения справедливы и для любого цепного и треугольного мультипотока (в случае цепного мультипотока Φ процедура перехода полиномиальна от общего числа ребер в нитях-циклах в Φ).

В дальнейшем каждый раз будет выбираться та форма задания мультипотока, которая наиболее удобна для изложения.

5. Задачи о мультипотоках

Следуя [10], приведем формулировки задач, которые мы будем рассматривать в качестве *основных* задач о мультипотоках. Эти задачи отличает то обстоятельство, что в них накладываются требования только на функции нагрузки ζ и мощности — δ . В самом общем виде — это задача, которую мы будем обозначать $\langle a, b | c, d \rangle$: на множестве $[V]^d$ заданы функции $a, b, c, d \in \mathcal{E}_+$; требуется найти мультипоток F на V , удовлетворяющий ограничениям на пропускные способности ребер и требованиям на мощности

$$\zeta_F \leq c, \quad \delta_F \leq d \quad (1.21)$$

и максимизирующей форму

$$b \cdot \delta_F - a \cdot \zeta_F \quad (1.22)$$

(здесь $b[s, t]$ имеет смысл «премии за доставку» единицы мощности от s к t или наоборот, а $a[x, y]$ — платы за провоз каждой единицы потока по ребру $[x, y]$, причем эта плата не зависит от вида потока и направления провоза). Различаются следующие частные случаи задачи $\langle a, b | c, d \rangle$.

A. Задача о допустимости $\langle c, d \rangle$: для данных функций $c, d \in \mathcal{E}_+$ найти (в смысле, который колеблется между «построить с полиномиальной трудоемкостью» и «доказать существование») мультипоток, удовлетворяющий неравенствам (1.21) (допустимый мультипоток). Пара функций $(c, d) \in \mathcal{E}_+ \times \mathcal{E}_+$ называется *совместной*, а задача $\langle c, d \rangle$ — *разрешимой*, если такой мультипоток существует. Как оказывается, возможность эффективного алгоритмического решения задачи $\langle c, d \rangle$ связана не столько с конкретными числами $c(e)$ и $d(e)$, сколько с тем, какой подграф порождает множество ребер с требованиями d , отличными от 0. Фиксируя граф (*потоковую схему*) $S = (T, U)$, мы определяем *массовую* задачу $\langle \text{Ex}, S \rangle$ — задачу о допустимости со схемой S — состоящую (в сильном смысле) в построении алгоритма с определенными критериями качества (например, с полиномиальной трудоемкостью), который для произвольного множества V и функций $c, d \in \mathcal{E}_+^*$, $\text{supp}(d) \subseteq U$ отыскивает допустимый мультипоток либо показывает несовместность c и d .

B. Задача о максимальном взвешенном мультипотоке $\langle b|c \rangle$: найти мультипоток F , удовлетворяющий ограничению пропускной способности $\zeta_F \leq c$ и максимизирующий форму $b \cdot \delta_F$. Здесь $b = b[s, t]$ — это функция сравнительной ценности отдельных потоков в F . Среди задач $\langle b|c \rangle$ наибольший интерес представляют задачи следующих двух видов.

1) Задача $\langle b|c \rangle$, в которой функция b является метрикой $T \subseteq V$ (определение см. в § 2). В этом случае решение обладает рядом интересных свойств, некоторые из них выявляются в § 3.

2) Задача на $\max\limits_{\Sigma}$, в которой $b = \theta_U$, где U — множество ребер потоковой схемы $S = (T, U)$. В этой задаче потоки f_u с $u \in [V]^d \setminus U$ не учитываются, а потоки f_u с $u \in U$ ценятся одинаково. Для данной задачи изменяется обозначение $\langle S, c \rangle$, мультипоток, решающий ее, называется S -максимальным, или U -максимальным. В том случае, когда $U = [T]^d$, оптимальный мультипоток называется также T -максимальным.

Значение функционала $b \cdot \delta_F$ в задаче $\langle b|c \rangle$ будет также обозначаться $\|F\|_b$, а в случае $b = \theta_U$ — еще и $\|F\|_U$. Задачи 1 и 2 допускают «массовую» постановку аналогично задаче $\langle c, d \rangle$: $\langle \mu, \Sigma \rangle$ (соответственно, $\langle S, \Sigma \rangle$) обозначает класс задач об отыскании оптимального потока при фиксированной метрике μ на T (соответственно, при фиксированной схеме $S = (T, U)$) и произвольных множестве вершин V и функции $c \in \mathcal{E}_+$.

B. Задача о допустимом мультипотоке минимальной стоимости $\langle a|c, d \rangle$: построить мультипоток F , удовлетворяющий ограничениям (1.21) и имеющий минимальную суммарную стоимость $a \cdot \zeta_F$.

Г. Задача о максимальном взвешенном мультипотоке минимальной стоимости $\langle a, b|c \rangle$: построить мультипоток, удовлетворяющий ограничению пропускной способности $\zeta_F \leq c$ и максимизирующей форму (1.22).

К задаче $\langle a, b|c \rangle$ тесно примыкает задача $\langle a, S|c \rangle$ об отыскании мультипотока, имеющего максимальную мощность $\|F\|_U$ (здесь $S = (T, U)$) и при этом минимальную стоимость $a \cdot \zeta_F$. Такая задача сводится к задаче $\langle a, \lambda \theta_U|c \rangle$ с достаточно большим λ . Можно поставить массовую задачу $\langle S, \text{Cost} \rangle$ об отыскании S -максимального мультипотока минимальной стоимости при произвольных V и $a, c \in \mathcal{E}_+$. Единственная (за исключением схемы с одним ребром) задача такого рода,

* Вопрос об области значений функций a, b, c, d оставляется в стороне.

решенная к настоящему времени чисто комбинаторными средствами, это $\langle K_n, \text{Cost} \rangle$, где K_n — полный граф произвольного размера $n = |T|$ (см. статью [IX] из настоящего сборника).

Для каждой из перечисленных задач можно предложить соответствующий целочисленный аналог (в общем случае обозначаемый $\langle a, b | c, d \rangle^r$), в котором на мультипоток F накладывается дополнительное требование целочисленности (т. е. величина $f_u(x, y)$, $\forall f_u \in F$, $(x, y) \in (V)^d$ — целая). Эти задачи, как и целочисленные аналоги других известных «непрерывных» задач (не имеющих в общем случае целочисленного решения), существенно более трудны для комбинаторного решения.

Помимо перечисленных задач о мультипотоках существует ряд поставок задач других типов, например, задачи об эквивалентных (по разным параметрам) преобразованиях сетей, о массовом решении задач о допустимости в фиксированной сети при переменных требованиях (см. например, работу Б. А. Папернова из настоящего сборника), задачи о синтезе сетей и т. д. Имеется также определенный круг задач об объектах двойственной (к мультипотокам) природы — метриках на конечных множествах.

§ 2. ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ДВОЙСТВЕННОСТИ ДЛЯ МУЛЬТИПОТОКОВ

1. Теорема существования для задачи $\langle c, d \rangle$

В теории двойственности для мультипотоков фундаментальное место принадлежит общей теореме о существовании в данной сети мультипотока с предписанными значениями мощности отдельных потоков (т. е. о разрешимости задачи $\langle c, d \rangle$). Первоначальный вариант этой теоремы был предложен и доказан К. Опага—О. Kakusho [40] и М. Iri [36], ввиду чего мы будем называть ее японской теоремой. Эта теорема будет сформулирована в том виде, который придал ей Б. А. Папернов [16]. Этот вид следует признать более удачным для дальнейшего исследования мультипотоков.

Определение. Функция $\mu \in \mathcal{E}$ называется *метрикой* на множестве вершин V , если для любых трех различных вершин $x, y, z \in V$ выполняется неравенство треугольника

$$\mu[x, y] + \mu[y, z] - \mu[x, z] \geq 0. \quad (2.1)$$

Множество всех метрик на V обозначим \mathcal{M} . Легко проверить, что из $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}$ следует $\mu_1 + \mu_2 \in \mathcal{M}$, а также $\lambda\mu_1 \in \mathcal{M}$ при $\lambda \geq 0$, т. е. \mathcal{M} — выпуклый конус в \mathcal{E} с вершиной в начале координат, очевидно также, что этот конус замкнутый. Из неравенств треугольника для $\mu \in \mathcal{M}$, примененных к двум упорядоченным тройкам вершин x, y, z и z, x, y , следует, что $\mu[x, y] \geq 0$, это означает, что $\mu \geq 0$, т. е. $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{E}_+$ (заметим, что общепринятого для метрик неравенства $\mu > 0$ мы не требуем).

Теорема 2.1 (японская теорема). Задача $\langle c, d \rangle$ разрешима тогда и только тогда, когда для любой метрики μ на V выполняется неравенство

$$\mu \cdot (c - d) \geq 0. \quad (2.2)$$

Идея доказательства будет близка к используемой в [12].

Л е м м а 2.1 [12]. Задача $\langle c, d \rangle$ разрешима тогда и только тогда, когда функция $c - d$ является неотрицательной линейной комбинацией ортов и треугольников.

Доказательство. Пусть задача $\langle c, d \rangle$ разрешима и $\Pi = \{\pi_{x,z}^y, \pi_{yw}, t_{xz}^y \in A \subseteq [V]^3, [v, w] \in B \subseteq [V]^d\}$ — треугольный мультипоток, являющийся ее решением. Поскольку $\zeta_\Pi \leq c$, то функция $c - \zeta_\Pi$ представима в виде $\sum_{[x,y] \in [V]^d} \epsilon_{xy} I_{[x,y]}$, $\epsilon_{xy} \geq 0$. Из (1.11), (1.13) получаем

$$c - d = \sum_{t_{xz}^y \in A} \lambda_{xz}^y \Delta_{xz}^y + \sum_{[x,y] \in [V]^d} \epsilon_{xy} I_{[x,y]}. \quad (2.3)$$

Обратно, пусть $c - d = \sum_{t_{xz}^y \in A} \alpha_{xz}^y \Delta_{xz}^y + \sum_{[x,y] \in [V]^d} \beta_{xy} I_{[x,y]}$, $\alpha_{xz}^y \beta_{xy} \geq 0$.

Тогда решением задачи, очевидно, является треугольный мультипоток — функция π , равная α_{xz}^y на $t_{xz}^y \in [V]^3$ и $d[x,y]$ на $[x,y] \in [V]^d$. ■

Следствие 2.1 [12]. Разрешимость задачи $\langle c, d \rangle$ эквивалентна разрешимости любой задачи $\langle c', d' \rangle$, такой, что $c - d = c' - d'$, и, в частности, разрешимости приведенной задачи $\langle \tilde{c}, \tilde{d} \rangle$, где $\tilde{c} = (c - d)^+$, $\tilde{d} = (c - d)^-$.

Таким образом, с одной стороны, определяются классы задач, эквивалентных по разрешимости — задач $\langle c, d \rangle$ с одинаковой разностью $c - d$. С другой стороны, любой функции $g \in \mathcal{E}$ можно взаимнооднозначно сопоставить приведенную задачу $\langle g^+, g^- \rangle$, т. е. каждое $g(e) > 0$ рассматривается как пропускная способность ребра e , а каждое $g(e) < 0$ — как требование величины $|g(e)|$ на мощность потока f_e . Вопрос о разрешимости в множестве задач $\langle c, d \rangle$ сводится тем самым к вопросу о разрешимости в множестве приведенных задач $\langle g^+, g^- \rangle$, $g \in \mathcal{E}$ (эти задачи будем обозначать просто g), более того, имея способ решения приведенной задачи g можно получить решение задачи $\langle c, d \rangle$ с $c - d = g$, построив начальный мультипоток $F^0 = \{f_u^0\}$, где $\delta_{f_u^0} = \min \{c(u), d(u)\} \cdot I_u$, $u \in [V]^d$, и уменьшив функции c и d на ζ_{F^0} .

Поскольку при $|V| \geq 3$ любой орт $I_{[x,y]}$ представим в виде неотрицательной линейной комбинации треугольников, а именно $I_{[x,y]} = 1/2(\Delta_{xz}^y + \Delta_{yz}^x)$, то из леммы 2.1 вытекает также

Следствие 2.2(12). Множество разрешимых приведенных задач образует в \mathcal{E} выпуклый замкнутый конус, минимальной системой образующих* которого является совокупность всевозможных треугольников Δ_{xz}^y , рассматриваемых с точностью до подобия. (Неразложимость «простейшей» разрешимой задачи — треугольника Δ_{xz}^y , следует из соображений симметрии и из несовпадения конуса со всем пространством \mathcal{E} или его полупространством — последнее вытекает, например, из неразрешимости задачи $g = I_{xy} - I_{yz}$ и задачи $-g$). Конус разрешимых приведенных задач будет обозначаться через \mathcal{F} .

Согласно (2.1) функция μ является метрикой тогда и только тогда, когда $\mu \cdot \Delta_{xz}^y \geq 0$ для любого треугольника Δ_{xz}^y . Поскольку любая задача из \mathcal{F} представима в виде неотрицательной линейной комбинации треугольников Δ_{xz}^y , то

$$\mathcal{M} = \{\mu \in \mathcal{E} : \mu \cdot g \geq 0, \forall g \in \mathcal{F}\},$$

т. е. \mathcal{M} есть двойственный конус \mathcal{F}^* к конусу разрешимых задач \mathcal{F} .

* Под системой образующих данного множества $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$ понимается такая конечная совокупность векторов $\{a_i \in \mathcal{E}' ; i \in I\}$, что любой вектор $b \in \mathcal{E}'$ представим в виде $\sum_{i \in I} \alpha_i a_i$, $\alpha_i \geq 0$.

По известной теореме двойственности для конусов (см., например, [25]), ввиду выпуклости и замкнутости \mathcal{F} , имеем

$$\mathcal{M}^* = \mathcal{F}^{**} = \mathcal{F},$$

т. е. $g \in \mathcal{F} \Leftrightarrow g \cdot \mu \geq 0, \forall \mu \in \mathcal{M}$, а это и есть не что иное, как утверждение теоремы 2.1.

2. Метрики и геодезические

Конус метрик \mathcal{M} , образованный пересечением конечного числа полупространств-неравенств треугольника (2.1), имеет конечное число граней размерности 1 — крайних лучей*. Каждую ненулевую метрику, принадлежащую некоторому крайнему лучу, назовем *крайней*, или *простой*, для такой метрики μ из $\mu = \mu_1 + \mu_2$ следует, что μ_1 и μ_2 подобны μ (т. е. $\mu_i = \alpha_i \mu, i=1, 2$). Совокупность $\mathcal{R} = \{\mu; \|\mu\|=1\}$ крайних метрик, по одной для каждого крайнего луча в \mathcal{M} , является минимальной системой образующих. Любое неравенство (2.2) следует тогда, когда оно справедливо для всех μ из \mathcal{R} , т. е. справедлива

Теорема 2.2 [16]. Задача $\langle c, d \rangle$ разрешима тогда и только тогда, когда выполнено конечное число неравенств (2.2) для $\forall \mu \in \mathcal{R}$.

Таким образом, в общем случае минимальное множество метрик, требуемых для ответа на вопрос, разрешима или нет задача $\langle c, d \rangle$, $(c, d) \in \mathcal{E}_+ \times \mathcal{E}_+$, при помощи проверок соотношений (2.2) — это \mathcal{R} (каждое неравенство (2.2) для $\mu \in \mathcal{R}$ в общем случае не следует из остальных). Пусть теперь рассматриваются только задачи $\langle c, d \rangle$ с дополнительным ограничением

$$\text{supp}(d) \subseteq U, \quad U \subset [V]^d, \quad (2.4)$$

т. е. массовая задача $\langle \text{Ex}, S \rangle$, где $S = (T, U)$. Определим \mathcal{F}_U как множество разрешимых задач $g \in \mathcal{E}$, удовлетворяющих (2.4) (с $d \equiv g$). Обозначим через $\mathcal{E}(e)$ полупространство в \mathcal{E} , состоящее из всех функций g , для которых $g(e) \geq 0$. Очевидно, что

$$\mathcal{F}_U = \mathcal{F} \cap \{\bigcap_{e \in [V]^d \setminus U} \mathcal{E}(e)\}. \quad (2.5)$$

Отсюда следует, что двойственный конус \mathcal{F}_U^* есть множество всех неотрицательных линейных комбинаций метрик и ортов I_e , $e \in [V]^d \setminus U$, т. е.

$$\mathcal{F}_U^* = \{v \in \mathcal{E}_+; v = \mu + a, \mu \in \mathcal{M}, a \in \mathcal{E}_+, \text{supp}(a) \cap U = \emptyset\}. \quad (2.6)$$

Мы видим, что $\mathcal{M} \subset \mathcal{F}_U^*$ и в общем случае минимальной системой образующих в \mathcal{F}_U^* является часть крайних метрик из \mathcal{R} (обозначим ее \mathcal{R}_U) и множество ортов I_e , $e \in [V]^d \setminus U$ (некоторые из метрик $\mu \in \mathcal{R}$ в \mathcal{F}_U^* не принадлежат крайним лучам, т. е. «поглощены» ортами)**. Для установления разрешимости задачи $\langle c, d \rangle \in \langle \text{Ex}, S \rangle$ достаточно проверки соотношения (2.2) для $\mu \in \mathcal{R}_U$ (неравенства $(c - d) \cdot I_e \geq 0, e \in [V]^d \setminus U$, — это тривиальное следствие (2.4)). Можно ожидать, что для «несложных» схем $S = (T, U)$ множество \mathcal{R}_U будет достаточно просто устроено и процедура проверки разрешимости в классе $\langle \text{Ex}, S \rangle$ будет не слишком трудоемкой.

Вершины x и y назовем μ -*неразличимыми* для данной метрики μ , если $\mu[x, y] = 0$. Легко видеть, что $\mu[x, z] = \mu[y, z]$, если вершины x и y

* Приводимые здесь понятия и утверждения, касающиеся многогранных конусов, можно найти, например, в [25].

** Описание множества «непоглощенных» метрик \mathcal{R}_U можно найти в [12].

μ -неразличимы, следовательно, можно определить разбиение $V/\mu = \{X, Y, \dots\}$ множества V на классы μ -неразличимых вершин: расстояние $\mu[x, y]$ между любыми двумя представителями x и y одного класса X равно 0, а для двух разных классов X и Y — одинаково и отлично от 0. Строго положительная функция $\mu^*[X, Y]$, определенная на $[V/\mu]^d$ равенством $\mu^*[X, Y] = \mu[x, y]$, где $x \in X, y \in Y$, является метрикой и называется *сжатием* метрики μ .

Лемма 2.2. Метрика μ проста тогда и только тогда, когда просто ее сжатие.

Доказательство. Пусть μ — не проста, т. е. $\mu = \mu_1 + \mu_2$ и μ_i — не подобны μ . Поскольку из $\mu[x, y] = 0$ следует $\mu_i[x, y] = 0$, $i = 1, 2$, то $\mu_i[x, y]$ одинакова для всех пар $x, y: x \in X, y \in Y, X, Y \in V/\mu$. Функции μ_i на $[V/\mu]^d$, определенные как $\mu_i[X, Y] = \mu_i[x, y]$, $i = 1, 2$, являются метриками на V/μ , не подобны и, очевидно, $\mu^* = \mu_1 + \mu_2$, т. е. метрика μ^* — не проста. Обратно, пусть $\mu^* = \mu_1 + \mu_2$, где μ_i , $i = 1, 2$, — метрика на V/μ , не подобная μ^* . Тогда функции μ_i , $i = 1, 2$, на $[V]^d$, определенные равенствами $\mu_i[x, y] = \mu_i[X, Y]$ при $[x, y] \in [X, Y]$ и $\mu_i[x, y] = 0$ при $x, y \in X$, являются, очевидно, метриками на V , причем $\mu = \mu_1 + \mu_2$ и μ_i — не подобны μ . ■

Следствие 2.2. Индикатор $\rho_X = \theta_{[X, \bar{X}]}$ разреза $[X, \bar{X}]$, где $X \subset V$, является простой метрикой*.

Доказательство. Неравенство треугольника (2.1) для ρ_X очевидно выполняется, т. е. ρ_X — метрика. Метрика ρ_X определяет разбиение V/ρ_X всего на два подмножества $\{X, \bar{X}\}$, так что ρ_X^* , очевидно, проста. ■

Определение. Схема $S = (T, U)$, так же, как и задача $\langle \text{Ex}, S \rangle$, называется *разрезной* для задач о допустимости, если \mathcal{R}_U состоит только из разрезов ρ_X на V для любого V .

Простейший случай разрезной задачи — это задача о существовании в сети $N = (V, T; c)$, $T = \{s, t\}$ одного потока с полюсами s и t заданной мощности $d[s, t]$ (здесь схема S содержит только одно ребро; см. рис. 2). По известной теореме Форда и Фалкерсона [18] такой поток существует тогда и только тогда, когда пропускная способность с $[X, \bar{X}]$ любого разреза $[X, \bar{X}]$, разделяющего s и t не меньше, чем $d[s, t]$.

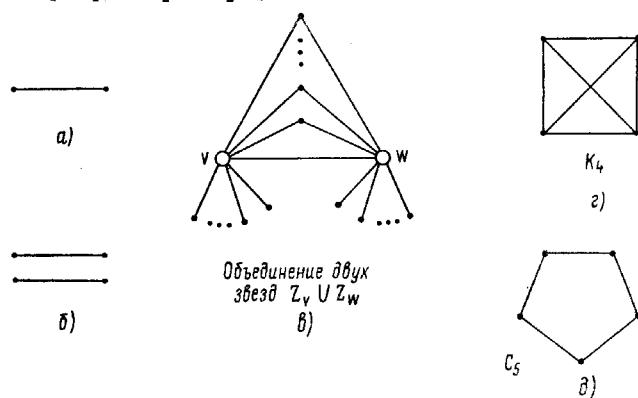


Рис. 2.

* В дальнейшем для краткости саму функцию ρ_X мы будем называть метрикой, разрезом или просто разрезом.

Последнее может быть записано в виде

$$\rho_x \cdot (c - d) \geq 0, \quad (2.7)$$

т. е. в виде неравенства (2.2) для $\mu = \rho_x$. Из работы Т. Ч. Ху [20] следует разрезность схемы S , содержащей два ребра (рис. 2 б); к задаче с такой схемой сводится задача $\langle Ex, S \rangle$ со схемой S , являющейся объединением двух звезд (рис. 2в), как указано Е. А. Диницем (см. [1]). Наконец, Б. А. Папернов дал полное описание всех разрезных задач о допустимости.

Теорема 2.3 [16]. Схема S , не содержащая изолированных полюсов*, разрезна тогда и только тогда, когда она есть: а) объединение двух звезд или б) полный граф на четырех вершинах K_4 (рис. 2 г) или в) цикл на пяти вершинах C_5 (рис. 2 д).

Доказательство разрезности схем K_4 и C_5 , данное в [16], — неконструктивно. Условно-эффективное** решение задач с такими схемами для целочисленных функций c и d дано в работе [13]. В § 3 рассматривается общая задача о «запирании» подмножеств полюсов, в частном случае условно-эффективный алгоритм этого раздела решает и все целочисленные разрезные задачи на допустимость. Наконец в § 4 предлагается эффективный алгоритм решения общей разрезной задачи о «запирании» для произвольных сетей.

К настоящему времени ни для одной неразрезной задачи $\langle Ex, S \rangle$ не получено решения, которое проводилось бы комбинаторными средствами (в отличие от способов, привлекающих средства линейного программирования).

Определение. Геодезической метрики μ на V называется такая цепь $L = (x_0, e_0, x_1, e_1, \dots, x_k)$, что

$$\mu[x_0, x_k] = \sum_{i=0}^{k-1} \mu[x_i, x_{i+1}]$$

или, что то же самое,

$$\mu \cdot (\theta_L - I_{[x_0, x_k]}) = 0. \quad (2.8)$$

Геодезическая называется *элементарной*, если она содержит ровно два ребра и эти ребра различны. Элементарная геодезическая $L = L[x, z] = \langle x, y, z \rangle L$ взаимнооднозначно соответствует «равенству» треугольника

$$\mu \cdot \Delta_{xz}^y = 0. \quad (2.9)$$

Будем обозначать через $\mathcal{T}(\mu)$ множество геодезических метрики μ , а через $\mathcal{T}^0(\mu)$ — множество ее элементарных геодезических.

Лемма 2.3. Для мультипотока F на V и некоторой метрики μ выполняется

$$(\zeta_F - \delta_F) \cdot \mu = 0 \quad (2.10)$$

тогда и только тогда, когда для любой нити $\varphi_L = (L, a)$ любого потока в F ее носитель L является геодезической метрики μ , а длина (в метрике μ) любого носителя нити-цикла в F равна 0***.

* Изолированные полюса в S всегда могут быть исключены из рассмотрения.

** Для сетевых задач, в размерность которых входит как число структурных элементов (в данном случае $|V|$, $|T|$, $|U|$), так и длина записи числовых параметров (в нашем случае — c и d), под эффективным алгоритмом понимается алгоритм с установленной верхней оценкой трудоемкости, зависящей полиномиально от числа элементов, а под условно-эффективным алгоритмом — алгоритм с оценкой трудоемкости, зависящей полиномиально от числа элементов и линейно от суммы числовых параметров (обычно целочисленных). При этом под одним действием понимается стандартная арифметическая или логическая операция над двумя числами, длины записи которых ограничены полиномом от длины записи всей задачи (см. также [1]).

*** В дальнейшем в целях облегчения языка будет применять к слову «нить» терминологию, используемую для ее носителя; в частности, будем говорить «нить φ_L является геодезической метрики μ ».

Доказательство. Перейдем к цепной форме мультипотока $\Phi = \{\Phi_L, \Phi_C\}$, среди элементов которого может содержаться любая на- перед заданная нить или нить-цикл. Поскольку

$$\zeta_F - \delta_F = \sum_{\Phi_L \in \Phi} \|\Phi_L\| (\theta_L - I_u) + \sum_{\Phi_C \in \Phi} \|\Phi_C\| \theta_C$$

(здесь u — пара концов цепи L) и ввиду того, что $\mu \cdot (\theta_L - I_u) \geq 0$ и $\mu \cdot \theta_C \geq 0$, получаем, что равенство (2.10) эквивалентно выполнению равенств

$$\mu \cdot (\theta_L - I_u) = 0, \quad \mu \cdot \theta_C = 0, \quad \forall \Phi_L, \Phi_C \in \Phi. \blacksquare$$

Мультипоток F и метрика μ называются *согласованными*, если для них выполняется соотношение (2.10). Для треугольного мультипотока $\Pi = \{\pi_{xz}^u, \pi_{vw}^u; \|\pi_{xz}^u\|, \|\pi_{vw}^u\| > 0\}$ согласованность (определенная как выполнение равенства $(\zeta_F - \delta_F) \cdot \mu = 0$) равносильна, как легко может быть показано, выполнению равенств (2.9) для всех троек $t_{xz}^u : \pi_{xz}^u \in \Pi$.

Если F — мультипоток на V , то, очевидно, задача $\langle \zeta_F, \delta_F \rangle$ разрешима, т. е. $\zeta_F - \delta_F \in \mathcal{F}$. Если для F существует согласованная с ним метрика $\mu \neq 0$, то вектор $\zeta_F - \delta_F$ находится на границе конуса \mathcal{F} (верно и обратное). Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ выполняется

$$\mu \cdot (\zeta_F - \delta_F - \varepsilon \mu) = -\varepsilon \mu \cdot \mu < 0 \Rightarrow \zeta_F - \delta_F - \varepsilon \mu \notin \mathcal{F},$$

т. е. любой «сдвиг» из точки $\zeta_F - \delta_F$ вдоль «направления» $-\mu$ выводит из конуса \mathcal{F} . Решениями экстремальных задач, рассматриваемых ниже, являются именно такие, «пограничные» для \mathcal{F} , мультипотоки.

В заключение приведем следующие простые утверждения о метриках.

Лемма 2.4 [12]. Пусть $\mu = \mu_1 + \mu_2$ ($\mu, \mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}$). Тогда $\mathcal{T}(\mu) = \mathcal{T}(\mu_1) \cap \mathcal{T}(\mu_2)$.

Действительно, поскольку из определения метрики следует, что $\mu_i \cdot (\theta_{L[x,y]} - I_{[x,y]}) \geq 0$, $i = 1, 2$, для любой цепи $L[x, y]$, $x \neq y$, то равенство $\mu \cdot (\theta_{L[x,y]} - I_{[x,y]}) = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда справедливо $\mu_i \cdot (\theta_{L[x,y]} - I_{[x,y]}) = 0$, $i = 1, 2$. ■

Лемма 2.5. Пусть $\mu = \mu_1 + \mu_2$. Метрика μ и мультипоток F на V согласованы тогда и только тогда, когда согласована пара μ_1, F и пара μ_2, F .

Поскольку $\zeta_F - \delta_F \in \mathcal{F}$, то $\nu \cdot (\zeta_F - \delta_F) \geq 0$ для любой метрики ν на V . Следовательно, равенство (2.10) выполняется тогда и только тогда, когда справедливо $\mu_i \cdot (\zeta_F - \delta_F) = 0$, $i = 1, 2$. ■

Теорема двойственности для задачи $\langle a, b | c, d \rangle$

Для доказательства этой теоремы мы будем использовать определенную форму задания мультипотока, которую назовем *второй треугольной формой*. Для этого в рассматриваемой сети $N = (V, T; c)$ число ребер $[V]^d$ удваивается; каждой неупорядоченной паре $x, y \in V$, $x \neq y$ сопоставляются два ребра: первый экземпляр: $[x, y]^1$ — потоконесущее ребро; второй экземпляр: $[x, y]^2$ — ребро-требование. Множество потоконесущих ребер обозначим $[V]_1^d$, а ребер-требований — $[V]_2^d$. Под ортом на множестве $[V]_1^d \cup [V]_2^d$ понимается функция

$$\tilde{I}_{[x,y]} : \tilde{I}_{[x,y]}(e) = \begin{cases} 1, & e = [x, y]^1, \\ -1, & e = [x, y]^2, \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (2.11)$$

а под треугольником — функция

$$\tilde{\Delta}_{xz}^y \cdot \tilde{\Delta}_{xz}^y(e) = \begin{cases} 1, & e = [x, y]^1 \text{ или } [y, z]^1, \\ -1, & e = [x, z]^2, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (2.12)$$

Будем считать, что функции c и a заданы на множестве $[V]_1^d$ (т. е. $c[x, y]^1 = c[x, y]$, $a[x, y]^1 = a[x, y]$), а функции d и b — на множестве $[V]_2^d$ (т. е. $d[x, y]^2 = d[x, y]$, $b[x, y]^2 = b[x, y]$). Функции a , b , c , d продолжим нулем на остальные элементы в $[V]_1^d \cup [V]_2^d$. Опт $\tilde{I}_{[x, y]}$ можно рассматривать как поток, занимающий единицу пропускной способности ребра $[x, y]^1$, реализующий требование 1 в ребре $[x, y]^2$, доставляющий премию $b[x, y]^2$ и получающий штраф $a[x, y]^1$, т. е. «приносящий доход» $(-a - b) \cdot \tilde{I}_{[x, y]}$. Аналогично поток-треугольник $\tilde{\Delta}_{xz}^y$ занимает единицу пропускной способности в $[x, y]^1$ и $[y, z]^1$, реализует требование 1 в $[x, z]^2$ и «приносит доход» $(-a - b) \cdot \tilde{\Delta}_{xz}^y$. Мультипотоком в сети $N = (V, T; c)$ с требованием d , заданным во второй треугольной форме, назовем совокупность взвешенных троек и ребер $\Pi = \{\pi_{xz}^y = (t_{xz}^y, \lambda_{xz}^y), \Pi_{vw} = ([v, w], \eta_{vw}); t_{xz}^y \in [V]^3, [v, w] \in [V]^d, \lambda_{xz}^y \geq 0, \eta_{vw} \leq 0\}$, такую, что

$$\theta \leq \xi(\pi) = \sum_{t_{xz}^y \in [V]} \lambda_{xz}^y \tilde{\Delta}_{xz}^y + \sum_{[v, w] \in [V]} d \eta_{vw} \quad (2.13)$$

$$I_{[v, w]} \leq c - d,$$

где θ — функция, равная 0 для $e \in [V]_1^d$ и равная $-\infty$ для $e \in [V]_2^d$. Функционал дохода для Π определяется как

$$A(\Pi) = (-a - b) \cdot \xi(\Pi). \quad (2.14)$$

Поясним смысл функции $\xi(\Pi)$. Для ребра $e = [x, y]^1 \in [V]^d$:

$$\xi[x, y]^1 = \sum_{z \neq x, y} (\lambda_{xz}^y + \lambda_{yz}^x) + \eta_{xy}, \quad (2.15)$$

а для ребра $e = [x, y]^2 \in [V]_2^d$:

$$\xi[x, y]^2 = -\sum_{z \neq x, y} \lambda_{xy}^z - \eta_{xy}, \quad (2.16)$$

т. е. для $e \in [V]_1^d$ $\xi(e)$ имеет смысл нагрузки на ребро e , а для $e = [x, y] \in [V]_2^d$ $\xi(e)$ — это мощность элементарных потоков, соединяющих x и y , взятая с обратным знаком. Заметим, что η_{vw} может иметь произвольный знак. Это позволяет сделать данную форму мультипотока эквивалентной (для стоимостных задач) функциональной форме. Для того чтобы указать способ перехода от функциональной (или цепной) формы ко второй треугольной форме достаточно продемонстрировать его для нити $\Phi_L = (L, 1)$, где $L = (x_0, e_0, x_1, e_1, \dots, x_k)$ — простая цепь. Эта нить «приносит доход» (при $x_0 \neq x_k$), равный $b[x_0, x_k] - \sum_{i=0}^{k-1} a[x_i, x_{i+1}]$. Нить Φ_L (при $x_0 \neq x_k, k > 1$) ставится в соответствие треугольный мультипоток

$$\Pi_L = \{(t_{x_i x_{i+1}}^{x_i}, 1), ([x_0, x_j], -1); i \in \overline{1, k-1}, j \in \overline{2, k-1}\} \quad (2.17)$$

(см. рис. 3), а при $k = 1$ — мультипоток $\Pi_L = \{([x_0, x_1], 1)\}$. Очевидно, функции нагрузок и мощностей, а также функционал дохода для $\{\Phi_L\}$ и Π_L одинаковы. Аналогичное построение можно провести и для нити-цикла (т. е. при $x_0 = x_k$).

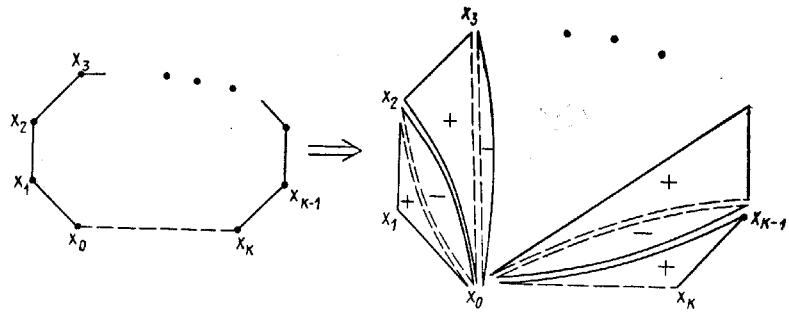


Рис. 3

Обратно, функциональный мультипоток получается из II процедурой встраивания (см. § 1 п. 4), которая уточняется следующим образом. Поток $f'' = f''_{(s'', t'')}$ встраивается в поток f' (при $\delta_{f'}[s'', t''] > 0$) в случае, если имеется «отрицательный орт» $\pi_{s''t''} = ([s'', t''], \eta_{s''t''})$, $\eta_{s''t''} < 0$ и встраиваемый подпоток имеет мощность $\min\{|\eta_{s''t''}|, \delta_{f'}[s'', t'']\}$. Процесс встраивания продолжается до тех пор, пока не исчезнут все отрицательные орты. Можно показать, что у построенного функционального мультипотока F те же значения функции нагрузки и мощности и то же значение функционала дохода в $\delta_F - \alpha F$.

Задача $\langle a, b | c, d \rangle$ с использованием второй треугольной формы может быть записана в виде следующей задачи линейного программирования (задача \mathcal{A}):

$$[x, y]^1: \zeta_{\Pi}[x, y] = \sum_{z \neq x, y} (\lambda_{xz}^y + \lambda_{yz}^x) + \eta_{xy} \leq c[x, y] |\gamma[x, y]| \quad (2.18)$$

$$[x, y]^1: -\zeta_{\Pi}[x, y] = -\sum_{z \neq x, y} (\lambda_{xz}^y + \lambda_{yz}^x) - \eta_{xy} \leq 0 |\varepsilon[x, y]| \quad (2.19)$$

$$[x, y]^2: -\delta_{\Pi}[x, y] = -\sum_{z \neq x, y} \lambda_{xy}^z - \eta_{xy} \leq -d[x, y] |\sigma[x, y]| \quad (2.20)$$

$$\lambda_{xz}^y \geq 0, \quad \eta_{xy} \leq 0 \quad (2.21)$$

$$A(\Pi) = \sum_{\substack{z \in V \\ x, z \in V}} (b[x, z] - a[x, y] - a[y, z]) \lambda_{xz}^y + \\ + \sum_{\substack{z \in V \\ x, y \in V}} d(x, y) \eta_{xy} \rightarrow \max. \quad (2.22)$$

Отнесем неравенствам (2.18), (2.19), (2.20) двойственные переменные $\gamma[x, y]$, $\varepsilon[x, y]$ и $\sigma[x, y]$, соответственно, и запишем двойственную к \mathcal{A} задачу линейного программирования \mathcal{A}^* :

$$t_{xz}^y: (\gamma[x, y] - \varepsilon[x, y]) + (\gamma[y, z] - \varepsilon[y, z]) - \sigma[x, z] \geq b[x, z] - \\ - a[x, y] - a[y, z] |\lambda_{xz}^y| \quad (2.23)$$

$$[x, y]: (\gamma[x, y] - \varepsilon[x, y]) - \sigma[x, y] = b[x, y] - a[x, y] |\eta_{xy}| \quad (2.24)$$

$$\gamma, \varepsilon, \sigma \geq 0 \quad (2.25)$$

$$A^* = \sum_{[x, y] \in V} a[x, y] \gamma[x, y] - \sum_{[x, y] \in V} d[x, y] \sigma[x, y] \rightarrow \min. \quad (2.26)$$

Обозначим $\gamma - \varepsilon$ через τ . Систему соотношений (2.23) — (2.25) можно преобразовать к следующему эквивалентному виду (с точки зрения линейного программирования):

$$t_{xz}^y: (\sigma[x, y] + b[x, y]) + (\sigma[y, z] + b[y, z]) - \\ - (\sigma[x, z] + b[x, z]) \geq 0 \quad (2.27)$$

$$[x, y]: \tau[x, y] + a[x, y] = \sigma[x, y] + b[x, y] \quad (2.28)$$

$$\tau \leq 0, \quad \sigma \geq 0. \quad (2.29)$$

Соотношения (2.27) – (2.28) означают, что функция $\mu \equiv \sigma + b$ – метрика на V и что μ также равна $\tau + a$. Функционал (2.26) можно без потери общности (считая, что $\min\{\gamma[x, y], \varepsilon[x, y]\} = 0, \forall [x, y]$) преобразовать к виду:

$$A^* \equiv (\mu - a)^+ \cdot c - (\mu - b) \cdot d \rightarrow \min. \quad (2.30)$$

Соотношения дополняющей нежесткости (критерий оптимальности) для задач \mathcal{A} и \mathcal{A}^* (в форме (2.27) – (2.30)) – следующие

$$\lambda_{xz}^y > 0 \Rightarrow \mu \cdot \Delta_{xz}^y = 0; \quad (2.31)$$

$$\mu[x, y] > b[x, y] (\Leftrightarrow \sigma[x, y] > 0) \Rightarrow \delta_{\Pi}[x, y] = d[x, y]; \quad (2.32)$$

$$\mu[x, y] > a[x, y] (\Leftrightarrow \gamma[x, y] > 0) \Rightarrow \zeta_{\Pi}[x, y] = c[x, y]; \quad (2.33)$$

$$\mu[x, y] < a[x, y] (\Leftrightarrow \varepsilon[x, y] > 0) \Rightarrow \zeta_{\Pi}[x, y] = 0. \quad (2.34)$$

Теорема двойственности линейного программирования, примененная к паре задач $\mathcal{A}, \mathcal{A}^*$, приобретает теперь вид следующей известной теоремы двойственности общей мультипотоковой задачи (с учетом установленной тождественности разных форм задания мультипотока).

Теорема 2.4. Мультипоток F^* является решением задачи $\langle a, b | c, d \rangle$ тогда и только тогда, когда найдется метрика μ^* на V , такая, что $\mu \geq b$, для которой выполняется

$$b \cdot \delta_{F^*} - a \cdot \zeta_{F^*} = (\mu^* - a)^+ \cdot c - (\mu^* - b) \cdot d (= \min_{\mu; \mu \geq b} (\mu - a)^+ \cdot c - (\mu - b) \cdot d) \quad (2.35)$$

или, что эквивалентно, выполняется следующая совокупность соотношений:

- а) мультипоток F^* и метрика μ^* согласованы, т. е. $(\zeta_{F^*} - \delta_{F^*}) \cdot \mu^* = 0$;
- б) если $\mu^*(e) > b(e)$ для некоторого $e \in [V]^d$, то $\delta_{F^*}(e) = d(e)$;
- в) если $\mu^*(e) > a(e)$ для некоторого $e \in [V]^d$, то $\zeta_{F^*}(e) = c(e)$ (т. е. ребро e насыщено мультипотоком F^*);
- г) если $\mu^*(e) < a(e)$ для некоторого $e \in [V]^d$, то $\zeta_{F^*}(e) = 0$ (т. е. ребро e свободно от мультипотока F^*). ■

Из теоремы 2.4 следуют частные теоремы двойственности и разрешимости для задач, введенных в § 1 п. 5.

А. Для задачи $\langle b | c \rangle$ следует положить функции a и d равными нулю, в результате из теоремы 2.4 получается

Теорема 2.5. Для задачи $\langle b | c \rangle$ $\max b \cdot \delta_F = \min c \cdot \mu$, где минимум берется по всем метрикам μ таким, что $\mu \geq b$. Мультипоток F^* в сети $N = (V, T; c)$ и метрика $\mu^* : \mu^* \geq b$ оптимальны (т. е. дают указанное равенство) тогда и только тогда, когда выполняется:

$$\text{мультипоток } F^* \text{ и метрика } \mu^* \text{ согласованы}; \quad (2.36)$$

$$\text{если } \mu^*(e) > b(e) \text{ для некоторого } e \in [V]^d, \text{ то } \delta_{F^*}(e) = 0; \quad (2.37)$$

$$\text{если } \mu^*(e) > 0 \text{ для некоторого } e \in [V]^d, \text{ то ребро } e \text{ насыщено } F^*. \quad (2.38)$$

В § 1 п. 5 рассматривались два частных случая задачи $\langle b | c \rangle$ – задача, в которой b есть метрика на T и задача на $\max - \Sigma$, в которой $b = \theta_U, U \subseteq [I]^d$. В этих случаях теорема 2.5 приобретает следующий вид.

Следствие 2.3. Для задачи $\langle v | c \rangle$, где v – метрика на T , выполняется

$$\max \|F\|_v = \min c \cdot \mu, \quad (2.39)$$

где μ пробегает множество метрик, для которых $\mu|_{[T]^d} = v$. Мультипоток F^* в сети $N = (V, T; c)$ и метрика $\mu^*: \mu^*|_{[T]^d} = v$ оптимальны тогда и только тогда, когда выполняются условия (2.36) и (2.38).

Будем называть S, k -метрикой такую метрику μ на V , которая принимает значение K на ребрах схемы $S = (T, U)$.

Следствие 2.4. Для задачи на $\max \Sigma \langle S | c \rangle$ со схемой $S = (T, U)$ выполняется

$$\max \|F\|_U = \min c \cdot \mu, \quad (2.40)$$

где минимум берется по всем $S, 1$ -метрикам μ . Мультипоток F^* в сети $N = (V, T; c)$ и $S, 1$ -метрика μ^* оптимальны тогда и только тогда, когда справедливы условия (2.36) и (2.38).

Обоснуем допустимость ослабления условий в формулировках следствий 2.3 и 2.4 (в первом случае вместо $\mu|_{[T]^d} \geq v$ берется $\mu|_{[T]^d} = v$, во втором — вместо $\mu(e) \geq 1, e \in U$, берется $\mu(e) = 1$). К сети $N = (V, T; c)$ добавим в первом случае всевозможные ребра $[x, y] \in [T]^d$ с $c[x, y] = 1$, а во втором случае — такие же ребра $[x, y] \in U$. Имея некоторое оптимальное решение F^* для «новой» сети можно получить не худшее, в котором по добавленным ребрам $[s, t]$ текут только потоки f_{st} . Действительно, пусть $\Phi_L = (L, a)$ — нить в F^* и пусть $L = L[s', t'] = \langle s', s, [s, t], t, t' \rangle L$. Тогда, «разорвав» нить Φ_L в полюсах s и t — т. е. заменив нить Φ_L тремя (или двумя при $t' = t$) нитями с носителями $L[s, s'], L[s, t] = (s, [s, t], t)$ и $L[t, t'] = (t, [s, t], t')$ — ввиду того, что функция цены потоков является метрикой в первом случае или θ_U — во втором, мы получим не худшее значение функционала. Следовательно, можно считать, что оптимальные решения «старой» и «новой» задач отличаются только прямыми потоками по добавленным ребрам; отсюда вытекает, что двойственная метрика μ^* , оптимальная для «новой» задачи, будет оптимальной и для «старой». Но для «новой» задачи из условия (2.37) следует: $\mu|_{[T]^d} = v$ в первом случае и $\mu(e) = 1, e \in U$ — во втором.

Определение. Метрика v на T называется *сильно-разрезной*, если для любой сети $N = (V, T; c)$ (т. е. при любом числе вершин V и любой функции $c \in \mathcal{E}_+$) существует метрика μ на V , $\mu|_{[T]^d} = v$, доставляющая минимум в правой части соотношения (2.39) и являющаяся неотрицательной линейной комбинацией метрик-разрезов: $\mu = \sum_{X \in 2^{\sim} a} (\chi_X)_X \rho_X$, $a(X) \geq 0$. Задача $\langle v, \Sigma \rangle$ с такой метрикой называется *разрезной*.

Определение [10]. Схема $S = (T, U)$ называется *разрезной* для задач на $\max \Sigma$, если для любой сети $N = (V, T; c)$ (т. е. при произвольных V и $c \in \mathcal{E}_+$) существует $S, 1$ -метрика μ , доставляющая минимум в правой части соотношения (2.40) и являющаяся неотрицательной линейной комбинацией метрик-разрезов. Задача $\langle S, \Sigma \rangle$ с такой метрикой также называется *разрезной*.

Сильно-разрезная метрика v очевидно сама является неотрицательной линейной комбинацией метрик-разрезов. Обратное неверно. В § 3 будет установлено необходимое и достаточное условие для метрики, чтобы она была сильно-разрезной. Кроме того, для задач $\langle v, \Sigma \rangle$ в случае, когда v уже представлено в виде определенной комбинации разрезов, приводятся алгоритмы решения: в § 3 — условно-эффективный алгоритм, предназначенный для целочисленных сетей, а в § 4 — эффективный алгоритм для произвольных сетей.

В работе [10] была сформулирована теорема, дающая полное описание разрезных массовых задач на тах— Σ . В § 5 будет дано принадлежащее тем же авторам конструктивное доказательство достаточности условий теоремы, а именно, будет описан алгоритм решения любой целочисленной задачи на тах— Σ , подчиняющейся этим условиям.

Б. Из теоремы 2.4 можно независимо получить доказательство японской теоремы. Действительно, задачу о допустимости $\langle c, d \rangle$ можно рассматривать как задачу $\langle 0, 0 | c, d \rangle$. Если эта задача имеет решение, то значения функционала двойственной задачи A^* ограничены снизу нулем, т. е. (см. (2.35)) $\mu \cdot c - \mu \cdot d \geq 0$, $\forall \mu \in M$. Обратно, при неразрешимости задачи $\langle c, d \rangle$ значения A^* не ограничены снизу и, в частности, найдется метрика μ , для которой $\mu \cdot c - \mu \cdot d < 0$.

В. Рассмотрим задачу $\langle a, S | c \rangle$ об отыскании в $N = (V, T; c)$ S -максимального мультипотока F (для заданной схемы S) минимальной стоимости $a \cdot \zeta_F$. Такую условную экстремальную задачу можно свести к задаче $\langle a, b | c, 0 \rangle$, где b — функция, равная некоторому (достаточно большому) числу M для $e \in U$ и равная 0 для $e \in [V]^d \setminus U$ (корректность сведений такого рода в линейном программировании хорошо известна; нижнюю оценку для числа M мы не приводим). Тогда теорема 2.4 для задачи $\langle a, S | c \rangle$ превращается в следующую теорему.

Теорема 2.6. Мультипоток F^* в сети $N = (V, T; c)$ является решением задачи $\langle a, S | c \rangle$ тогда и только тогда, когда для любого числа M , большего некоторого числа $M_0 = M_0(a, c)$, найдется такая S, M -метрика μ^* , что выполняется

$$M \cdot \sum_{u \in U} \|f_u^*\| - a \cdot \zeta_{F^*} = c(\mu^* - a)^+ = \min c(\mu - a)^+, \quad (2.41)$$

где минимум берется по всем S, M -метрикам μ . Мультипоток F^* в сети N и S, M -метрика μ^* ($M > M_0$) оптимальны тогда и только тогда, когда:

- а) мультипоток F^* и метрика μ^* согласованы;
- б) если $\mu(e) > a(e)$, то ребро e насыщено F ;
- в) если $\mu(e) < a(e)$, то e свободно от F .

В этой теореме мы допустили такое же ослабление, как и для задачи $\langle S | c \rangle$: вместо неравенства $\mu(e) \geq M$, $e \in U$, достаточно требовать $\mu(e) = M$, $e \in U$.

§ 3. ЗАДАЧА О ЗАПИРАНИИ ПОДМНОЖЕСТВ ПОЛЮСОВ И ЕЕ СЛЕДСТВИЯ

1. Постановка задачи

Как оказывается, решение многих задач о мультипотоках разрезных классов можно получить путем сведения их к задаче построения мультипотока, «запирающего» определенные подмножества полюсов сети.

Определение. Мультипоток $F = \{f_u; u \in [T]\}$ в сети $N = (V, T; c)$ называется *запирающим подмножество полюсов* $A \subset T$, если существует подмножество вершин $X \subset V$, такое, что

$$X \cap T = A, \quad \delta_F \cdot \rho_X (= \sum_{[s,t] \in [A, \bar{A}]} \|f_{st}\|) = c[X, \bar{X}] \quad (3.1)$$

(где $\bar{A} = T \setminus A$, $\bar{X} = V \setminus X$).

Нетрудно проверить, что:

А. Разрез $[X, \bar{X}]$, удовлетворяющий равенству (3.1), имеет минимальную пропускную способность среди разрезов, разделяющих A и \bar{A} :

$$c[X, \bar{X}] = \min \{c[\bar{Y}, Y]; Y \subset V, Y \subset T = A\} = c \langle A \rangle. \quad (3.2)$$

Б. равенство (3.1) выполняется тогда и только тогда, когда мультипоток F насыщает разрез $[X, \bar{X}]$ и согласован с ним (точнее, согласован с метрикой ρ_X):

$$\zeta_F \cdot \rho_X = c \cdot \rho_X (\Leftrightarrow \zeta_F(e) = c(e), \forall e \in [X, \bar{X}]), (\zeta_F - \delta_F) \cdot \rho_X = 0. \quad (3.3)$$

Заметим, что согласованность мультипотока F с разрезом $[X, \bar{X}]$ эквивалентна выполнению следующего свойства: любая потоковая нить в F пересекает разрез $[X, \bar{X}]$ не более одного раза, никакой потоковый цикл в F не пересекается с $[X, \bar{X}]$.

Разрез $[X, \bar{X}]$, $X \cap T = A$, для которого выполняется (3.2), а также множество X назовем *запирающими* подмножество A .

Лемма 3.1. Если X и Y — запирающие множества для A , то множества $Z = X \cap Y$ и $W = X \cup Y$ — также запирающие для A .

Доказательство. Можно проверить, что

$$c[X, \bar{X}] + c[Y, \bar{Y}] \geq c[Z, \bar{Z}] + c[W, \bar{W}]$$

(свойство субмодулярности функции c на структуре разрезов, разделяющих A и \bar{A}). Поскольку $Z \cap T = A$ и $W \cap T = A$, то из этого неравенства следует $c[Z, \bar{Z}] = c[W, \bar{W}] = c(A)$. ■

Следовательно, можно говорить о максимальном ($X^{\max}(A)$) и минимальном ($X^{\min}(A)$) запирающих множествах для A .

Пусть теперь $\mathcal{A} \subset 2^T$ — некоторое семейство собственных подмножеств множества T . *Задача запирания* $\langle \mathcal{A}, N \rangle$ для данной сети $N = (V, T; c)$ состоит в нахождении такого мультипотока $F = \{f_u; u \in [T]\}$ в сети N , который запирает каждое подмножество $A \in \mathcal{A}$. Рассматривая всевозможные сети $N = (V, T; c)$ с фиксированным T мы определим массовую задачу о запирании $\langle \mathcal{A}, \text{Lock} \rangle$ для заданного $\mathcal{A} \subset 2^T$.

Определение. Семейство $\mathcal{A} \subset 2^T$ называется *запираемым*, если любая задача $\langle \mathcal{A}, N \rangle \in \langle \mathcal{A}, \text{Lock} \rangle$ имеет решение.

Приведем простые примеры незапираемых семейств.

Пример 1. $T = \{1, 2, 3, 4\}$. Семейство $\mathcal{A}_4^3 = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}\}$ — незапираемо, поскольку задача $\langle \mathcal{A}_4^3, N \rangle$ не имеет решения для сети N , изображенной на рис. 4 (здесь все ребра имеют пропускную способность 1, x — внутренняя вершина сети). Несуществование требуемого мультипотока следует из того, что любая нить, исходящая

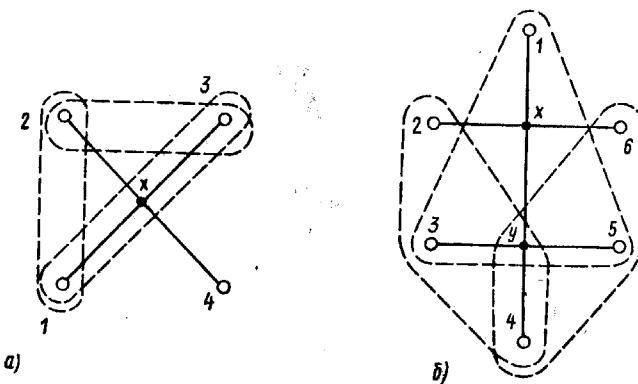


Рис. 4

из полюса 2, не может быть согласована одновременно с тремя минимальными разрезами $\rho_{\{1,2\}}, \rho_{\{2,3\}}, \rho_{\{1,x,3\}}$.

Пример 2. $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Семейство $\mathcal{A}_6^3 = \{\{2, 3, 4\}, \{4, 5, 6\}, \{1, 3, 5\}\}$ — незапираемо, поскольку задача $\langle \mathcal{A}_6^3, N \rangle$ не имеет решения для сети N на рис. 4б (здесь все ребра имеют единичную пропускную способность, x и y — внутренние вершины). Для того чтобы мультипоток F был согласован с тремя минимальными разрезами $\rho_{\{2,3,4,y\}}, \rho_{\{4,5,6,y\}}, \rho_{\{1,3,5,x,y\}}$, необходимо, чтобы любая потоковая нить с концом в полюсе 2 имела другим концом полюс 1 и аналогично для полюса 6. Но тогда ребра $[2, x]$ и $[6, x]$ не могут быть одновременно насыщены.

Определение. Подмножества $A, B \subset T$ называются *трансверсальными*, если непусто ни одно из следующих четырех подмножеств:

$$A \cap B, \bar{A} \cap B, A \cap \bar{B}, \bar{A} \cap \bar{B},$$

в противном случае A и B называются *параллельными**.

Определение. Семейство подмножеств $A \subset 2^T$ называется *k-незацепляемым*, если в \mathcal{A} не существует совокупности из k попарно трансверсальных подмножеств. В противном случае \mathcal{A} называется *k-зацепленным*.

Теорема 3.1. Семейство собственных подмножеств $\mathcal{A} \subset 2^T$ запираемо тогда и только тогда, когда оно 3-незацепляемо.

Заметим, что семейства полюсов в рассмотренных примерах 1 и 2 являются 3-зацепленными.

Задача о запирании подмножеств полюсов первоначально выкрикнула в процессе создания алгоритма для решения разрезных задач на тах — Σ , объявленного в работе [10] и излагаемого в § 5. Исследование собственно задачи о запирании, проделанное авторами, привело к доказательству теоремы 3.1, а также следствия из нее, опиравшегося на класс сильно-разрезных метрик (теорема 3.4). Доказательство необходимости условий теоремы 3.1 дается в п. 3. Доказательство достаточности следует из алгоритма решения задачи о запирании для целочисленных сетей и 3-незацепляемых семейств; этот условно-эффективный алгоритм, использующий специальный аппарат преобразования мультипотоков — D -операцию, изложен в п. 4. В § 4 будет описан алгоритм эффективного решения задачи о запирании для произвольных сетей и 3-незацепляемых семейств, принадлежащий автору настоящей статьи.

2. Свойства запирающего мультипотока

Следующая теорема описывает одно из основных свойств запирающего мультипотока, используемое при решении разрезных задач.

Теорема 3.2. Пусть мультипоток F в сети $N = (V, T; c)$ запирает каждое из подмножеств семейства $\mathcal{A} \subset 2^T$. Тогда мультипоток F является решением задачи о максимальном взвешенном мультипотоке $\langle v | c \rangle$, где v — метрика на T , представимая в виде неотрицательной линейной комбинации метрик-разрезов;

$$v = \sum_{A \in \mathcal{A}} \alpha(A) \rho_A, \quad (3.4)$$

где $\alpha(A), A \in \mathcal{A}$ — произвольные неотрицательные вещественные числа.

* Эти понятия аналогичны соответствующим понятиям для разрезов, введенным в работе [5].

Доказательство. Пусть $X(A)$ — запирающее множество для A . Согласно свойству (3.3) и ввиду леммы 2.5 для мультипотока F и метрики $\mu = \sum_{A \in \mathcal{A}} a(A) \rho_{X(A)}$ выполняются соотношения (2.36) и (2.38) (F и μ согласованы и $\mu(e) > 0 \Rightarrow \zeta_F(e) = c(e)$). Мультипоток F и метрика μ (для которой, очевидно, $\mu|_{[T]^d} = \nu$) оптимальны в силу следствия 2.3. ■

Таким образом, в случае, когда для метрики ν на T имеется разложение $\nu = \sum_{A \in 2^T} a(A) \cdot \rho_A$, $a(A) \geq 0$, решение задачи $\langle \nu | c \rangle$ можно получить, решив соответствующую задачу о запирании $\langle \mathcal{A}, N \rangle$, где $\mathcal{A} = \{A \subset 2^T; a(A) > 0\}$; попутно будет решена и любая другая задача $\langle \nu' | c \rangle$, где $\nu' = \sum_{A \in \mathcal{A}} a'(A) \rho_A$.

Задача о запирании может быть применена и для решения разрезных задач на $\max - \Sigma$ и на допустимость. Рассмотрим вначале наиболее наглядный пример построения T -максимального мультипотока, т. е. задачу на $\max - \Sigma \langle S | c \rangle$, в которой S — полный граф $K_{|T|} = (T, [T]^d)$. Такая задача названа в [10] *свободной* задачей на $\max - \Sigma$. Пусть $\mathcal{A}^1 = \{ \{s\}; s \in T \}$ — семейство всех подмножеств, состоящих из одного полюса, и пусть F — решение задачи $\langle \mathcal{A}^1, N \rangle$ для сети $N = (V, T; c)$. Семейство \mathcal{A}^1 , очевидно, 3-незацепляемое, и поэтому указанный запирающий мультипоток F существует по теореме 3.1. Используя теорему 3.2, получаем, что F является решением задачи $\langle \nu | c \rangle$ с метрикой ν на T , равной $1/2 \sum_{s \in T} \rho \{s\} = 1$. Но это означает, что задача $\langle \nu | c \rangle$ совпадает с задачей $\langle K_{|T|} | c \rangle$, т. е. мультипоток F — T -максимальный. Теорема двойственности для задач $\langle K_n, \Sigma \rangle$, $n \in \overline{2, \infty}$ приобретает теперь вид следующей теоремы Куперштоха — Черкасского.

Теорема 3.3 [14, 23]. Максимум мощности мультипотока $F = \{f_u; u \in [T]^d\}$ в сети $N = (V, T; c)$ равен минимуму из величин

$$\frac{1}{2} \sum_{s \in T} c[X_s, \bar{X}_s],$$

где X_s — разрез на V , отделяющий s от $T \setminus \{s\}$. ■

Для свободной задачи $\langle K_{|T|} | c \rangle$ оптимальная метрика μ в (2.40) есть $\frac{1}{2} \sum_{s \in T} \rho_{X(s)}$, где $[X(s), \bar{X}(s)]$ — минимальный «однополюсный» разрез ($c[X(s), \bar{X}(s)] = c(\{s\})$), т. е. схема K_n разрезна для задач на $\max - \Sigma$. В алгоритме § 5, решающем все разрезные задачи на $\max - \Sigma$ в целочисленных сетях, на начальном этапе также решается задача о запирании, причем семейство подмножеств устроено более сложно, чем в случае свободной задачи (эти семейства приближаются к запиряемым семействам общего вида). Однако «вся» разрезная задача на $\max - \Sigma$, вообще говоря, не сводится (как это было в случае свободной задачи) к решению какой-либо задачи о запирании в той же сети и требует более тонких построений. Эта недостаточность видна уже из следующего факта: любое 3-незацепляемое семейство \mathcal{A} можно пополнить однополюсными подмножествами (при этом свойство 3-незацепляемости сохранится, поскольку однополюсное множество параллельно любому другому), тогда решение дополненной задачи будет также являться решением свободной задачи, как это следует из теорем 3.2 и 3.3; следовательно, решение для любого запиряемого семейства можно искать среди T -максимальных мультипотоков. В то же время легко построить пример (уже для задачи о двух потоках), в котором никакое решение не является T -максимальным.

Важным свойством T -максимальных мультипотоков является то, что решение любой задачи $\langle v | c \rangle$, где v — метрика на T , достаточно искать среди них. В случае, когда метрика v раскладывается в неотрицательную линейную комбинацию разрезов, множество долей которых 3-незацепляемое, это непосредственно вытекает из сказанного. В общем случае это следует из способа решения свободной задачи при помощи T -операций Черкасского [23] (см. утверждение 3.3 в п. 5).

Покажем теперь, как при помощи задачи о запирании решаются разрезные задачи на допустимость с $S=K_4$ или C_5 (см. теорему 2.3).

Задача $\langle Ex, K_4 \rangle$. Пусть $T=\{1, 2, 3, 4\}$ — множество полюсов сети $N=(V, T; c)$, требование на мощность потока f_{ij} обозначим через d_{ij} . Покажем, как свести задачу $\langle Ex, K_4 \rangle$ к задаче о запирании, когда два «смежных» требования равны нулю: $d_{12}=d_{14}=0$. Надстроим сеть N «искусственными» полюсами $1', 2', 3', 4'$ и ребрами $[i, i']$, $i=1, 2, 3, 4$, для которых положим

$$c[i', i] = \sum_{j \in T \setminus \{i\}} d_{ij}, \quad i=1, 2, 3, 4. \quad (3.5)$$

В надстроенной сети $N'=(V', T'; c)$ поставим задачу о запирании с семейством из шести подмножеств $\mathcal{A}=\{\{1'\}, \{2'\}, \{3'\}, \{4'\}, \{1', 2'\}, \{1', 4'\}\}$ (см. рис. 5). Семейство \mathcal{A} , очевидно, 3-незацепляемое, поэтому для него существует запирающий мультипоток $F'=\{f'_{i'i'} ; [i', j'] \in \mathcal{E}[T']^2\}$.

3

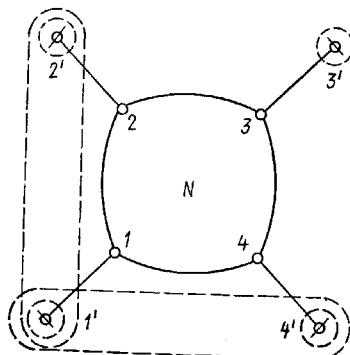


Рис. 5

Рассмотрим два случая.

A. Мультипоток F' согласован со следующими разрезами на V и насыщает их (соотношение (3.3)):

$$\rho_{\{1'\}}, \rho_{\{2'\}}, \rho_{\{3'\}}, \rho_{\{4'\}}, \rho_{\{1', 2'\}}, \rho_{\{1', 4'\}}. \quad (3.6)$$

Отсюда следует система равенств

$$\begin{aligned} \sum_{j' \in T' \setminus \{i'\}} \|f'_{i'i'}\| &= c[i', i] = \sum_{j \in T \setminus \{i\}} d_{ij}, \quad i \in \overline{1, 4}, \\ \|f'_{1'3'}\| + \|f'_{1'4'}\| + \|f'_{2'3'}\| + \|f'_{2'4'}\| &= d_{13} = d_{23} + d_{24}, \\ \|f'_{1'2'}\| + \|f'_{1'3'}\| + \|f'_{4'2'}\| + \|f'_{4'3'}\| &= d_{13} + d_{42} + d_{43}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Заметим, что по величинам $\delta_{F'} \cdot \rho_{\{i'\}}$, $\delta_{F'} \cdot \rho_{\{j'\}}$, $\delta_{F'} \cdot \rho_{\{i', j'\}}$ однозначно вычисляется величина $\|f'_{i', j'}\|$, а именно:

$$\|f'_{i', j'}\| = \frac{1}{2} \delta_{F'} \cdot (\rho_{\{i'\}} + \rho_{\{j'\}} - \rho_{\{i', j'\}}). \quad (3.8)$$

Из соотношения (3.8) для $i'=1, j'=2$ и $i'=1, j'=4$ и равенств (3.7)

получаем $\|f'_{1'2'}\| = \|f'_{1'4'}\| = 0$, и теперь из системы (3.7) непосредственно вычисляется, что $\|f'_{i'j'}\| = d_{ij}$. Искомые потоки f_{ij} являются ограничениями $f'_{i'j'}$ на сеть N .

Б. Соотношение (3.3) нарушено для некоторого разреза ρ_X из первых численных в (3.6). Тогда задача $\langle c, d \rangle$ не имеет решения. Действительно, нарушение (3.3) для ρ_X из (3.6) означает существование разреза $\rho_{X'}$, такого, что $A \equiv X \cap T = X' \cap T$ и $c \cdot \rho_X > c \cdot \rho_{X'} = c \langle A \rangle$. В то же время, если бы задача $\langle c, d \rangle$ имела решение F^* , то, очевидно, выполнялось бы $c \cdot \rho_X = \delta_{F^*} \cdot \rho_X \leq \zeta_{F^*} \rho_X \leq c \langle A \rangle$. Можно проверить, что $\rho_{X' \cap Y}$ — это как раз та метрика μ , для которой нарушено соотношение (2.2) в японской теореме.

Для решения задачи $\langle E_X, K_4 \rangle$ при произвольной функции d применяется так называемая *условная задача о запирании* $\langle \mathcal{A}, N \rangle^c$, состоящая в построении мультипотока $F = \{f_{st}; [s, t] \in [T]^d\}$,

$$\|F_A\| \equiv \sum_{[s, t] \in [A], \bar{A}} \|f_{st}\| = r(A), \quad \forall A \in \mathcal{A}, \quad (3.9)$$

для заданного набора чисел $\{r(A); A \in \mathcal{A}\}$. Условная задача о запирании разрешима в тех же случаях, что и безусловная, а именно, справедливо следующее утверждение: если семейство $\mathcal{A} \subset 2^T$ — 3-незацепляемое, то в сети $N = (V, T; c)$ существует мультипоток F , такой, что

$$\|F_A\| = \min \{r(A), c \langle A \rangle\}, \quad \forall A \in \mathcal{A} \quad (3.10)$$

(см. замечание 3.1 из п. 5). В общем случае задача $\langle c, d \rangle$ ($\text{supp}(d) \subseteq \subseteq [T]^d$, $T = \{1, 2, 3, 4, 5\}$) равносильна задаче $\langle \mathcal{A}, N \rangle^c$ с $\mathcal{A} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}\}$, $r(\{i\}) = \sum_{j \in T \setminus \{i\}} d_{ij}$, $r(\{i, j\}) = \sum_{\{p, q\} \in \{\{i, j\}, T \setminus \{i, j\}\}} d_{pq}$. Мультипоток F , решающий $\langle \mathcal{A}, N \rangle^c$, будет решением для $\langle c, d \rangle$ тогда и только тогда, когда окажется

$$\|F_{\{i\}}\| = r(\{i\}), \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad \|F_{\{1, 2\}}\| = r(\{1, 2\}), \quad \|F_{\{1, 4\}}\| = r(\{1, 4\}).$$

Задача $\langle E_X, C_5 \rangle$. Пусть полюсами сети $N = (V, T; c)$ являются $1, 2, 3, 4, 5$, а потоковая схема $S = (T, U)$ — это цикл $(1, 2, 3, 4, 5)$; требования для потоков f_{ii+1} обозначим d_{ii+1} , $i \in \overline{1, 5}$ («56» = «51»). Как и в предыдущей задаче сеть N надстраивается искусственными полюсами $1', 2', 3', 4', 5'$ и ребрами $[i', i]$, $i \in \overline{1, 5}$, для которых полагается

$$c[i', i] = d_{i-1i} + d_{ii+1}, \quad i \in \overline{1, 5} \quad (3.11)$$

(считая, что $d_{01} = d_{56} = d_{51}$). В надстроенной сети $N' = (V', T'; c')$ ставится задача о запирании с семейством из десяти множеств:

$\mathcal{A} = \{\{1'\}, \{2'\}, \{3'\}, \{4'\}, \{5'\}, \{1', 4'\}, \{4', 2'\}, \{2', 5'\}, \{5', 3'\}, \{3', 1'\}\}$ (см. рис. 6). Семейство \mathcal{A} — 3-незацепляемое, пусть F' — решение задачи о запирании. Рассмотрим два случая.

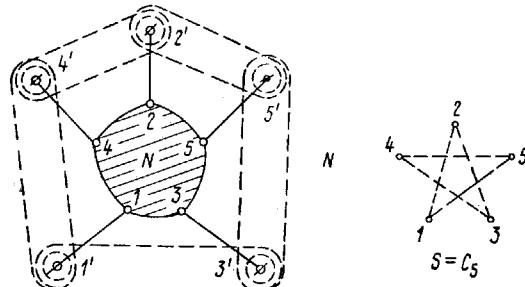


Рис. 6

А. Для мультипотока F' и следующих разрезов на V выполняется соотношение (3.3)

$$\rho_{\{1'\}}, \rho_{\{2'\}}, \rho_{\{3'\}}, \rho_{\{4'\}}, \rho_{\{5'\}}, \rho_{\{1',4'\}}, \rho_{\{4',2'\}}, \rho_{\{2',5'\}}, \rho_{\{5',3'\}}, \rho_{\{3',1'\}}. \quad (3.12)$$

Отсюда следует система равенств

$$\sum_{j' \in T \setminus \{i'\}} \|f_{i'j'}\| = c[i', i] = d_{i-1} + d_{i+1}, \quad i \in \overline{1, 5}; \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j' \in T \setminus \{i', i'+3\}} (\|f_{i'j'}\| + \|f_{i'+3j'}\|) = \\ = d_{i-1} + d_{i+1} + d_{i'+3} + d_{i'+3i'+4}, \quad i \in \overline{1, 5} \end{aligned} \quad (3.14)$$

(каждый индекс i , больший 5, приравнивается к 1—5). Чтобы убедиться, что решением системы (3.13)—(3.14) является $\|f_{ij}\| = d_{ij}$ при $[i, j] \in U$ и $\|f_{ij}\| = 0$ при $[i, j] \in [T]^d \setminus U$ воспользуемся формулой (3.8) (для $j' = i' + 3$, $i' \in \overline{1, 5}$), из которой в нашем случае получаем $\|f'_{i'i'+3}\| = 0$, $i' \in \overline{1, 5}$. Теперь система равенств (3.13)—(3.14) сводится к

$$\|f'_{i'-1i'}\| + \|f'_{i'i'+1}\| = d_{i-1} + d_{i+1}, \quad i' \in \overline{1, 5}, \quad (3.15)$$

откуда следует $\|f'_{i'i'}\| = d_{ij}$, $[i, j] \in U$. Искомый мультипоток есть ограничение F' на сети N .

Б. Соотношение (3.3) нарушено для некоторого разреза ρ_X в (3.12). Аналогично подобному случаю для задачи $\langle \text{Ex}, K_4 \rangle$ показывается, что задача $\langle c, d \rangle$ неразрешима (для разреза ρ_X в нарушено соотношение (2.2)).

В работе [13] предложен способ прямого решения задач $\langle \text{Ex}, K_4 \rangle$ и $\langle \text{Ex}, C_5 \rangle$ для целочисленных сетей.

3. Незапираемые семейства подмножеств полюсов

Дадим доказательство необходимости условий теоремы 3.1, а именно докажем

Утверждение 3.1. Если семейство подмножеств $\mathcal{A} \subset 2^T$ — 3-зацепленное, то оно незапираемое.

Для данного семейства $\mathcal{A} \subset 2^T$ его *ограниченным подсемейством* на множестве $T' \subseteq T$ будем считать произвольную совокупность $\mathcal{A}'_{T'}$, ограничений $A' = A|_{T'}$ некоторых подмножеств A из \mathcal{A} . 3-зацепленное семейство \mathcal{A} называется *критическим*, если любое его ограниченное подсемейство является 3-незацепляемым. Требуемое утверждение достаточно доказать для критических семейств \mathcal{A} . Действительно, пусть \mathcal{A} — 3-зацепленное семейство, определенное на T , $\mathcal{A}'_{T'}$ — ограниченное подсемейство в нем, являющееся критическим, и пусть $N' = (V', T'; c')$ — сеть, для которой не существует мультипотока, запирающего все подмножества в $\mathcal{A}'_{T'}$. Тогда в качестве аналогичной сети для \mathcal{A} возьмем сеть $N = (V, T; c)$, полученную из N' добавлением множества изолированных полюсов $\Delta T = T \setminus T'$ (т. е. $V = V' \cup \Delta T$, $T = T' \cup \Delta T$, $c[x, y] = 0$ при $[x, y] \in [\Delta T, V']$); если бы в N существовал мультипоток F , запирающий все подмножества в \mathcal{A} , то он был бы, очевидно, также решением для $\langle \mathcal{A}'_{T'}, N' \rangle$.

Лемма 3.2. Единственными с точностью до изоморфизма и до перехода к дополнениям множеств критическими семействами являются семейства \mathcal{A}_4^3 и \mathcal{A}_6^3 (из примеров 1 и 2).

Доказательство Пусть $\mathcal{A} \subset 2^T$ — критическое семейство, тогда, очевидно, \mathcal{A} состоит из трех подмножеств — A, B, C — и каждое мно-

жество $A^* \cap B^* \cap C^*$ (где M^* обозначает M либо $\bar{M} = T \setminus M$) содержит не более чем одну вершину. Будем для определенности считать, что $A \cap B \cap C \neq \emptyset$. Рассмотрим два случая.

А. Каждое из множеств

$$A \cap \bar{B} \cap \bar{C}, \quad B \cap \bar{C} \cap \bar{A}, \quad C \cap \bar{A} \cap \bar{B} \quad (3.16)$$

непусто. Тогда \mathcal{A} есть \mathcal{A}_4^3 ($A \cong \{1, 2\}$, $B \cong \{1, 3\}$, $C \cong \{2, 3\}$).

Б. Какое-либо из подмножеств в (3.16) пусто, предположим $A \cap \bar{B} \cap \bar{C} = \emptyset$. Так как $\bar{B} \cap \bar{C} \neq \emptyset$, то $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C} \neq \emptyset$. Поскольку $A \not\subseteq B$, то $A \cap C \cap \bar{B} \neq \emptyset$, аналогично $A \cap B \cap \bar{C} \neq \emptyset$. Если бы было $B \cap C \cap \bar{A} \neq \emptyset$, то это бы противоречило критичности \mathcal{A} , так как вершину $A \cap B \cap C$ можно было бы удалить. Следовательно, $B \cap C \cap \bar{A} = \emptyset$, и тогда из $B \not\subseteq A$ следует $B \cap \bar{A} \cap \bar{C} \neq \emptyset$ и аналогично $C \cap \bar{A} \cap \bar{B} \neq \emptyset$. Это означает, что \mathcal{A} есть \mathcal{A}_6^3 ($\bar{A} \cong \{2, 4, 6\}$, $B \cong \{2, 3, 4\}$, $C \cong \{4, 5, 6\}$). ■

Доказательство утверждения 3.1 следует из леммы 3.1 и из незапираемости семейств \mathcal{A}_4^3 и \mathcal{A}_6^3 , установленной выше.

Опираясь на утверждение 3.1, дадим доказательство необходимости условий следующей теоремы, описывающей класс сильно-разрезных метрик.

Теорема 3.4. Метрика ν на множестве T является сильно-разрезной тогда и только тогда, когда она допускает представление вида

$$\nu = \sum_{A \in \mathcal{A} \subset \mathcal{C}_2^2} r_A(A) \rho_A, \quad \forall \alpha(A) > 0 \quad (3.17)$$

такое, что семейство \mathcal{A} — 3-незацепляемое.

Доказательство необходимости. Надо доказать, что метрика ν , не представимая в указанном виде, не является сильно-разрезной. Поскольку сильно-разрезная метрика сама является неотрицательной линейной комбинацией разрезов (см. § 2 п. 3), то достаточно рассмотреть только такие метрики ν , которые имеют хотя бы одно представление (3.17). Каждому представлению (3.17) для данной метрики ν на T отвечает некоторое 3-зацепленное семейство \mathcal{A} , и таких семейств, очевидно, конечное число (мы считаем, что все подмножества в семействе \mathcal{A} различны). Пусть эти семейства составляют множество $\{\mathcal{A}_i; i \in I\}$. В соответствии с утверждением 3.1 для каждого \mathcal{A}_i существует некоторая сеть $N_i = (V_i, T; c_i)$, в которой отсутствует мультипоток, запирающий все подмножества в \mathcal{A}_i . «Склейм» сети N_i , $i \in I$ по соответствующим полюсам и в полученной сети $N = (V, I; c)$ рассмотрим произвольное решение F задачи $\langle \nu | c \rangle$, а также любую оптимальную метрику μ . Можно считать, что каждая нить мультипотока F целиком расположена в некоторой подсети N_i . Действительно, пусть, например, нить Φ_L начинается в s , кончается в t и при этом содержит в качестве промежуточной вершины некоторый полюс p : $L = \langle s, p, t \rangle L$. Разорвав Φ_L в полюсе p , мы получим мультипоток, не худший, чём F , поскольку $\nu[s, p] \cdot \|\Phi_{L[s, p]}\| + \nu[p, t] \cdot \|\Phi_{L[p, t]}\| - \nu[s, t] \cdot \|\Phi_{L(s, t)}\| = \|\Phi_L\| \cdot (\nu[s, p] + \nu[p, t] - \nu[s, t]) \geq 0$ (при $s = p$ мы считаем, что $\nu[s, p] = 0$). Мультипоток F , каждая нить которого не проходит «транзитом» через полюс, можно рассматривать как объединение мультипотоков F_i в сетях N_i , $i \in I$. Условия оптимальности (2.36), (2.38), выполняемые для пары F , μ , очевидно, должны выполняться и для каждой пары F_i , $\mu|_{V_i}$. Пусть теперь метрика μ представима в виде неотрицательной линейной комбинации разрезов:

$\mu = \sum_{X \in \mathcal{X} \subset \mathcal{L}} \nu^{\alpha}(X) \rho_X$, $\alpha(X) > 0$. Тогда в силу равенства $\mu|_T = \nu$ имеем

$$\nu = \sum_{A(X) \in \mathcal{A}(\mathcal{X}) \subset \mathcal{L}} \nu^{\alpha}(X) \rho_{A(X)},$$

где $A(X) = X \cap T$ и семейство $\mathcal{A}(\mathcal{X})$ совпадает с некоторым семейством \mathcal{A}_j в множестве $\{\mathcal{A}_i, i \in I\}$. Выполнение соотношений (2.36), (2.38) для мультипотока F_j в сети N_j и метрики $\mu|_{V_j}$ означает (ввиду леммы 2.5) их выполнение для каждой пары $F_j, \rho_{X \cap V_j} (X \in \mathcal{X})$, т. е. мультипоток F_j запирает каждое подмножество из \mathcal{A}_j в сети N_j , что невозможно по построению N_j .

Доказательство достаточности условий теоремы 3.4 дается в п. 4.5.

4. D-операция

Основной способ преобразования мультипотоков, применяемый нами — *D-операцию* опишем для мультипотоков, заданных в цепной форме (*D-операции* введены в работе [10]). Пусть $\Phi = \{\varphi_L; L \in \mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}|_T\}$ — цепной мультипоток в сети N с множеством соединений $[T]$, в котором отсутствуют нити-циклы с неотмеченными полюсами (нити вида $\varphi_{L[s,s]}$, $s \in T$, допускаются). Для произвольного $A \subset T$ определим следующие подмножества в Φ :

$$\Phi_{[A]} = \{\varphi_L \in \Phi; L \in \mathcal{L}|_{[A]}\}, \quad \Phi_A = \{\varphi_L \in \Phi; L \in \mathcal{L}|_{[A, \bar{A}]}\}. \quad (3.18)$$

Очевидно $\Phi = \Phi_{[A]} \cup \Phi_A \cup \Phi_{[\bar{A}]}$ и подмножества $\Phi_{[A]}, \Phi_A, \Phi_{[\bar{A}]}$ попарно не пересекаются. В том случае, когда все нити в Φ_A рассматриваются как ориентированные из A в \bar{A} (т. е. носителем нити $\varphi \in \Phi_A$ считается путь с началом A и концом в \bar{A}), для Φ_A применяется обозначение $\vec{\Phi}_A$.

Пусть Φ — мультипоток в сети $N = (V; T; c)$, как описано выше, и A — собственное подмножество в T . Чтобы выяснить, заперто или нет подмножество A мультипотоком Φ , воспользуемся следующей *процедурой расстановки пометок* LABEL(Φ, A), которая либо установит, что мультипоток Φ запирает A и построит минимальное запирающее множество $X(A)$, либо «укажет причину» того, что Φ не запирает A . Назовем *базой D-операции* относительно Φ и A множество вершин $B = B(\Phi, A) \subset V$, состоящее из объединения A и всех вершин, прилежащих носителям нитей в $\Phi_{[A]}$. Для каждой вершины $x \in B \setminus A$ запоминается некоторая (одна) нить $\varphi \in \Phi_{[A]} \cup \Phi_A$, обозначаемая $\varphi(x)$. Процедурой LABEL(Φ, A) строится некоторый *ориентированный лес пометок* τ , в котором тупиковыми вершинами являются все вершины из B . Пометкой при вершине $x \in \tau$ является тройка $l(x) = \{y, \psi(x), \varepsilon(x)\}$, где (x, y) — дуга в τ (для $x \in B$ полагается $y = \{\emptyset\}$), а $\psi(x)$ — это либо (a) индекс некоторой нити $\varphi \in \Phi_{[A]} \cup \Phi_A$, проходящей через x , тогда $\varepsilon(x) = \|\varphi\|$, либо (b) признак « p », означающий, что x — это полюс в A , тогда $\varepsilon(x) = \infty$, либо (b) указатель « fr », показывающий, что ребро $[x, y]$ не насыщено Φ , т. е. $\Delta_\Phi[x, y] \equiv c[x, y] - \zeta_\Phi[x, y] > 0$, тогда $\varepsilon(x) = \frac{1}{2} \cdot \Delta_\Phi[x, y]$; при наличии нескольких возможностей значение для $\varepsilon(x)$ может быть выбрано произвольно, однако признак p доминирует над остальными.

Процедура LABEL(Φ, A). В начале полагается $\tau = B$, $l(x) = \{\emptyset, p, \infty\}$ для $x \notin A$ и $l(x) = \{\emptyset, \varphi(x), \|\varphi(x)\|\}$ для $x \in B \setminus A$. Вершины в τ считаются *помеченными и непросмотренными*.

На очередном шаге выбирается произвольная помеченная и непросмотренная вершина $x \in \tau$ и перебираются все смежные с ней непомечен-

ные вершины y ($c[x, y] > 0$), после чего вершина x считается *просмотренной*. Вершина y помечается и вносится в τ в следующих случаях.

C1. Ребро $[x, y]$ — не насыщено. Полагаем $l(y) = \{x, fr, \frac{1}{2} \Delta_\Phi [x, y]\}$. В этом случае дуга (y, x) в τ называется *прямой*.

C2. Имеется нить $\Phi = (P, o) \in \vec{\Phi}_A$, такая, что $(y, x) \in P = P(s, t)$ ($(s, t) \in (A, \bar{A})$). В этом случае производится последовательный перебор вершин пути P против его ориентации, начинающийся в y и кончающийся в s ; при этом все непомеченные вершины z делаются помеченными и вносятся в τ : $l(z) = \{w, \varphi, a\}$, где w — предыдущая вершина, т. е. $(z, w) \in P$ (к моменту помечения z вершина w уже помечена). Все внесенные в τ дуги (z, w) называются *обратными*.

В обоих случаях процесс помечения (и вся процедура LABEL) оканчивается, как только очередной помеченной вершиной становится вершина $v \in B(\Phi, \bar{A})$, где $B(\Phi, \bar{A})$ — объединение \bar{A} и всех вершин, принадлежащих нитям в $\Phi_{|\bar{A}|}$. Вершина v называется *вершиной прорыва*, и процедура считается окончившейся *прорывом*.

Нормально процесс помечения оканчивается, когда все помеченные вершины оказываются просмотренными.

Лемма 3.3. Если процедура $\text{LABEL}(\Phi, A)$ не окончилась прорывом, то мультипоток Φ запирает A и множество просмотренных вершин $X(A)$ (т. е. множество вершин в τ) есть минимальное запирающее множество для A .

Доказательство. Из описания процедуры LABEL следует, что любое ребро $[x, y] \in [V]^d$, для которого $x \in X(A)$, $y \notin X(A)$, насыщено подмультипотоком Φ_A , причем носитель каждой нити в Φ_A , проходящей по ребру $[x, y]$, содержит дугу (x, y) , а не (y, x) , следовательно, каждая нить в Φ_A пересекает разрез $[X(A), \bar{X}(A)]$ ровно один раз. Отсюда вытекает, что $\delta_{\Phi_A} \cdot \rho_{X(A)} = \zeta_{\Phi_A} \cdot \rho_{X(A)} = c \cdot \rho_{X(A)}$, т. е. Φ_A запирает A и $X(A)$ — запирающее множество. Пусть Y — произвольное множество, такое, что $Y \cap T = A$, $Y \subset X(A)$. Тогда если $B \not\subseteq Y$, то найдется нить $\varphi \in \Phi_{|A|}$, не согласованная с $[Y, \bar{Y}]$, если же $B \subseteq Y$, то в τ найдется дуга $(x, y) : (y, x) \in (Y, \bar{Y})$; в случае, если дуга (x, y) — прямая, разрез $[Y, \bar{Y}]$ не насыщен, а если дуга (x, y) — обратная, то $[Y, \bar{Y}]$ не согласован с Φ_A . Во всех случаях разрез $[Y, \bar{Y}]$ не насыщен или не согласован с Φ , отсюда следует, что множество Y не запирает A . ■

В случае прорыва Φ заведомо не запирает A , поскольку, если бы существовало множество X : $X \cap T = A$, $c[X, \bar{X}] = \|\Phi_A\|$, то выполнялось бы $X \supseteq X(\tau)$ (где $X(\tau)$ — множество вершин построенного леса τ), т. е. X содержало бы вершину прорыва v , но тогда разрез $[X, \bar{X}]$ не был бы согласован с $\Phi_{|\bar{A}|}$, что приводит к противоречию.

Увеличение мультипотока Φ_A в случае, если процедура LABEL окончилась прорывом, осуществляется при помощи *D-операции*, к описанию которой мы переходим.

Пусть v — вершина прорыва. В случае, если $v \in \bar{A}$, положим $\bar{\varepsilon}(v) = \infty$. Иначе выберем произвольную нить $\varphi_L \in \Phi_{|A|}$, проходящую через v , и положим $\bar{\varepsilon}(v) = \varphi_L$, $\bar{\varepsilon}(v) = \|\varphi_L\|$.

При выполнении D-операции может быть многократно использован оператор *переключения нитей* SWITCH($\varphi^1, \varphi^2, x; sp \times tq$), состоящий в следующем. Пусть $\varphi^1 = (L^1[s, t], a^1)$ и $\varphi^2 = (L^2[p, q], a^2)$ — две нити

мультипотока Φ , имеющие общую вершину x . «Отслоим» от нитей φ^1 и φ^2 нити $\tilde{\varphi}^1 = (L^1[s, t], \tilde{a})$, $\tilde{\varphi}^2 = (L[p, q], \tilde{a})$, где $\tilde{a} = \min\{\alpha^1, \alpha^2\}$, соответственно (та из нитей φ^1 , φ^2 , мощность которой равна \tilde{a} , берется целиком). Из нитей $\tilde{\varphi}^1$ и $\tilde{\varphi}^2$, «разорвав» их в вершине x , создадим пару нитей $\varphi' = (L'[s, p], \tilde{a})$ и $\varphi'' = (L''[t, q], \tilde{a})$, где $L'[s, p] = L^1[s, x] \cdot L^2[x, p]$, $L''[t, q] = L^1[t, x] \cdot L^2[x, q]$ (см. рис. 7).

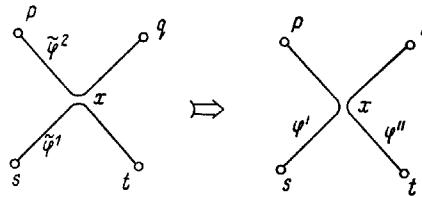


Рис. 7

При таком переключении мощности потоков Φ_{st} и Φ_{pq} уменьшаются на \tilde{a} , а мощности потоков Φ_{sp} и Φ_{tq} увеличиваются на \tilde{a} , при этом функция нагрузки ζ_Φ не изменяется. В случае, когда вершины s, t или p, q совпадают или когда вершина x встречается в нескольких местах нити φ^1 или φ^2 , способ создания нитей φ' , φ'' произволен в пределах возможных вариантов либо уточняется в тексте.

Для вершины прорыва v , пользуясь лесом пометок τ , определим ориентированный путь в τ с началом в v и концом в некоторой вершине $x_0 \in B$, и пусть $P(x_0, v)$ — противоположный ему путь. Путь $P = P(x_0, v) = (x_0, (x_0, x_1), x_1, \dots, x_k = v)$ называется *увеличивающим* путем предстоящей D -операции, а его мощностью считается величина $\varepsilon \equiv \varepsilon(P) \equiv \min\{\varepsilon(v), \varepsilon(x); x \in P\}$.

D -операция вдоль пути $P(x_0, v)$ начинается с выделения нити $\hat{\varphi}(x_0) = (\hat{L}, \varepsilon)$ в $\Phi_{[A]}$: если $x_0 \in A$, то $\hat{L} = \{x_0\}$ ($\hat{\varphi}(x_0)$ — вырожденная нить «мощности ε »); если $x_0 \in B \setminus A$, то $\hat{\varphi}(x_0)$ — это отслоенная часть нити $\varphi(x_0)$, имеющая мощность ε (если $\|\varphi(x_0)\| = \varepsilon$, то $\hat{\varphi}(x_0) = \varphi(x_0)$). Выделение $\hat{\varphi}(x_0)$ составляет *начальную итерацию* в D -операции.

Опишем *основную итерацию* в D -операции (их общее число равно k — длине пути P). Пусть перед началом i -й итерации $i \leq k$, имеется нить $\hat{\varphi} = \hat{\varphi}(x_{i-1}) = (\hat{L}^{i-1}[s, t], \varepsilon)$ мультипотока $\Phi_{[A]}$, проходящая через x_{i-1} . Рассмотрим следующие случаи.

D1. Дуга (x_i, x_{i-1}) — прямая ($l(x_i) = \{x_{i-1}, fr, \varepsilon(x_i)\}$). Тогда нить $\hat{\varphi}(x_{i-1})$ преобразуется в $\hat{\varphi}(x_i) = (\hat{L}^i[s, t], \varepsilon)$, где $\hat{L}^i[s, t] = \hat{L}^{i-1}[s, x_{i-1}] \times \times I[x_{i-1}, x_i] \cdot I[x_i, x_{i-1}] \cdot \hat{L}^{i-1}[x_{i-1}, t]$ (здесь $I[x, y] = (x, [x, y], y)$ — цепь из одного ребра), т. е. нить $\hat{\varphi}(x_{i-1})$ «протаскивается» по незаполненной мультипотоком части ребра $[x_{i-1}, x_i]$ (см. рис. 8а). Заметим, что $\zeta_\Phi[x_{i-1}, x_i]$ увеличивается на 2ε .

D2. Дуга (x_i, x_{i-1}) — обратная ($l(x_i) = \{x_{i-1}, \varphi, \varepsilon(x_i)\}$), где $\varphi = (L, \varepsilon(x_i))$, $L = L[p, q] = \langle p, x_i, [x_i, x_{i-1}], x_{i-1}, q \rangle L$, $p \in A$, $q \in \bar{A}$, причем нить φ не совпадает с элементом $\psi(x_{i-1})$ в пометке $l(x_{i-1})$. Тогда производится одна из двух возможных операций переключения: $\text{SWITCH}(\hat{\varphi}, \varphi, x_{i-1}; sp \times tq)$ либо $\text{SWITCH}(\hat{\varphi}, \varphi, x_{i-1}; sq \times tp)$. При такой операции из нитей $\hat{\varphi}$, φ (мощности ε), отслоенных от $\hat{\varphi}$ и φ образуются нити $\hat{\varphi}(x_i) = (\hat{L}^i, \varepsilon)$, $\varphi' = (L', \varepsilon)$: в первом случае $\hat{L}_i =$

$=\hat{L}^{i-1}[s, x_{i-1}] \cdot L[x_{i-1}, p]$, $L'=\hat{L}^{i-1}[t, x_{i-1}] \cdot L[x_{i-1}, q]$, а во втором—
 $\hat{L}'=\hat{L}^{i-1}[t, x_{i-1}] \cdot L[x_{i-1}, q]$, $L'=\hat{L}^{i-1}[s, x_{i-1}] \cdot L[x_{i-1}, q]$ (см. рис. 8б).
 Очевидно, нить $\hat{\varphi}(x_i)$ принадлежит $\Phi_{[A]}$ и проходит через x_i , а нить
 φ' принадлежит $\Phi_{[A]}$.

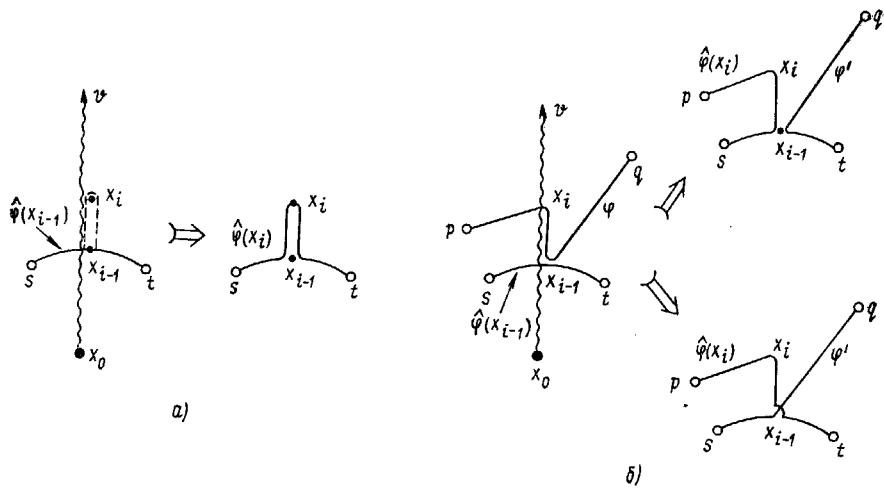


Рис. 8

D3. Дуга (x_i, x_{i-1}) —обратная $l(x_i)=\{x_{i-1}, \varphi, \varepsilon(x_i)\}$, причем нить φ совпадает с элементом $\psi(x_{i-1})$. Тогда полагается $\hat{\varphi}(x_i)=\hat{\varphi}(x_{i-1})$.

В результате выполнения основных итераций имеется нить $\hat{\varphi}=\hat{\varphi}(v)=(\hat{L}^k[s^k, t^k], \varepsilon) \in \Phi_{[A]}$. На заключительной итерации производятся следующие действия.

E1. Случай $v \notin A$. Нить $\hat{\varphi}(v)$ «разрывается» в полюсе v , образуя две нити потока $\Phi_A: \varphi'=(\hat{L}^k[s^k, v], \varepsilon)$, $\varphi''=(\hat{L}^k[v, t^k], \varepsilon)$.

E2. Случай $v \in B(\bar{A}) \setminus A$. Тогда для нитей $\hat{\varphi}$ и $\bar{\varphi}=\bar{\varphi}(v)=(\bar{L}[s, t], \varepsilon(v))$ выполняется одно из двух возможных переключений: SWITCH($\varphi, \varphi, v; s^k \bar{s} \times t^k \bar{t}$) либо SWITCH($\hat{\varphi}, \bar{\varphi}, v; s^k \bar{t} \times t^k \bar{s}$).

Корректность D-операции обосновывается следующим образом.
 1) Согласно действиям в случае C2 в процедуре LABEL любой ориентированный путь в τ содержит только сплошной участок носителя каждой нити в Φ_A . Поэтому нить $\varphi=\varphi(x_i)$, участвующая в переключении на i -й итерации вида D2, не изменилась со времени выполнения процедуры LABEL, т. е. пометка $l(x_i)$ истинна. 2) Последовательность идущих подряд итераций $i+1, i+2, \dots, i+j$ вида D3 производится для вершин пути P , принадлежащих некоторой задающей помечение нити φ . В первой вершине x_i в P , для которой $\psi(x_i)=\varphi$, была произведена итерация вида D2, после чего все вершины x_{i+1}, x_{i+2}, \dots

\dots, x_{i+j} оказались на текущей нити $\hat{\varphi} \in \Phi_{[A]}$. 3) При i -й итерации вида D1 остаточная пропускная способность $\Delta_\Phi[x_{i-1}, x_i]$ та же, что и в процессе помечения. 4) Мультипоток $\Phi_{[\bar{A}]}$ до заключительной итерации сохраняется неизменным. Таким образом, все действия в D-операции производятся над объектами, соответствующими имеющимся пометкам, т. е. корректны.

В D-операции на итерациях типа D2 и E2 может быть выбран любой из двух способов переключения без влияния на ее продолжение и

конечный результат увеличения мощности Φ_A . D -операцию, в которой безразличен выбор способов переключений, назовем *неопределенной* D -операцией.

Лемма 3.4. В результате выполнения неопределенной D -операции (т. е. при любом выборе альтернатив переключений) относительно $A \subset T$ и вдоль увеличивающего пути $P = (x_0, (x_0, x_1), x_1, \dots, x_k)$ происходит: а) увеличение мощности мультипотока Φ_A на $2\varepsilon(P)$; б) увеличение значения функции нагрузки ζ_Φ на $2\varepsilon(P)$ в ребрах $[x_{i-1}, x_i]$, $i \in \overline{1, k}$, таких, что (x_i, x_{i-1}) — прямая дуга в τ ; в остальных ребрах сети значение ζ_Φ не меняется.

Доказательство леммы, а также следствие из нее непосредственно вытекает из сказанного выше.

Следствие 3.1. Пусть сеть $N = (V, T; c)$ — целочисленная (т. е. целочисленна функция c) и Φ — мультипоток в N , такой, что мощность каждой нити в Φ кратна $1/2$ (*полузелочисленный* мультипоток), функция ζ_Φ — целочисленна. Тогда в результате выполнения D -операции относительно множества $A \subset T$: а) мощность Φ_A увеличивается не менее чем на 1, б) мультипоток Φ остается полуцелочисленным, а функция ζ_Φ — целочисленной.

5. Решение задачи о запирании

Итак, процедура LABEL позволяет выяснить, является ли мультипоток Φ запирающим для A , если нет, то при помощи D -операции мощность Φ_A может быть увеличена. Свобода в выборе переключений в процессе D -операции оказывается достаточной для того, чтобы при решении задачи $\langle \mathcal{A}, N \rangle$ с З-незацепляемым семейством \mathcal{A} не уменьшать мощность мультипотока Φ_B для запертых ранее подмножеств $B \in \mathcal{A}$. При этом, как оказывается, важно, в каком порядке запираются множества в \mathcal{A} .

Очевидно, мультипоток Φ запирает A тогда и только, когда он запирает множество \bar{A} , поэтому можно считать, что в \mathcal{A} присутствует не более одного множества из каждой пары A, \bar{A} . Скажем, что среди трех подмножеств $A, B, C \in \mathcal{A}$ B лежит между A и C , если $A^* \subset B^* \subset C^*$ при некотором способе независимого выбора A либо \bar{A} в качестве A^* , B либо \bar{B} в качестве B^* , C либо \bar{C} в качестве C^* (см. [5]). Множество B считается *крайним* в совокупности $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{A}'$, если в \mathcal{A}' не существует подмножеств A и C , между которыми лежит B . Совокупность $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ называется *правильной*, если не существует $B \in \mathcal{A}'$, лежащего между A и C : $A, C \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}'$.

Подмножества в \mathcal{A} запираются в такой последовательности, что совокупность $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$, где \mathcal{B} — множество уже просмотренных и запертых подмножеств, всегда правильная.

Пусть Φ — мультипоток в $N = (V, T; c)$, \mathcal{B} — множество уже просмотренных и запертых мультипотоком Φ подмножеств в \mathcal{A} и множество $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$ — правильное. В качестве очередного запираемого подмножества выбирается такое $A \in \mathcal{A}'$, что не существует подмножеств $B \in \mathcal{B}$ и $C \in \mathcal{A}'$, таких, что C лежит между A и B . Множество A выбирается по следующему правилу. Выберем произвольное $A^0 \in \mathcal{A}'$. Поскольку совокупность \mathcal{A}' правильная, то для множества A^{0*} , являющегося \bar{A}^0 либо A^0 , должно выполняться: в \mathcal{B} не существует множества такого, что $B \subset A^{0*}$ или $\bar{B} \subset A^{0*}$. Пусть для определенности $A^{0*} = A^0$. Если A^0 удовлетворяет сформулированному требованию, то оно и берется

в качестве очередного A . Иначе берется $A^1 \in \mathcal{A}'$, такое, что A^1 лежит между A_0 и некоторым $B \in \mathcal{B}$. Пусть для определенности $A^1 \supset A^0$. Если сформулированное требование не выполняется для A^1 , то берется нарушающее его A^2 и т. д. Для последовательности множеств A^0, A^1, A^2, \dots справедливо $A^{0*} \subset A^{1*} \subset A^{2*} \subset \dots$, причем не существует $B \in \mathcal{B}$, такого, что $B \subset A^{i*}$ или $\bar{B} \subset A^{i*}$ для некоторого i . Эта последовательность конечна, и ее последний элемент выбирается в качестве A .

Итак, пусть выбрано множество $A \in \mathcal{A}'$ (быть может $A := I \setminus A$), для которого: а) не существует $B \in \mathcal{B}$: $B \subset A$ или $\bar{B} \subset A$ и б) совокупность $\mathcal{A} \setminus \{A\}$ — также правильная. Рассмотрим выполнение D -операции относительно A вдоль увеличивающего пути $P = (x_0, (x_0, x_1), x_1, \dots, x_k = v)$. Очевидно, действия в случаях $D1, D3, E1$ не уменьшают мощности Φ_B для какого-либо $B \in \mathcal{A}$. На i -й итерации в случае $D2$ между нитями $\hat{\varphi} = (\hat{L}[s, t], \varepsilon)$, $\varphi = ([p, q], \varepsilon(x))$, $s, t, p \in A$, $q \in \bar{A}$ возможно переключение $\text{SWITCH}(\hat{\varphi}, \varphi, x_{i-1}; sp \times tq)$ либо $\text{SWITCH}(\hat{\varphi}, \varphi, x_{i-1}; sq \times tp)$. Первое переключение уменьшает мощность только такого мультипотока Φ_B , что $t, q \notin B^*$, $s, p \in B^*$, где $B^* = B$ либо \bar{B} , а второе переключение — только такого Φ_B' , $B' \in \mathcal{B}$, что $s, q \in B'^*$, $t, p \in B'^*$, где $B'^* = B'$ либо \bar{B}' (см. рис. 9). По условию выбора множества A справедливо $\bar{B}^* \not\subset A$, $\bar{B}'^* \not\subset A$, следовательно, A трансверсально B^* и A

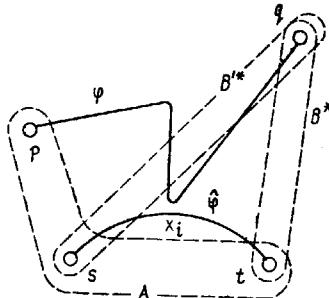


Рис. 9

трансверсально B'^* . В то же время B^* трансверсально B'^* , поскольку $q \in B^* \cap B'^*$, $t \in B^* \cap \bar{B}'^*$, $s \in \bar{B}^* \cap B'^*$, $p \in \bar{B}^* \cap \bar{B}'^*$, что противоречит 3-незацепляемости \mathcal{A} . Следовательно, по крайней мере одна из альтернатив переключения допустима. В случае $E2$ для нитей $\hat{\varphi} = (\hat{L}[s_k, t_k], \varepsilon)$, $\varphi = (\hat{L}(s, t), \varepsilon(v))$, $s_k, t_k \in A$, невозможность проведения переключений $\text{SWITCH}(\hat{\varphi}, \varphi, v; s_k s \times t_k t)$ и $\text{SWITCH}(\hat{\varphi}, \varphi, v; s_k \bar{t} \times t_k \bar{s})$ (без нарушения запираемости в \mathcal{B}) означает наличие в \mathcal{B} подмножеств B и B' (с точностью до перехода к дополнениям), таких, что $s_k \bar{s} \in B$, $t_k, \bar{t} \in B$, $s_k, \bar{t} \in B'$, $t_k, \bar{s} \notin B'$; это также противоречит 3-незацепляемости \mathcal{A} . Таким образом, справедлива

Лемма 3.5. Пусть мультипоток Φ в сети $N = (V, T; c)$ запирает правильную совокупность подмножеств $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, где \mathcal{A} — 3-незацепляемое семейство, и пусть $A \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$ — незапертое подмножество. Тогда вдоль любого увеличивающего пути P относительно A^* (где A^* выбирается из пары A, \bar{A} так, чтобы выполнялось: $\forall B \in \mathcal{B} \quad B \supset A^*$ либо $\bar{B} \supset A^*$ либо A трансверсально B) возможно такое проведение D -операции (т. е. выбор альтернатив переключений), что все величины $\|\Phi_B\|$, $B \in \mathcal{B}$ сохраняются, т. е. мультипоток Φ по-прежнему запирает \mathcal{B} ; при этом величина $\|\Phi_A\|$ увеличивается на $2\varepsilon(P) > 0$. ■

Лемма 3.5 позволяет завершить доказательство теоремы 3.1, а именно доказать

Утверждение 3.2. Пусть семейство собственных подмножеств $\mathcal{A} \subset 2^T$ 3-незацепляемое. Тогда в сети $N = (V, T; c)$ существует мультипоток Φ , запирающий каждое подмножество в \mathcal{A} .

Доказательство. Упорядочим подмножества в \mathcal{A} : $\mathcal{A} = \{A_i; i = 1, 2, \dots, |\mathcal{A}|\}$ таким образом, чтобы каждая совокупность $\mathcal{A}^i = \{A_j \in \mathcal{A}; j \geq i\}$ была правильной, что, как показано выше, всегда можно сделать. Пусть Φ — такой мультипоток в N , что: а) Φ запирает максимальную совокупность подмножеств $\mathcal{B} = \{A_1, A_2, A_3, \dots, A_k\}$, б) если $k < |\mathcal{A}|$, то величина $\|\Phi_{A_{k+1}}\|$ максимальна (такой мультипоток Φ существует, поскольку задача отыскания для данного k мультипотока Φ , все нити которого простые и который имеет максимальную величину $\|\Phi_{A_{k+1}}\|$ при условии $\|\Phi_{A_j}\| = c \langle A_j \rangle$, $1 \leq j \leq k$, будучи задачей линейного программирования, имеет решение при наличии допустимого мультипотока). Тогда по лемме 3.5 величина $\|\Phi_{A_{k+1}}\|$ при $k < |\mathcal{A}|$ может быть увеличена, следовательно, $k = |\mathcal{A}|$. ■

Утверждение 3.2 вместе с теоремой 3.2 дают доказательство достаточности условий теоремы 3.4, описывающей все сильно-разрезные метрики. Заметим, однако, что в отношении метрик на полюсах остался открытый вопрос: является ли данная метрика v на T неотрицательной линейной комбинацией метрик-разрезов, образующих 3-незацепляемую совокупность (изложенный подход к решению задачи $\langle v | c \rangle$ применим только в случае, если v уже разложена в такую линейную комбинацию). Неизвестен ответ даже на «более простой» вопрос: является ли вообще метрика v неотрицательной линейной комбинацией метрик-разрезов. Эти вопросы, как и другие вопросы характеристизации метрик, например, описание образующих минимальной грани конуса метрик, содержащей данную метрику, еще ждут своего решения.

В случае целочисленной сети $N = (V, T; c)$ на основании леммы 3.5 и следствия 3.1 описанная последовательность D -операций превращается в конечный алгоритм решения задачи о запирании $\langle \mathcal{A}, N \rangle$, где $\mathcal{A} \subset 2^T$ — 3-незацепляемое (этот алгоритм обозначим через $\text{LOCK}(\mathcal{A}, N)$).

Теорема 3.5. Алгоритм $\text{LOCK}(\mathcal{A}, N)$ решает задачу $\langle \mathcal{A}, N \rangle$ в целочисленной сети $N = (V, T; c)$ с 3-незацепляемой совокупностью $\mathcal{A} \subset 2^T$ с трудоемкостью $O(P(|V|) \Sigma_{[x,y] \in [V]} c[x, y])$, где $P(n)$ — некоторый полином от n . Найденный мультипоток является полуцелочисленным, а функция нагрузки ζ_Φ — целочисленной.

Замечание 3.1. Для решения условной задачи о запирании $\langle \mathcal{A}, N \rangle^c$ (см. п. 2) с 3-незацепляемым семейством \mathcal{A} применяется алгоритм $\text{LOCK}^c(\mathcal{A}, N, r)$, отличающийся от $\text{LOCK}(\mathcal{A}, N)$ только тем, что процедура запирания каждого множества $A \in \mathcal{A}$ останавливается, как только оказывается $\|\Phi_A\| = r(A)$. Можно убедиться, что утверждения леммы 3.5 и теоремы 3.5 (с соответствующими поправками) справедливы и для этой задачи.

Поясним справедливость оценки числа действий, приведенной в теореме. Каждая D -операция увеличивает мощность соответствующего подмультипотока по крайней мере на 1, поэтому общее число D -операций оценивается сверху как $\sum_{A \in \mathcal{A}} c \langle A \rangle$, или $|\mathcal{A}| \cdot \sum_{[x,y] \in [V]} c[x, y]$. Легко предложить такую организацию информации в задаче, при которой проведение каждой D -операции потребует не более чем полино-

миального от $|V|$ числа действий. Величина $|\mathcal{A}|$ может быть оценена как $O(|T|^2)$, что показывает следующая лемма.

Лемма 3.6. 3-незацепляемая совокупность $\mathcal{A} \subset 2^T$ различных подмножеств в T , не содержащая пар A, \bar{A} , состоит не более чем из $4p^2 + 2p$ подмножеств, где $p = |T|^*$.

Доказательство. Покажем сначала, что в совокупности $\mathcal{M} \subset 2^T$ различных попарно параллельных подмножеств, не содержащей пар A, \bar{A} , не более $2p$ подмножеств. Пусть A — крайнее множество в \mathcal{M} (такое всегда найдется) и пусть, для определенности, $\mathcal{M} \setminus \{A\} \subset \subset 2^{\bar{A}}$. Удалим из \mathcal{M} подмножество A , а из множества полюсов T исключим полюса, принадлежащие A . Легко показать, что совокупность $\mathcal{M}' = \mathcal{M} \setminus \{A\}_{T'}$ подмножеств, ограниченных на $T' = T \setminus A$, по-прежнему содержит собственные подмножества. Различные подмножества $B_1, B_2 \in \mathcal{M} \setminus \{A\}$ могут совпасть либо стать взаимодополнительными при удалении A из T , только если $B_1^* \cup B_2^* \cup A = T$, $B_1^* \cap B_2^* = B_1^* \cap A = B_2^* \cap A = \emptyset$, причем это может произойти только с одной парой в $\mathcal{M} \setminus \{A\}$. Следовательно, при удалении A множество T уменьшилось не менее чем на 1, а совокупность подмножеств, из которой исключены повторения или дополнения, — не более чем на 2, откуда $|\mathcal{M}| < 2p$.

Пусть теперь $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{A}$ — максимальная по включению совокупность попарно параллельных подмножеств. Пусть $T(A) = \{B \in \mathcal{A} : B$ трансверсально $A\}$ для $A \in \mathcal{M}$. Поскольку \mathcal{A} — 3-незацепляемая совокупность, множество $T(A)$ состоит из попарно параллельных подмножеств. Следовательно,

$$|\mathcal{A}| \leq |\mathcal{M}| + \sum_{A \in \mathcal{M}} |T(A)| \leq 2p + 4p^2. \blacksquare$$

Рассмотрим два частных случая D -операций.

Случай $A = \{s\}$, т. е. множество A — однополюсное. В этом случае преобразуемая нить φ имеет оба конца в s и все переключения выполняются произвольно. При переключениях на основных итерациях каждая участвующая нить $\varphi = (L[s, t], \varepsilon)$, $t \in T \setminus \{s\}$, переходит в нить φ' с теми же концами, т. е. до момента заключительной итерации мощности всех потоков Φ_{pq} , $[p, q] \in [T]^d$ в Φ сохраняются. На заключительной итерации из нитей $\varphi = (T(s, t), \varepsilon)$, $\bar{s}, \bar{t} \in T \setminus \{s\}$ и $\hat{\varphi} = (L[s, s], \varepsilon)$ образуются нити $\varphi' = (L'[s, \bar{s}], \varepsilon)$ и $\varphi'' = (L''[s, \bar{t}], \varepsilon)$. Таким образом, в результате D -операции относительно $\{s\}$ мощности потоков Φ_{ss} и $\Phi_{s\bar{t}}$ для некоторых $\bar{s}, \bar{t} \in T \setminus \{s\}$ увеличиваются на ε , а мощность потока $\Phi_{\bar{s}\bar{t}}$ (при $\bar{s} \neq \bar{t}$) — уменьшается на ε ; мощности остальных потоков в Φ сохраняются. В рассматриваемом случае D -операция совпадает с цепным аналогом T -операции [23], используемой для построения T -максимального мультипотока. Как отмечалось в п. 2, чтобы построить T -максимальный мультипоток в N , достаточно решить задачу о запирании $\langle \mathcal{A}, N \rangle$, где $\mathcal{A} = \{\{s\}; s \in T\}$.

Утверждение 3.3. Для любой задачи $\langle \nu | c \rangle$, где ν — метрика на T , существует T -максимальный мультипоток, ее решающий.

Действительно, пусть Φ — решение для $\langle \nu | c \rangle$, имеющее максимальную мощность $\|\Phi\|$. Если мультипоток Φ — не T -максимальный, то найдется незапертое множество $\{s\}$. Тогда при D -операции относитель-

* Эта оценка явно завышена. Есть предположение, что величина имеет верхнюю оценку, линейную от $|T|$.

но $\{s\}$ мощность $\|\Phi\|$ увеличится на $\epsilon > 0$, при этом величины $\|\Phi_{ss}\|$ и $\|\Phi_{st}\|$, $s, t \in T \setminus \{s\}$ увеличатся на ϵ , $\|\Phi_{\bar{s}, \bar{t}}\|$ (при $\bar{s} \neq \bar{t}$) уменьшится на ϵ , и значение функционала изменится на $\epsilon \cdot (\nu[s, \bar{s}] + \nu[s, \bar{t}] - \nu[\bar{s}, \bar{t}])$, т. е. не уменьшится. ■

Случай $A = \{s, t\}$, т. е. запираемое подмножество — двухполюсное. В этом случае D -операция совпадет с H -операцией, введенной в работе [13] для решения задач о допустимости со схемами K_4 и C_5 .

В заключении этого раздела докажем следующую простую лемму.

Лемма 3.7. Пусть A и B — подмножества в T , $X(A)$ и $X(B)$ — их минимальные запирающие множества в $V \supset T$. Тогда: а) если $A \subset B$, то $X(A) \subset X(B)$; б) если $A \cap B = \emptyset$, то $X(A) \cap X(B) = \emptyset$.

Доказательство. Пусть $X(A) \neq X(B)$ для $A, B: A \subset B$. Тогда для множеств $Z = X(A) \cap X(B)$, $W = X(A) \cup X(B)$ очевидно выполняется $Z \cap T = A$, $W \cap T = B$. В то же время $c[Z, \bar{Z}] + c[W, \bar{W}] = c[X(A), \bar{X(A)}] + c[X(B), \bar{X(B)}] = c \langle A \rangle + c \langle B \rangle$, откуда $c[Z, \bar{Z}] = c \langle A \rangle$, $c[W, \bar{W}] = c \langle B \rangle$, что противоречит минимальности $X(A)$. Утверждение «б» следует из утверждения «а» для подмножеств A и B .

§ 4. ЭФФЕКТИВНОЕ ПОСТРОЕНИЕ ЗАПИРАЮЩЕГО МУЛЬТИПОТОКА

1. Алгоритм для задачи $\langle \mathcal{A}, N \rangle$. Подготовительная стадия этапа

В этом параграфе будет изложен эффективный (полиномиальный от $|V|$) алгоритм решения задачи о запирании $\langle \mathcal{A}, N \rangle$, где \mathcal{A} — 3-незапираемое семейство подмножеств полюсов в сети $N = (V, T; c)$ при произвольных действительных пропускных способностях ребер $c[x, y] \geq 0$, $[x, y] \in [V]^d$. Следствием этого алгоритма будет эффективное решение разрезных задач о допустимости и экстремальных задач $\langle \nu | c \rangle$, где ν — сильно-разрезная метрика с заданным разложением на метрики-разрезы (см. § 3 п. 2 и 5).

Пусть $F = \{f_{st}; [s, t] \in [T]^d\}$ — уже имеющийся функциональный мультипоток*, запирающий подмножества некоторого подсемейства $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ (в отличие от алгоритма в § 3 п. 5 мы не требуем, чтобы совокупность $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$ была правильной). На очередном этапе алгоритма выбирается произвольное множество $A \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$, и в результате проведения этапа это множество окажется запертным, при этом также сохраняется запираемость \mathcal{B} . Этап состоит из трех стадий: подготовительной, основной и заключительной.

Подготовительная стадия. На этой стадии каждый поток f_{st} , принадлежащий мультипотоку $F_{[A]}$ либо $F_{[\bar{A}]}$ делается ациклическим (см. § 1 п. 3), т. е. выделяется такой ациклический «подпоток f'_{st} , что $f'_{st}(x, y) \leq f_{st}(x, y)$, $y(x, y) \in (V)^d$, и $\|f'_{st}\| = \|f_{st}\|$). Для выделения ациклической части потока f_{st} можно воспользоваться одним из известных алгоритмов выделения контуров ориентированного графа (например, алгоритмами [6, 44] выделения компонент сильной связности, имеющими трудоемкость $O(m+n)$, где m — число вершин, а n — число дуг графа, или более простым алгоритмом [17] с трудоемкостью $O(m+n\log n)$). Будем считать, что контур $K = (x_0, (x_0, x_1), x_1, \dots, x_k = x_0)$ потока f_{st} (т. е. $f_{st}(x_i, x_{i+1}) > 0$, $i \in 0, k-1$) выделяется за $O(n^2)$ действий. Найдя контур K , уменьшаем поток вдоль него: $f_{st}(x_i, x_{i+1}) :=$

* Потоки вида f_{ss} в алгоритме не рассматриваются.

$=f_{st}(x_i, x_{i+1})-\varepsilon$, $i \in [0, k-1]$, где $\varepsilon = \min\{f_{st}(x_j, x_{j+1}); j \in [0, k-1]\}$, при этом по крайней мере в одной из дуг контура поток станет равным 0. Таким образом, проделав не более чем n^2 таких процедур, или $O(n^4)$ действий, мы получим ациклический поток f'_{st} ; сохраним за f'_{st} прежнее обозначение f_{st} .

Пусть $f = f_{(s,t)}$ — ациклический поток в $F_{[A]} \cup F_{[\bar{A}]}$. Для каждой вершины $x \in V \setminus \{s, t\}$ определим величину

$$f(x) \equiv \sum_{y \in V} f(x, y) = \sum_{y \in V} f(y, x) \quad (4.1)$$

и введем в рассмотрение множество

$$\text{supp}^v(f) \equiv \{x \in V : f(x) > 0\} \cup \{s, t\} \quad (4.2)$$

(множество вершин, через которые «протекает» поток f). Подпотоком потока $f = f_{(s,t)}$, проходящим через вершину $x \in \text{supp}^v(f) \setminus \{s, t\}$, назовем такой поток $f'_{(s,t)} \leq f$, что $f'_{(s,t)} = f'_{(s,x)} + f'_{(x,t)}$.

Утверждение 4.1. Для ациклического потока $f = f_{(s,t)}$ максимальная мощность его подпотока $f'_{(s,t)}$, проходящего через $x \in \text{supp}^v(f) \setminus \{s, t\}$, равна $f(x)$. ■

Для работы на основной стадии алгоритма нам потребуется процедура выделения в ациклическом потоке $f = f_{(s,t)}$ подпотока $f'_{(s,t)}$, проходящего через $x \in \text{supp}^v(f) \setminus \{s, t\}$ и имеющего заданную мощность $a \leq f(x)$ (процедура $\text{SUBFLOW}(f, x, a)$).

Пусть вершины в $\text{supp}^v(f)$ перенумерованы таким образом, что для любой дуги $(x, y) : f(x, y) > 0$ вершина x имеет меньший номер, чем y (алгоритм, устанавливающий такого рода нумерацию для ациклического ориентированного графа, имеющий трудоемкость порядка числа дуг, приведен, например, в [17]). Покажем, как выделять поток $f'_{(s,x)}$. Пусть для вершины $y \in \text{supp}^v(f) \setminus \{s\}$, имеющей номер не больше, чем у

x , значения $f'_{(s,t)}(y, z)$ уже определены, а все значения $f'_{(s,t)}(w, y)$, $w \in V$ — еще не определены и при этом номер y наибольший. Положим $a(y) = \sum_{w \in V} f'_{(s,w)}(y, z)$ (для вершины x полагается $a(x) = a$). Тогда, перебирая в произвольном порядке вершины $w \in \text{supp}^v(f)$, имеющие меньший номер, чем у y , полагаем $f'_{(s,t)}(w, y) = \min\{f(w, y), \Delta\}$, здесь Δ — величина еще «не назначенного» вытекающего потока» (т. е. $\Delta = a(y) - \sum_{(w', y) \in E} f'_{(s,w')}(w', y)$, где $E = \{(w', y)\}$ — множество дуг с уже определенным значением $f'_{(s,w')}$). Легко показать, что в результате такого процесса будет построен требуемый поток $f'_{(s,x)}$. Аналогично определяется поток $f''_{(x,t)}$. Процедура $\text{SUBFLOW}(f, x, a)$, выделяющая подпоток $f'_{(s,t)} = f'_{(s,x)} + f''_{(x,t)}$, имеет трудоемкость $O(n^2)$ *.

2. Основная стадия этапа

На этой стадии мультипоток F представлен как объединение двух мультипотоков $F_{[A]}$ и $F_{[\bar{A}]}$, состоящих из ациклических потоков, и многополюсного потока \vec{g}_A . Начальный поток \vec{g}_A получается из мультипотока $\vec{F}_A = \{f_{(s,t)} ; s \in A, t \in \bar{A}\}$:

$$\vec{g}_A(x, y) \equiv \sum_{s \in A, t \in \bar{A}} f_{(s,t)}(x, y), \quad (x, y) \in (V)^d; \quad (4.3)$$

* Все оценки, приводимые в этом параграфе, будут зависеть только от $h = |V|$ и $p = |T|$, более экономные оценки через числа дугами не рассматриваются. Заметим также, что при многократном выделении подпотоков из f можно пользоваться единой (начальной) нумерацией.

его источники (т. е. вершины z , для которых $\operatorname{div}_{\vec{g}_A}(z) > 0$) принадлежат A , а стоки (т. е. вершины z , для которых $\operatorname{div}_{\vec{g}_A}(z) < 0$) принадлежат \bar{A} . Мощностью потока \vec{g}_A считается величина $\|\vec{g}_A\| \equiv \sum_{s \in A} \operatorname{div}_{\vec{g}_A}(s) = -\sum_{t \in \bar{A}} \operatorname{div}_{\vec{g}_A}(t)$. Очевидно,

$$\|\vec{g}_A\| = \|F_A\|. \quad (4.4)$$

Множество $\mathcal{B} \subset A$ уже запертых подмножеств разобьем на три части: $\mathcal{B}_{[A]} = \{B \in \mathcal{B} : B \subset A \text{ или } \bar{B} \subset A\}$; $\mathcal{B}_{[\bar{A}]} = \{B \in \mathcal{B} : B \subset \bar{A} \text{ или } \bar{B} \subset \bar{A}\}$; $\mathcal{B}_{\tau(A)} = \{B \in \mathcal{B} : B \text{ трансверсально } A\}$. Будем для определенности считать, что для любого $B \in \mathcal{B}_{[A]}$ выполняется $B \subset A$, а для любого $B \in \mathcal{B}_{[\bar{A}]}$ — $B \subset \bar{A}$. Для любого $X \subset V$ определим величины

$$\operatorname{out}(X) \equiv \sum_{s \in B \cap A, t \in \bar{B} \cap A} \|f_{st}\| + \sum_{x \in X, y \in \bar{X}} \vec{g}_A(x, y), \quad (4.5)$$

$$\operatorname{in}(X) \equiv \sum_{s \in B \cap \bar{A}, t \in \bar{B} \cap \bar{A}} \|f_{st}\| + \sum_{x \in \bar{X}, y \in X} \vec{g}_A(x, y), \quad (4.6)$$

где $B = X \cap T$, и положим

$$\operatorname{OUT}(B) \equiv \min \{\operatorname{out}(X); X \subset V, X \cap T = B\}, \quad (4.7)$$

$$\operatorname{IN}(B) \equiv \min \{\operatorname{in}(X); X \subset V, X \cap T = B\}. \quad (4.8)$$

Нетрудно проверить справедливость следующих равенств для $B \in \mathcal{B}$ и произвольного множества $X_B \subset V$, запирающего B :

$$c \langle B \rangle = \operatorname{out}(X_B) = \operatorname{OUT}(B), \quad \operatorname{in}(X_B) = \operatorname{IN}(B) = 0 \text{ для } B \in \mathcal{B}_{[A]} \quad (4.9)$$

$$c \langle B \rangle = \operatorname{in}(X_B) = \operatorname{IN}(B), \quad \operatorname{out}(X_B) = \operatorname{OUT}(B) = 0 \text{ для } B \in \mathcal{B}_{[\bar{A}]}; \quad (4.10)$$

$$c \langle B \rangle = \operatorname{in}(X_B) + \operatorname{out}(X_B) = \operatorname{IN}(B) + \operatorname{OUT}(B) \text{ для } B \in \mathcal{B}_{\tau(A)}. \quad (4.11)$$

На основной стадии рассматриваемого этапа будет произведена перестройка $F_{[A]}$, $F_{[\bar{A}]}$ и \vec{g}_A , такая, что окажется выполненным

$$\|\vec{g}_A\| = c \langle A \rangle \quad (4.12)$$

и равенства (4.9)–(4.11) сохранятся для $B \in \mathcal{B}$. При этом мы фактически нигде не будем пользоваться тем, что семейство \mathcal{A} — 3-незацепляемое. На заключительной стадии многополюсный поток \vec{g}_A снова будет превращен в мультипоток F_A и для окончательного мультипотока $F = F_A \cup F_{[A]} \cup F_{[\bar{A}]}$ будет выполняться

$$c \langle B \rangle = \|F_B\| \quad (4.13)$$

для любого $B \in \mathcal{B} \cup \{A\}$. Для возможности такого «восстановления» мультипотока F_A из \vec{g}_A будет существенным выполнение равенств (4.9)–(4.11) и тот факт, что семейство \mathcal{A} — 3-незацепляемое.

Зададим множества

$$M(A) \equiv A \cup \bigcup_{f_{st} \in F_{[A]}} \operatorname{supp}^v(f_{st}), \quad (4.14)$$

$$M(\bar{A}) \equiv \bar{A} \cup \bigcup_{f_{st} \in F_{[\bar{A}]}} \operatorname{supp}^v(f_{st}) \quad (4.15)$$

и определим величины

$$\epsilon(x) = \begin{cases} \infty, & x \in A, \\ 2 \cdot \sum_{f_{st} \in F_{[A]}} f_{st}(x), & x \in M(A) \setminus A, \end{cases} \quad (4.16)$$

$$\bar{\varepsilon}(x) = \begin{cases} \infty, & x \notin \bar{A}, \\ 2 \cdot \sum_{f_{st} \in F_{[\bar{A}]}} f_{st}(x), & x \in M(\bar{A}) \setminus \bar{A}. \end{cases} \quad (4.17)$$

Простой путь $P = (x_0, (x_0, x_1), x_1, \dots, x_k)$ с началом в вершине $x_0 \in M(A)$ называется *активным* путем (для $\vec{g}_A, F_{[A]}$), если для любого $i = 0, 1, \dots, k-1$ выполняется

$$\varepsilon(x_i, x_{i+1}) = \Delta_F[x_i, x_{i+1}] + 2\vec{g}_A(x_{i+1}, x_i) > 0, \quad (4.18)$$

где $\Delta_F[x, y]$ — остаточная пропускная способность, величина, равная $c[x, y] - (\zeta_{\vec{g}_A} + \zeta_{F_{[A]}} + \zeta_{F_{[\bar{A}]}})[x, y]$. Активный путь $P = P[x_0, x_k]$ называется *увеличивающим*, если $x_k \in M(\bar{A})$, число дуг в нем (т. е. k) считается его длиной, а величина $\varepsilon(P) = \min \{\varepsilon(x_0), \bar{\varepsilon}(x_k), \varepsilon(x_i, x_{i+1}) ; i \in \overline{0, k-1}\}$ — его пропускной способностью.

Основная стадия состоит из однотипных итераций. На очередной итерации выбирается *кратчайший* по длине увеличивающий путь $P = P(x, y) = (x = x_0, (x_0, x_1), x_1, \dots, x_k = y)$ (если увеличивающие пути вообще имеются) и производятся следующие операции:

а) если $x \in M(A) \setminus \bar{A}$, то из потоков $f_{st} \in F_{[A]} : x \in \text{supp}^v(f_{st})$ при помощи процедуры $\text{SUBFLOW}(x, f_{st}, a)$ выделяется множество подпотоков $F_{[A]}^{x,e} \equiv \{f_{st}^x = f_{sx} + f_{xt}\}$, проходящих через x и таких, что

$$\sum_{f_{st} \in F_{[A]}^{x,e}} \|f_{st}^x\| = \frac{\varepsilon(P)}{2}, \quad (4.19)$$

и каждый из потоков, участвующих в выделении, уменьшается: $f_{st} := f_{st} - f_{st}^x$;

б) если $y \in M(\bar{A}) \setminus A$, то из потоков $f_{st} \in F_{[\bar{A}]} : x \in \text{supp}^v(f_{st})$ выделяется множество подпотоков $F_{[\bar{A}]}^{y,e} \equiv \{f_{st}^y = f_{sy} + f_{yt}\}$, проходящих, через y и таких, что

$$\sum_{f_{st} \in F_{[\bar{A}]}^{y,e}} \|f_{st}^y\| = \frac{\varepsilon(P)}{2}, \quad (4.20)$$

и каждый из потоков, участвующих в выделении, уменьшается: $f_{st} := f_{st} - f_{st}^y$;

в) поток \vec{g}_A преобразуется следующим образом. Для каждого ребра $[x_i, x_{i+1}], i \in \overline{0, k-1}$, полагаем ($\varepsilon \equiv \varepsilon(P)$):

$$\vec{g}_A(x_i, x_{i+1}) := \vec{g}_A(x_i, x_{i+1}) + \varepsilon - \min \left\{ \vec{g}_A(x_{i+1}, x_i), \frac{\varepsilon}{2} \right\}, \quad (4.21)$$

$$\vec{g}_A(x_{i+1}, x_i) := \vec{g}_A(x_{i+1}, x_i) - \min \left\{ \vec{g}_A(x_{i+1}, x_i), \frac{\varepsilon}{2} \right\}. \quad (4.22)$$

Из каждого потока $f_{st} \in F_{[A]}^{x,e}$ образуется пара потоков $f'_{(s,x)}$ и $f''_{(t,x)}$ а из каждого потока $f_{st}^y \in F_{[\bar{A}]}^{y,e}$ — пара потоков $f'_{(y,s)}$ и $f''_{(y,t)}$, после чего все полученные потоки прибавляются к \vec{g}_A :

$$\vec{g}_A := \vec{g}_A + \sum_{f_{st} \in F_{[A]}^{x,e}} (f'_{(s,x)} + f''_{(t,x)}) + \sum_{f_{st} \in F_{[\bar{A}]}^{y,e}} (f'_{(y,s)} + f''_{(y,t)}). \quad (4.23)$$

Новая функция \vec{g}_A по-прежнему будет многополюсным потоком. Для того чтобы показать это, достаточно проверить условия потокового баланса для вершин из P , не являющихся полюсами (полюсами,

ввиду минимальности P , могут быть только x и y). Из (4.21), (4.22) имеем:

$$\begin{aligned} \vec{g}_A^*(x_i, x_{i+1}) - \vec{g}_A^*(x_{i+1}, x_i) &= \vec{g}_A(x_i, x_{i+1}) - \\ &\quad \vec{g}_A(x_{i+1}, x_i) + \varepsilon, \quad i \in \overline{0, k-1}, \end{aligned} \quad (4.24)$$

(здесь звездочками отмечены новые значения функции \vec{g}_A), откуда получаем

$$\begin{aligned} \text{div}_{\vec{g}_A^*}(x_i) &= \sum_{v \in V \setminus \{x_i\}} (\vec{g}_A^*(x_i, v) - \vec{g}_A^*(v, x_i)) = \\ &= \sum_{v \in V \setminus \{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}} (\vec{g}_A^*(x_i, v) - \\ &\quad - \vec{g}_A(v, x_i)) + (\vec{g}_A^*(x_i, x_{i-1}) - \vec{g}_A^*(x_{i-1}, x_i)) + (\vec{g}_A^*(x_i, x_{i+1}) - \\ &\quad - \vec{g}_A^*(x_{i+1}, x_i)) = \sum_{v \in V \setminus \{x_i\}} (\vec{g}_A(x_i, v) - \vec{g}_A(v, x_i)) = \text{div}_{\vec{g}_A}(x_i) = 0, \\ &\quad i \in \overline{1, k-1}. \end{aligned}$$

Из равенства (4.24) также следует, что если бы не было увеличения функции \vec{g}_A , определенного в (4.23), то дивергенция в вершине x увеличилась бы на ε , а в вершине y — уменьшилась на ε (при $x \neq y$). Прибавления в (4.24) уменьшают дивергенцию в x (при $x \notin A$) на сумму мощностей потоков $f'_{(s, x)}$, $f'_{(t, x)}$, согласно (4.19) равную ε , т. е. в x восстанавливается потоковый баланс. Аналогичное происходит для y (при $y \notin \bar{A}$). Из сказанного следует также, что

$$\|\vec{g}_A^*\| = \|\vec{g}_A\| + \varepsilon. \quad (4.25)$$

Требуется проверить, кроме того, что для измененных $F_{[A]}$, $F_{[\bar{A}]}$ и \vec{g}_A не превыщены ограничения пропускных способностей ребер. Легко видеть, что изменение значений функции нагрузки могло произойти только для ребер $[x_i, x_{i+1}]$, $i \in \overline{0, k-1}$. Из (4.21), (4.22) получаем:

$$\zeta_{\vec{g}_A^*}[x_i, x_{i+1}] - \zeta_{\vec{g}_A^*}[x_i, x_{i+1}] = \varepsilon - \min\{2\vec{g}_A(x_{i+1}, x_i), \varepsilon\}$$

и при $\varepsilon \leq 2\vec{g}_A(x_{i+1}, x_i)$ получаем $\zeta_{\vec{g}_A^*}[x_i, x_{i+1}] - \zeta_{\vec{g}_A^*}[x_i, x_{i+1}] = 0$ (увеличения нагрузки в $[x_i, x_{i+1}]$ не произошло, поток в (x_i, x_{i+1}) увеличился, а в (x_{i+1}, x_i) — уменьшился на $\varepsilon/2$), а при $\varepsilon > 2\vec{g}_A(x_{i+1}, x_i)$, ввиду (4.18) и того, что $\varepsilon \leq \varepsilon(x_i, x_{i+1})$, получаем

$$\zeta_{\vec{g}_A^*}[x_i, x_{i+1}] - \zeta_{\vec{g}_A^*}[x_i, x_{i+1}] \leq \Delta_F[x_i, x_{i+1}] \quad (4.26)$$

(т. е. увеличение нагрузки в $[x_i, x_{i+1}]$ не превышает остаточной пропускной способности). Итак, мы показали, что новая функция \vec{g}_A — это многополюсный поток (с источниками в A и стоками в \bar{A}) и что пропускные способности ребер сети не превышены.

Сходимость алгоритма основной стадии и оценка числа итераций. Основная стадия оканчивается, как только для очередных \vec{g}_A , $F_{[A]}$ и $F_{[\bar{A}]}$ будут отсутствовать увеличивающие пути. В этом случае для

множества X конечных вершин, достижимых всевозможными активными путями, будет выполняться: $M(A) \subseteq X$, $M(\bar{A}) \cap X = \emptyset$ и $\vec{g}_A(z, w) = c[z, w], \forall z \in X, w \in \bar{X}$, откуда следует справедливость равенства (4.12).

Доказательство конечности числа итераций основной стадии и оценка этого числа по существу такие же, как и для известных алгоритмов построения максимального потока с помощью кратчайших увеличивающих путей (см., например, [1] гл. 1). Разделим итерации на два типа: а) случай $\varepsilon(P) = \varepsilon(x)$ или $\varepsilon(P) = \varepsilon(y)$ (итерация 1-го типа), б) случай $\varepsilon(P) < \varepsilon(x)$, $\varepsilon(P) < \varepsilon(y)$ (итерация 2-го типа). Пусть k — длина кратчайшего увеличивающего пути данной итерации. Образуем граф G^k , выделив из N все вершины и дуги, принадлежащие увеличивающим путям длины k . Как и для задачи о максимальном потоке, показывается, что в результате итерации по крайней мере одна дуга в G^k перестанет принадлежать увеличивающим путям длины k , в то же время граф G^k не обогатится новыми дугами. На итерации 2-го типа из G^k исчезнет дуга $(x_i, x_{i+1}) \in P$, для которой выполняется $\varepsilon(x_i, x_{i+1}) = \varepsilon(P)$ (как следует из (4.18), (4.21), (4.22), (4.26) для нее станет $\vec{g}_A^*(x_i, x_{i+1}) = c[x_i, x_{i+1}]$, т. е. новое $\varepsilon(x_i, x_{i+1})$ равно 0). На итерации 1-го типа при $\varepsilon(P) = \varepsilon(x)$ вершина x перестанет принадлежать $M(A)$ и исчезнет из G^k , а при $\varepsilon(P) = \varepsilon(y)$ из G^k исчезнет y . В результате не более n^2 итераций граф G^k перестанет существовать (длина кратчайшего увеличивающего пути возрастет). Таким образом, общее число итераций на основной стадии не более n^3 .

Доказательство соотношений (4.9) — (4.11). В доказательстве используется следующая

Лемма 4.1. Для любых $F_{[A]}, F_{[\bar{A}]}$, \vec{g}_A и любого $B \subset T$ величина $\text{out}(X) - \text{in}(X)$ постоянна для $X \subset V: X \cap T = B$.

Доказательство. Очевидно, надо доказать независимость от X ($X \cap T = B$) величины $\sum_{(x,y) \in (X, \bar{X})} \vec{g}_A(x, y) - \sum_{(x,y) \in (\bar{X}, X)} \vec{g}_A(x, y)$. Но эта величина равна $\sum_{s \in B} \text{div}_{\vec{g}_A}(s) = \text{const}(B, \vec{g}_A)$. ■

Следствие 4.1. Для множества $X \subset V: X \cap T = B$ выполняется $\text{out}(X) = \text{OUT}(B)$ тогда и только тогда, когда $\text{in}(X) = \text{IN}(B)$. Таким множеством X является множество, для которого величина $\zeta_{\vec{g}_A} \cdot \rho_X$ минимальна. ■

Докажем сначала сохранение соотношений (4.9). Соотношение (4.9) для $B \in \mathcal{B}_{\tau(A)}$ эквивалентно выполнению равенства согласно лемме 4.1:

$$c \langle B \rangle = \sum_{s \in B, t \in \bar{B}} \|f_{st}\| + \sum_{s \in B} \text{div}_{\vec{g}_A}(s). \quad (4.27)$$

Слагаемые в правой части (4.27) могут измениться, только если в $F_{[A]}^{x, \varepsilon}$ имеется поток f_{st}^x , такой, что $s \in B$ либо $t \in \bar{B}$ (заметим, что для любого множества $X(B)$, запирающего B , из (4.9) следует, что увеличивающий путь P не пересекается с $X(B)$, откуда невозможно $s, t \in B$, но это не так важно). При уменьшении величины $\|f_{st}\|$ на $\|f_{st}^x\|$ согласно (4.23) произойдет увеличение $\text{div}_{\vec{g}_A}(s)$ либо $\text{div}_{\vec{g}_A}(t)$ на ту же величину $\|f_{st}^x\|$. Таким образом, равенство (4.9) доказано. Аналогично доказывается сохранение (4.10).

Докажем теперь сохранение (4.11). Проделаем это для одной итерации (с использованием прежних обозначений). Пусть $X \subset V$ — некото-

рое множество, такое, что $X \cap T = B$, $B \in \mathcal{B}_{\tau(A)}$. На основании следствия 4.1 достаточно показать, что величина

$$\Sigma_{[s,t] \in [B,\bar{B}]} \|f_{st}\| + \zeta_{\vec{g}_A} \cdot \rho_X \quad (2.28)$$

в результате итерации не уменьшилась. Из (4.21), (4.22) для ребер пути P следует $\zeta_{\vec{g}_A} [x_i, x_{i+1}] \geq \zeta_{\vec{g}_A} [x_i, x_{i+1}]$. Пусть теперь в $F_{[A]}^{x,e}$ или в $F_{[A]}^{y,e}$ имеется поток f_{st}^α ($\alpha = x$ либо y), такой, что $[s, t] \in [B, \bar{B}]$. Тогда при его вычитании из f_{st} первое слагаемое в (2.28) уменьшится на $\|f_{st}^\alpha\|$. В то же время второе слагаемое возрастет на величину $\zeta_{f_{st}^\alpha} \cdot \rho_X \geq \zeta_{f_{st}^\alpha} \cdot \rho_X > \|f_{st}^\alpha\|$. Все сказанное доказывает сохранение равенств (4.11).

3. Заключительная стадия этапа

На этой стадии по многополюсному потоку \vec{g}_A будет восстановлен некоторый мультипоток \vec{F}_A , так что совокупный мультипоток $F = F_A \cup \bigcup F_{[A]} \cup F_{[\bar{A}]}$ будет запирающим для семейства $\mathcal{B} \cup \{A\}$. Прежде всего для мультипотока $\vec{F}_A = \{f_{(s,t)}; (s, t) \in (A, \bar{A})\}$ будет выполнено

$$\begin{aligned} \Sigma_{(s,t) \in (A, \bar{A})} f_{(s,t)}(x, y) &\leq \vec{g}_A(x, y), \quad \forall (x, y) \in (V)^d, \\ \text{и} \quad \text{div}_{\vec{F}_A}(s) &\equiv \Sigma_{q \in \bar{A}} \|f_{(s,q)}\| = \text{div}_{\vec{g}_A}(s), \quad \text{div}_{\vec{F}_A}(t) \equiv -\Sigma_{p \in A} \|f_{(p,t)}\| = \\ &= -\text{div}_{\vec{g}_A}(t), \quad \forall s \in A, t \in \bar{A}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Из (4.29), ввиду имеющегося равенства (4.27), для $B \in \mathcal{B}_{[A]} \cup \mathcal{B}_{[\bar{A}]}$ будет справедливо $c \langle B \rangle = \Sigma_{[s,t] \in [B, \bar{B}]} f_{st}$, где f_{st} — потоки в F . Для множества A на основании (4.12) и (4.29) также будет выполняться: $c \langle A \rangle = \Sigma_{[s,t] \in [A, \bar{A}]} f_{st}$. Таким образом при любом восстановленном из \vec{g}_A мультипотоке \vec{F}_A (с соблюдением (4.29)) все подмножества в $\mathcal{B}_{[A]} \cup \mathcal{B}_{[\bar{A}]} \cup \{A\}$ окажутся запертыми (некоторое восстановление можно легко получить при помощи процедуры потокового разложения, примененной к \vec{g}_A ; см. замечание 1.1). Однако нетривиальность проблемы восстановления состоит в том, чтобы получить запираемость для подмножеств в $\mathcal{B}_{\tau(A)}$, и здесь будет существенно свойство 3-незацепляемости семейства A , а также выполнение (4.11). Задача восстановления, очевидно, будет решена, если для каждого $B \in \mathcal{B}_{\tau(A)}$ окажется (см. (4.5) — (4.8)):

$$\text{OUT}(B) - \Sigma_{[p,q] \in [AB, A\bar{B}]} \|f_{pq}\| = \Sigma_{(s,t) \in (AB, A\bar{B})} \|f_{(s,t)}\|, \quad (4.30)$$

$$\text{IN}(B) - \Sigma_{[p,q] \in [\bar{A}B, \bar{A}\bar{B}]} \|f_{pq}\| = \Sigma_{(s,t) \in (\bar{A}B, \bar{A}\bar{B})} \|f_{(s,t)}\| \quad (4.31)$$

(здесь MN — обозначение для $M \cap N$) или, иными словами:

$$\begin{aligned} g \langle B, \bar{B} \rangle &\equiv \min \{\vec{g}_A(X, \bar{X}); X \subset V, X \cap T = B\} = \\ &= \Sigma_{(s,t) \in (AB, A\bar{B})} \|f_{(s,t)}\|, \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} g \langle B, \bar{B} \rangle &\equiv \min \{\vec{g}_A(X, \bar{X}); X \subset V, X \cap T = B\} = \\ &= \Sigma_{(s,t) \in (\bar{A}B, \bar{A}\bar{B})} \|f_{(s,t)}\|. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Определим ориентированную сеть $N_g(V, T; g)$, где g — функция пропускной способности дуг:

$$g(x, y) \equiv \vec{g}_A(x, y), \quad (x, y) \in (V)^d. \quad (4.34)$$

Задачу восстановления можно рассматривать как задачу о построении в сети N_g мультипотока $\vec{F} = \{f_{(s,t)}; (s, t) \in (AB, \bar{AB}) \cup (\bar{AB}, \bar{AB})\}$, удовлетворяющего ограничениям пропускных способностей

$$\sum_{f_{(s,t)} \in \vec{F}} f_{(s,t)}(x, y) \leq g(x, y), \quad (x, y) \in (V)^d, \quad (4.35)$$

а также равенствам (4.32)–(4.33) для любого $B \in \mathcal{B}_{\tau(A)}$. Будем считать, что $g(x, s) = 0, \forall x \in V, s \in A$ и $g(t, x) = 0, \forall x \in V, t \in \bar{A}$ (если это свойство верно для потока \vec{g}_A в начале основной стадии, то это будет верно и для конечного \vec{g}_A). Благодаря этому мы можем рассматривать мультипотоки общего вида $\vec{F} = \{f_{(s,t)}; (s, t) \in (T)^d\}$ (поскольку любой поток $f_{(s,t)}$ с $t \in A$ либо с $s \in \bar{A}$ имеет нулевую мощность) и формулировать задачу восстановления как задачу отыскания в N_g мультипотока $\vec{F} = \{f_{(s,t)}; (s, t) \in (T)^d\}$, удовлетворяющего равенствам (для любого $B \in \mathcal{B}_{\tau(A)}$):

$$\begin{aligned} \sum_{(s,t) \in (B, \bar{B})} \|f_{(s,t)}\| &= g \langle B, \bar{B} \rangle, \quad \sum_{(s,t) \in (\bar{B}, B)} \|f_{(s,t)}\| = \\ &= g \langle \bar{B}, B \rangle. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Рассмотрим более общую постановку задачи.

Определение. Ориентированная потоковая сеть $\vec{N} = (V, T; g)$ называется *сбалансированной*, если

$$\sum_{y \in V \setminus \{x\}} g(x, y) = \sum_{z \in V \setminus \{x\}} g(z, x), \quad \forall x \in V \setminus T. \quad (4.37)$$

Мультипоток $\vec{F} = \{f_{(s,t)}; (s, t) \in (V)^d\}$ в сети \vec{N} считается запирающим некоторое подмножество полюсов $B \subset T$, если для него выполняется соотношение (4.36).

Ориентированная задача о запирании. $\langle \tilde{\mathcal{B}}, \vec{N} \rangle_{bd}$. В сбалансированной ориентированной сети $\vec{N} = (V, T; g)$ для данного семейства подмножеств полюсов $\tilde{\mathcal{B}} \subset 2^T$ построить мультипоток $\vec{F} = \{f_{(s,t)}; (s, t) \in (V)^d\}$, запирающий каждое из подмножеств $B \in \tilde{\mathcal{B}}$.

Следующее соотношение аналогично содержащемуся в следствии 4.1:

$$g(X, \bar{X}) = g \langle B, \bar{B} \rangle \Leftrightarrow g(\bar{X}, X) = g \langle \bar{B}, B \rangle, \quad (4.38)$$

где $X \subset V : X \cap T = B$.

Таким образом можно говорить о множестве $X \subset V$, запирающем $B \subset T$.

Множество задач $\langle \tilde{\mathcal{B}}, \vec{N} \rangle_{bd}$ с фиксированным семейством $\tilde{\mathcal{B}} \subset 2^T$ и при произвольных сбалансированных сетях \vec{N} обозначим $\langle \tilde{\mathcal{B}}, \text{Lock} \rangle$. Подобно неориентированному аналогу семейство $\tilde{\mathcal{B}}$ считается *запираемым* (для сбалансированных ориентированных сетей), если каждая задача в $\langle \tilde{\mathcal{B}}, \text{Lock} \rangle$ имеет решение.

Теорема 4.1. Семейство $\tilde{\mathcal{B}} \subset 2^T$ запираемо (для сбалансированных ориентированных сетей) тогда и только тогда, когда подмножества в $\tilde{\mathcal{B}}$ попарно параллельны.

Доказательство необходимости следует из минимального контрпримера на рис. 10 (здесь $T = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{B} = \{1, 2\}, \{1, 4\}$, все 4 дуги имеют равные пропускные способности). Несуществование решения для изображенной сети очевидно.

Доказательство достаточности дается в п. 4. Доказательством служит эффективный алгоритм решения задачи $\langle \tilde{\mathcal{B}}, \tilde{N} \rangle_{bd}$ для произвольной

сбалансированной сети $\tilde{N} = (V, T; g)$, его трудоемкость — $O(|\tilde{\mathcal{B}}| p^2 n^5)$, где $n = |V|$, $p = |T|$.

В рассматриваемой задаче восстановления семейство $\tilde{\mathcal{B}}_{\tau(A)}$ как раз удовлетворяет условиям теоремы 4.1. Таким образом алгоритм из п. 4 построит в сети N_g мультипоток, удовлетворяющий (4.36) для любого $B \in \tilde{\mathcal{B}}_{\tau(A)}$.

Подсчитаем оценку числа действий этапа. На подготовительной стадии потоки в $F_{[A]}$ и $F_{[\bar{A}]}$ делаются ациклическими, что требует $O(p^2 n^4)$ действий. На основной стадии производится $O(n^3)$ итераций, причем наиболее трудоемкой частью итерации является выделение мультипотоков $F_{[A]}^{x,e}$ и $F_{[\bar{A}]}^{y,e}$ при помощи процедуры SUBFLOW, что требует $O(p^2 n^2)$ действий. Отсюда оценка трудоемкости $O(p^2 n^6)$. Анонсированная оценка трудоемкости заключительной стадии — $O(|\tilde{\mathcal{B}}_{\tau(A)}| p^2 n^5)$ или согласно лемме 3.6 — $O(p^3 n^6)$. Общее число этапов алгоритма решения задачи $\langle A, N \rangle$, равное $|A|$, согласно той же лемме может быть оценено как $O(p^2)$. Отсюда мы получаем окончательную оценку трудоемкости алгоритма — $O(p^5 n^5)$.

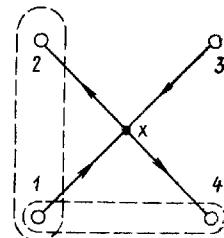


Рис. 10

4. Алгоритм решения задачи $\langle \tilde{\mathcal{B}}, \tilde{N} \rangle_{bd}$

Декомпозиция задачи. Пусть в семействе $\tilde{\mathcal{B}}$ попарно параллельных подмножеств есть подмножество C , лежащее между некоторыми двумя подмножествами B' , $B'' \in \tilde{\mathcal{B}}$. Тогда производится сведение задачи $\langle \tilde{\mathcal{B}}, \tilde{N} \rangle_{bd}$ к двум задачам меньшего размера. Пусть X — некоторое запирающее множество для C . Образуем сети $N^X =$

$$= (V^X, T^X; g^X) \text{ и } N^{\bar{X}} = (V^{\bar{X}}, T^{\bar{X}}; g^{\bar{X}}), \text{ где}$$

$$V^X \equiv X \cup \{s^X, t^X\}, \quad T^X \equiv C \cup \{s^X, t^X\},$$

$$g^X(x, y) = \begin{cases} g(x, y), & \text{при } x, y \in X, \\ \sum_{z \in \bar{X}} g(z, y), & \text{при } x = s^X, \\ \sum_{z \in \bar{X}} g(x, z), & \text{при } y = t^X, \end{cases} \quad (4.39)$$

$$V^{\bar{X}} \equiv \bar{X} \cup \{s^{\bar{X}}, t^{\bar{X}}\}, \quad T^{\bar{X}} \equiv \bar{C} \cup \{s^{\bar{X}}, t^{\bar{X}}\},$$

$$g^{\bar{X}}(x, y) = \begin{cases} g(x, y), & \text{при } x, y \in \bar{X}, \\ \sum_{z \in X} g(z, y), & \text{при } x = s^{\bar{X}}, \\ \sum_{z \in X} g(x, z), & \text{при } y = t^{\bar{X}}. \end{cases} \quad (4.40)$$

Очевидно, что

$$g^X(X, \{s^X, t^X\}) = g^{\bar{X}}(\{s^{\bar{X}}, t^{\bar{X}}\}, \bar{X}) = g(C, \bar{C}),$$

$$g^X(\{s^X, t^X\}, X) = g^{\bar{X}}(\bar{X}, \{s^{\bar{X}}, t^{\bar{X}}\}) = g(\bar{C}, C) \quad (4.41)$$

(рис. 11). На множестве T^X определим семейство

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^X &= \{C\} \cup \{B^X : B^X = B, B \in \tilde{\mathcal{B}}, B \subset C\} \cup \\ &\cup \{B^X : B^X = B \setminus \bar{C} \cup \{s^X, t^X\}, B \in \tilde{\mathcal{B}}, \bar{B} \subset C\}, \end{aligned} \quad (4.42)$$

а на множестве $T^{\bar{X}}$ — семейство

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^{\bar{X}} &= \{\bar{C}\} \cup \{B^{\bar{X}} : B^{\bar{X}} = B, B \in \tilde{\mathcal{B}}, B \subset \bar{C}\} \cup \\ &\cup \{B^{\bar{X}} : B^{\bar{X}} = B \setminus C \cup \{s^X, t^X\}, B \in \tilde{\mathcal{B}}, \bar{B} \subset \bar{C}\}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

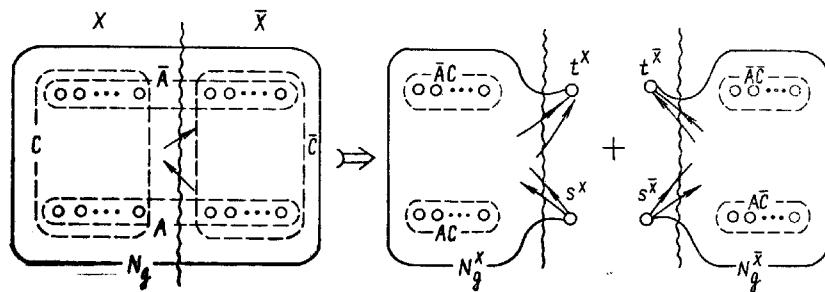


Рис. 11

Пользуясь леммой 3.7 и (4.38), можно показать, что

$$g^X(B^X, \bar{B}^X) = g(B, \bar{B}), \quad g^X(\bar{B}^X, B^X) = g(\bar{B}, B),$$

для $B \in \tilde{\mathcal{B}} : B \subset C$ или $\bar{B} \subset \bar{C}$, (4.44)

$$g^{\bar{X}}(B^{\bar{X}}, \bar{B}^{\bar{X}}) = g(B, \bar{B}), \quad g^{\bar{X}}(\bar{B}^{\bar{X}}, B^{\bar{X}}) = g(\bar{B}, B),$$

для $B \in \tilde{\mathcal{B}} : B \subset \bar{C}$ или $\bar{B} \subset C$. (4.45)

Лемма 4.2. Пусть задачи $\langle \mathcal{B}^X, N^X \rangle_{bd}$ и $\langle \mathcal{B}^{\bar{X}}, N^{\bar{X}} \rangle_{bd}$ имеют решения. Тогда задача $\langle \tilde{\mathcal{B}}, \bar{N} \rangle_{bd}$ также имеет решение.

Доказательством служит следующий алгоритм INKUP построения требуемого решения $\vec{F} = \{f_{(s, t)} : (s, t) \in (T)^d\}$ из решений $F^X = \{f_{(s, t)}^X : (s, t) \in (T^X)^d\}$ и $F^{\bar{X}} = \{f_{(s, t)}^{\bar{X}} : (s, t) \in (T^{\bar{X}})^d\}$ для задач $\langle \mathcal{B}^X, N^X \rangle_{bd}$ и $\langle \mathcal{B}^{\bar{X}}, N^{\bar{X}} \rangle_{bd}$, соответственно. В сетях N^X и $N^{\bar{X}}$, соответственно, образуем пары многополюсных потоков:

$$h_{in}^X = \sum_{p \in T^X \setminus \{s^X, t^X\}} f_{(s^X, p)}^X, \quad h_{out}^X = \sum_{q \in T^X \setminus \{s^X, t^X\}} f_{(q, t^X)}^X, \quad (4.46)$$

$$h_{in}^{\bar{X}} = \sum_{p \in T^{\bar{X}} \setminus \{s^{\bar{X}}, t^{\bar{X}}\}} f_{(s^{\bar{X}}, p)}^{\bar{X}}, \quad h_{out}^{\bar{X}} = \sum_{q \in T^{\bar{X}} \setminus \{s^{\bar{X}}, t^{\bar{X}}\}} f_{(q, t^{\bar{X}})}^{\bar{X}}. \quad (4.47)$$

Из (4.41) следует, что

$$\|h_{out}^X\| = g^X(X, \{s^X, t^X\}) = g(C, \bar{C}) = g^{\bar{X}}(\{s^{\bar{X}}, t^{\bar{X}}\}, \bar{C}) = \|h_{in}^{\bar{X}}\|, \quad (4.48)$$

$$\|h_{in}^X\| = g^X(\{s^X, t^X\}, X) = g(\bar{C}, C) = g^{\bar{X}}(\bar{X}, \{s^{\bar{X}}, t^{\bar{X}}\}) = \|h_{out}^{\bar{X}}\|. \quad (4.49)$$

Положим $f_{(s, t)} = f_{(s, t)}^X$, $(s, t) \in (C)^d$ и $f_{(s, t)} = f_{(s, t)}^{\bar{X}}$, $(s, t) \in (\bar{C})^d$. Для того чтобы получить потоки $f_{(s, t)}$, $(s, t) = (C, \bar{C}) \cup (\bar{C}, C)$, «склеим» потоки

h_{out}^X и $h_{\text{in}}^{\bar{X}}$ в многополюсный поток h^1 (с источниками в C и стоками в \bar{C}), а потоки h_{in}^X и $h_{\text{out}}^{\bar{X}}$ — в h^2 (с источниками в \bar{C} и стоками в C) — здесь мы используем свойства (4.48), (4.49):

$$h^1(x, y) = \begin{cases} h_{\text{out}}^X(x, y), & \text{при } x, y \in X, \\ h_{\text{in}}^{\bar{X}}(x, y), & \text{при } x, y \in \bar{X}, \\ g(x, y), & \text{при } (x, y) \in (X, \bar{X}), \\ 0, & \text{при } (x, y) \in (\bar{X}, X), \end{cases}$$

$$h^2(x, y) = \begin{cases} h_{\text{in}}^X(x, y), & \text{при } x, y \in X, \\ h_{\text{out}}^{\bar{X}}(x, y), & \text{при } x, y \in \bar{X}, \\ g(x, y), & \text{при } (x, y) \in (\bar{X}, X), \\ 0, & \text{при } (x, y) \in (X, \bar{X}). \end{cases} \quad (4.50)$$

Наконец, при помощи процедуры потокового разложения из h^1 образуем семейство потоков $\{f_{(s, t)}; (s, t) \in (C, \bar{C})\}$, а из h^2 — семейство потоков $\{f_{(s, t)}; (s, t) \in (\bar{C}, C)\}$, для которых будет выполняться

$$\begin{aligned} \sum_{p \in \bar{C}} \|f_{(s, p)}\| &= \text{div}_{h^1}(s), \quad \sum_{q \in C} \|f_{(q, s)}\| = -\text{div}_{h^2}(s), \quad \forall s \in C, \\ \sum_{p \in C} \|f_{(s, p)}\| &= \text{div}_{h^2}(s), \quad \sum_{q \in \bar{C}} \|f_{(q, s)}\| = -\text{div}_{h^1}(s), \quad \forall s \in \bar{C}. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Используя (4.44), (4.45), нетрудно показать, что окончательный мультипоток $\vec{F} = \{f_{(s, t)}; (s, t) \in (T)^d\}$ решает задачу $\langle \tilde{\mathcal{B}}, \vec{N} \rangle_{bd}$.

Оценим число действий процедуры LINKUP. На образование потоков h_{in}^X , h_{out}^X , $h_{\text{in}}^{\bar{X}}$, $h_{\text{out}}^{\bar{X}}$ и далее на построение h^1 , h^2 и $f_{(s, t)}$, $(s, t) \in (C)^d \cup \cup (\bar{C})^d$ требуется $O(p^2n^2)$ действий. Процедура потокового разложения h^1 и h^2 , применяемая для создания потоков $f_{(s, t)}$, $(s, t) \in (C, \bar{C}) \cup (\bar{C}, C)$, имеет оценку $O(n^3 + p^2n^2)$. Таким образом оценка трудоемкости процедуры LINKUP (для сети с числом полюсов p и числом вершин n) — $O(n^3 + p^2n^2)$.

Свободная задача о запирании на сбалансированной сети. Используя метод декомпозиции и опираясь на лемму 4.2, сведем исходную задачу о запирании к некоторой совокупности задач $\langle \tilde{\mathcal{B}}, \vec{N} \rangle_{bd}$, где $\tilde{\mathcal{B}}$ — семейство попарно параллельных разрезов, в котором никакое подмножество не лежит между какими-нибудь двумя другими, т. е. $\tilde{\mathcal{B}} \setminus \{B\} \subset 2^{\tilde{\mathcal{B}}}$ либо $2^{\tilde{\mathcal{B}}}$, $\forall B \in \tilde{\mathcal{B}}$ (для простоты мы сохраняем прежние обозначения). Будем для определенности считать, что для любого $B \in \tilde{\mathcal{B}}$ $\tilde{\mathcal{B}} \setminus \{B\} \subset 2^{\tilde{\mathcal{B}}}$, иначе говоря $B' \cap B'' = \emptyset$, для любой пары B', B'' различных подмножеств в $\tilde{\mathcal{B}}$.

Относительно мультипотока \vec{F} , решающего задачу $\langle \tilde{\mathcal{B}}, \vec{N} \rangle_{bd}$, можно предполагать, что любая нить в нем пересекается с множеством полюсов T только в своих концевых вершинах; поэтому задача $\langle \tilde{\mathcal{B}}, \vec{N} \rangle_{bd}$ эквивалентна соответствующей задаче на сети, полученной из \vec{N} стягиванием (отождествлением) каждого подмножества $B \in \tilde{\mathcal{B}}$ в один полюс s_B , а также стягиванием множества полюсов $T \setminus U_{B \in \tilde{\mathcal{B}}} B$ (если оно не пусто) также в один полюс.

Следовательно, без потери общности можно считать, что $\tilde{\mathcal{B}}$ — семейство всех однополюсных подмножеств в T , т. е. $\tilde{\mathcal{B}} = \{\{s\}; s \in T\}$. Задача состоит в построении в сети $\vec{N} = (V, T; g)$ мультипотока

$\vec{F} = \{f_{(s,t)}; (s,t) \in (T)^d\}$, такого, что

$$\begin{aligned}\Sigma_{p \in T \setminus \{s\}} \|f_{(s,p)}\| &= g \langle \{s\}, T \setminus \{s\} \rangle, \\ \Sigma_{q \in T \setminus \{s\}} \|f_{(q,s)}\| &= g \langle T \setminus \{s\}, \{s\} \rangle, \quad \forall s \in T.\end{aligned}\tag{4.52}$$

Мы дадим эффективный алгоритм решения рассматриваемой задачи о запирании, т. е. построения мультипотока, удовлетворяющего (4.52).

Пусть мультипоток \vec{F} в сети \vec{N} уже запирает подмножества $\tilde{\mathcal{B}}' = \{\{s\}; s \in T' \subset T\}$. Очередной этап состоит в перестройке \vec{F} в такой мультипоток \vec{F}^* , который запирает еще и некоторое выбранное $\{s\}$ ($s \in T \setminus T'$).

На подготовительной стадии этапа образуются два многополюсных потока

$$h_{\text{out}} \equiv \Sigma_{p \in T \setminus \{s\}} f_{(s,p)} \text{ и } h_{\text{in}} \equiv \Sigma_{q \in T \setminus \{s\}} f_{(q,s)}. \tag{4.55}$$

Рассмотрим совокупность ненасыщенных дуг $W = \{(x,y) \in (V)^d; \Delta g(x,y) = g(x,y) - \Sigma_{(s,t) \in (T)^d} f_{(s,t)}(x,y) > 0\}$. Очевидно, функция Δg — сбалансированная. Справедливо следующее простое

Утверждение 4.2. Если $\text{div}_{\Delta g}(p) > 0$ для некоторого $p \in T$, то существует путь с началом в p и концом в некотором $q \in T \setminus \{p\}$, все дуги которого ненасыщены. Если $\text{div}_{\Delta g}(p) < 0$, то существует а наложенный путь с концом p и началом $q \in T \setminus \{p\}$. ■

Применив к функции Δg процедуру потокового разложения, получим разложение $\Delta g = \Sigma \alpha(P) \theta_P + \Sigma \beta(K) \theta_K$, $\alpha(P), \beta(K) > 0$, где $P = P(p,q)$ ($(p,q) \in (T)^d$) — некоторый путь, а K — некоторый контур. Каждый элемент разложения $\alpha(P) \theta_P$ (где $P = P(p,q)$) прибавим к «своему» потоку $f_{(p,q)}$, а циркуляцию $\Sigma \beta(K) \theta_K$ прибавим к потоку h_{out} . Для нового мультипотока $\vec{F} = \{h_{\text{out}}, h_{\text{in}}, h_{(p,q)}; (p,q) \in (T \setminus \{s\})^d\}$ все дуги будут насыщены.

В каждом потоке $h_{(p,q)} \in \vec{F}$ выделяем его ациклическую часть $f'_{(p,q)} (\|f'_{(p,q)}\| = \|f_{(p,q)}\|, f'_{(p,q)} \leq f_{(p,q)})$, аналогично тому, как это делается на подготовительной стадии этапа основного алгоритма (п. 1). Циркуляцию $f_{(p,q)} - f'_{(p,q)}$ прибавляем к h_{out} .

Общая трудоемкость подготовительной стадии — $O(|T|^2 \cdot |V|^4)$.

Основная стадия этапа. Итак, в результате подготовительной стадии получен мультипоток $\vec{F} = \{h_{\text{out}}, h_{\text{in}}, f_{(p,q)}, (p,q) \in (T)^d\}$, по-прежнему запирающий все подмножества $\{t\}$, $t \in T'$ и такой, что все дуги сети насыщены, а все потоки $f_{(p,q)} \in \vec{F}$ — ациклические. Обозначим через $M(\bar{s})$ множество $\cup_{p,q \in T \setminus \{s\}} \text{supp}^v(f_{(p,q)})$ и положим $\bar{\epsilon}(x) = \infty$ для $x \in T \setminus \{s\}$ и $\bar{\epsilon}(x) = \Sigma_{p,q \in T \setminus \{s\}} f_{(p,q)}(x)$ для $x \in M(\bar{s}) \setminus T$.

Активным путем будем считать путь $P = P(s,y) = (s = x_0, (x_0, x_1), x_1, \dots, x_k = y)$, в котором для любой дуги (x_i, x_{i+1}) выполняется

$$\epsilon(x_i, x_{i+1}) \equiv h_{\text{out}}(x_{i+1}, x_i) + h_{\text{in}}(x_i, x_{i+1}) > 0. \tag{4.56}$$

Увеличивающим путем считается такой активный путь $P(s,y)$, что $y \in M(\bar{s})$.

Лемма 4.3. При отсутствии увеличивающих путей мультипоток \vec{F} запирает $\{s\}$.

Доказательство. Рассмотрим множество X вершин, достижимых активными путями. Тогда для любой дуги $(z, w) \in (X, \bar{X})$ выпол-

няется $h_{\text{out}}(z, w) = g(z, w)$, а для любой дуги $(z, w) \in (\bar{X}, X) - h_{\text{in}}(z, w) = g(z, w)$, кроме того, $X \cap T = \{s\}$. Следовательно, $\|h_{\text{out}}\| = \|g(X, \bar{X})\| = g(\bar{X}, X) = g(T \setminus \{s\}, \{s\})$. ■.

В случае если множество увеличивающих путей не пусто, выбирается кратчайший по числу дуг увеличивающий путь $P = P(s, y) = (s = x_0, (x_0, x_1), x_1, \dots, x_k = y)$ и вычисляется его пропускная способность

$$\varepsilon \equiv \varepsilon(P) \equiv \min \{\varepsilon(y), \varepsilon(x_i, x_{i+1}); i = \overline{0, k-1}\}. \quad (4.57)$$

Вдоль P производятся следующие изменения потоков h_{out} и h_{in} :

$$\begin{aligned} h_{\text{out}}^*(x_i, x_{i+1}) &= h_{\text{out}}(x_i, x_{i+1}) + \min \{\varepsilon, h_{\text{in}}(x_i, x_{i+1})\}, \\ h_{\text{out}}^*(x_{i+1}, x_i) &= h_{\text{out}}(x_{i+1}, x_i) - \max \{0, \varepsilon - h_{\text{in}}(x_i, x_{i+1})\}, \\ h_{\text{in}}^*(x_i, x_{i+1}) &= \max \{0, h_{\text{in}}(x_i, x_{i+1}) - \varepsilon\}, \\ h_{\text{in}}^*(x_{i+1}, x_i) &= h_{\text{in}}(x_{i+1}, x_i) + \max \{0, \varepsilon - h_{\text{in}}(x_i, x_{i+1})\}. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Из (4.58), ввиду (4.56), (4.57), следует неотрицательность $h_{\text{out}}^*(x_{i+1}, x_i)$, а также

$$h_{\text{out}}^*(x_i, x_{i+1}) + h_{\text{in}}^*(x_i, x_{i+1}) = h_{\text{out}}(x_i, x_{i+1}) + h_{\text{in}}(x_i, x_{i+1}), \quad (4.59)$$

$$h_{\text{out}}^*(x_{i+1}, x_i) + h_{\text{in}}^*(x_{i+1}, x_i) = h_{\text{out}}(x_{i+1}, x_i) + h_{\text{in}}(x_{i+1}, x_i); \quad (4.59)$$

$$h_{\text{out}}^*(x_i, x_{i+1}) - h_{\text{out}}^*(x_{i+1}, x_i) = h_{\text{out}}(x_i, x_{i+1}) - h_{\text{out}}(x_{i+1}, x_i) + \varepsilon, \quad (4.60)$$

$$h_{\text{in}}^*(x_i, x_{i+1}) - h_{\text{in}}^*(x_{i+1}, x_i) = h_{\text{in}}(x_i, x_{i+1}) - h_{\text{in}}(x_{i+1}, x_i) - \varepsilon \quad (4.60)$$

(здесь звездочкой помечены новые значения величин). Равенства (4.59) означают сохранение насыщенности дуг (x_i, x_{i+1}) и (x_{i+1}, x_i) , $i \in \overline{0, k-1}$. Из равенств (4.60) следует, что

$$\begin{aligned} \text{div}_{h_{\text{out}}^*}(x_i) &= \begin{cases} \text{div}_{h_{\text{out}}}(x_i), & \text{при } i \in \overline{1, k-1}, \\ \text{div}_{h_{\text{out}}}(x_i) + \varepsilon, & \text{при } x_i = s, \\ \text{div}_{h_{\text{out}}}(x_i) - \varepsilon, & \text{при } x_i = y, \end{cases} \\ \text{div}_{h_{\text{in}}^*}(x_i) &= \begin{cases} \text{div}_{h_{\text{in}}}(x_i), & \text{при } i \in \overline{1, k-1}, \\ \text{div}_{h_{\text{in}}}(x_i) - \varepsilon, & \text{при } x_i = s, \\ \text{div}_{h_{\text{in}}}(x_i) + \varepsilon, & \text{при } x_i = y. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.61)$$

В случае $y \in T \setminus \{s\}$ мы получили увеличение мощностей h_{in} и h_{out} на ε , при этом все остальные потоки в \vec{F} сохранились.

Пусть $y \in M(\bar{s}) \setminus \{T \setminus \{s\}\}$. В этом случае, пользуясь процедурой SUBFLOW, из потоков $f_{(p,q)} \in \vec{F}$, $p, q \in T \setminus \{s\}$, таких, что $\text{supp}^y(f_{(p,q)}) \ni y$, выделим совокупность подпотоков $F_{e,y} = \{f_{(p,q)}^y = f'_{(p,y)} + f''_{(y,q)}; p, q \in T \setminus \{s\}\}$, проходящих через y и имеющих суммарную мощность ε . Уменьшим функции $f_{(p,q)}$ на $f''_{(p,q)}$ и увеличим функции h_{out} и h_{in} :

$$h_{\text{out}} := h_{\text{out}} + \sum_{p \in T \setminus \{s, t\}} f''_{(p,y)}, \quad h_{\text{in}} := h_{\text{in}} + \sum_{p \in T \setminus \{s, t\}} f'_{(p,y)}. \quad (4.62)$$

Тогда в вершине y и для h_{out} и для h_{in} восстановится потоковый баланс. В результате в рассматриваемом случае мы получили увеличение мощностей потоков h_{out} и h_{in} на ε , при этом суммарная мощность потоков $f_{(p,q)}$ уменьшилась на ε . Нетрудно проверить, что для каждого полюса $t \in T \setminus \{s\}$ величины $\sum_{p \in T \setminus \{s, t\}} \|f_{(t,p)}\| + \text{div}_{h_{\text{in}}}(t)$,

$\Sigma_{q \in T \setminus \{s\}} \|f_{(q,t)}\| - \text{div}_{h_{\text{out}}}(t)$ остались теми же самыми, откуда следует сохранение запираемости для всех подмножеств $\{t\}$, $t \in T'$.

Так же, как и в основном алгоритме (п. 2), для данного способа преобразования мультипотока при помощи кратчайших увеличивающих путей можно доказать его конечность и оценить общее число итераций через $O(|V|^3)$. Таким образом в результате основной стадии будет построен мультипоток $\vec{F} = \{h_{\text{out}}, h_{\text{in}}, f_{(p,q)}; (p, q) \in (T \setminus \{s\})^d\}$, по-прежнему запирающий все подмножества $\{t\}$, $t \in T'$ и такой, что $\|h_{\text{out}}\| = g \langle \{s\}, T \setminus \{s\} \rangle$, $\|h_{\text{in}}\| = g \langle T \setminus \{s\}, \{s\} \rangle$. На заключительной стадии этапа многополосные потоки h_{out} и h_{in} раскладываются в совокупности потоков $\{f_{(s,p)}; p \in T \setminus \{s\}\}$ и $\{f_{(q,s)}; q \in T \setminus \{s\}\}$, соответственно, при этом будет выполнено:

$$\begin{aligned} \|h_{\text{out}}\| &= \Sigma_{p \in T \setminus \{s\}} \|f_{(s,p)}\|, \quad \|h_{\text{in}}\| = \Sigma_{q \in T \setminus \{s\}} \|f_{(q,s)}\|; \\ \|f_{(s,p)}\| &= -\text{div}_{h_{\text{out}}}(p), \quad \|f_{(p,s)}\| = \text{div}_{h_{\text{in}}}(p), \quad \forall p \in T \setminus \{s\}. \end{aligned}$$

Оценка трудоемкости алгоритма для задачи восстановления. Как было указано выше, число итераций основной стадии этапа решения свободной задачи о запирании оценивается как $O(|V|^3)$. Наиболее трудоемкой на итерации является процедура выделения семейства $F^e v$, ее оценка — $O(|T|^2 \cdot |V|^2)$. Следовательно, для трудоемкости основной стадии мы имеем оценку $O(|T|^2 \cdot |V|^5)$. Подготовительная и заключительная стадии этапа имеют заметно меньшую трудоемкость. Поскольку общее число этапов равно $|T|$, мы имеем оценку для алгоритма решения свободной задачи о запирании — $O(|T|^3 \cdot |V|^5)$.

Первоначальная задача о запирании $\langle \mathcal{B}_{\tau(A)}, \vec{N} \rangle_{bd}$, равносильная задаче восстановления (на заключительной стадии этапа основного алгоритма), была сведена к решению некоторого числа свободных задач о запирании $\langle \mathcal{B}_i, \vec{N}_i \rangle$, $i \in I$ с параметрами $p_i = |T_i|$, $n_i = |V_i|$. Нетрудно видеть, что величины $\Sigma_{i \in I} p_i$ и $\Sigma_{i \in I} n_i$ имеют порядок p и n , соответственно. Заметим также, что процедура сращивания LINKUP имеет существенно меньшую трудоемкость, чем решение свободной задачи о запирании с теми же параметрами.

Из всего сказанного следует справедливость оценки $O(p^3 n^5)$, анонсированной выше, для заключительной стадии этапа основного алгоритма.

О целочисленности и полуцелочисленности решений. Пусть в рассмотренной задаче о запирании сеть \vec{N} — целочисленная. Тогда, как видно из алгоритма, на все стадиях строящийся мультипоток оказывается целочисленным (при условии, конечно, что используемая процедура разложения представляет целочисленный поток в виде целочисленных нитей). Следовательно, справедлива

Теорема 4.3. Пусть ориентированная сбалансированная сеть $\vec{N} = (V, T, g)$ — целочисленная, и семейство $\mathcal{B} \subset 2^T$ состоит из попарно параллельных подмножеств. Тогда задача о запирании $\langle \mathcal{B}, \vec{N} \rangle_{bd}$ имеет целочисленное решение. ■

Пусть теперь целочисленна сеть N для исходной задачи о запирании $\langle \mathcal{A}, N \rangle$. Согласно теореме 3.5 эта задача имеет полуцелочисленное решение. Можно проверить, что для того, чтобы описываемый алгоритм на всех стадиях давал полуцелочисленный мультипоток, достаточно поддерживать остаточные пропускные способности всегда целочисленными. Целочисленность остаточных пропускных способностей может нарушиться только на подготовительной стадии при выделении из по-

луцелочисленного потока его ациклической части; в этом случае остаточные пропускные способности некоторых ребер могут стать полуцелыми. Для восстановления целочисленности надо поступать следующим образом. После окончания подготовительной стадии выделим множество ребер W , остаточные пропускные способности которых полуцелые, но не целые. Можно заметить, что множество W порождает эйлеров граф, не содержащий полюсов, т. е. представляется в виде объединения ребер простых циклов $\{C\}$ на внутренних вершинах. Вдоль каждого такого цикла C назначим циклический поток величины $1/2$ и все эти потоки прибавим к g_A . Таким образом остаточные пропускные способности вновь станут целочисленными, и в целом алгоритм для целочисленных сетей будет строить полуцелочисленное решение.

§ 5. РЕШЕНИЕ РАЗРЕЗНЫХ ЗАДАЧ НА MAX— Σ

1. Описание разрезных схем. Свойства решения

Пусть $S = (T, U)$ — потоковая схема в задаче на max— Σ $\langle S, \Sigma \rangle$. *Антикликой* графа S назовем некоторое максимальное по включению независимое множество его вершин (см. [19]), т. е. такое множество $A \subset T$, что $x, y \in A \Rightarrow [x, y] \notin U$ и $z \notin A \Rightarrow \exists x \in A : [x, z] \in U$. Обозначим через \mathcal{A}_S множество всех антиклик графа S .

Теорема 5.1. Схема $S = (T, U)$, не содержащая изолированных полюсов, является разрезной для задач на max Σ тогда и только тогда, когда семейство антиклик \mathcal{A}_S — 3-незацепляемое.

Доказательство необходимости условий теоремы 5.1 составляет предмет изложения статьи [II] из настоящего сборника. Здесь же мы докажем достаточность условий этой теоремы, а именно, конструктивно докажем следующую теорему.

Теорема 5.2. Пусть схема S — 3-незацепляемая*. Тогда она является разрезной для задач на max- Σ .

Образуем *граф пересечений антиклик* Γ_S , вершины которого суть антиклики в S , а ребра — пары пересекающихся антиклик.

Утверждение 5.1. Если S не содержит изолированных полюсов, то свойство $A \cap B \neq \emptyset$ ($A, B \in \mathcal{A}_S$) эквивалентно трансверсальности A и B .

Доказательство очевидно.

Утверждение 5.2. Если схема S — 3-незацепляемая, то в графе Γ_S нет циклов длины 3.

Действительно, пусть три различные антиклики A, B, C таковы, что $C' = A \cap B \neq \emptyset$, $B' = A \cap C \neq \emptyset$, $A' = B \cap C \neq \emptyset$. Тогда либо $A \cap B \cap C \neq \emptyset$, что согласно утверждению 5.1 противоречит 3-незацепляемости S , либо $C' \cap C = \emptyset$ и тогда антиклика D , содержащая независимое множество $A' \cup B' \cup C'$, не совпадает ни с A ни с B ни с C , что опять-таки ведет к противоречию с 3-незацепляемостью S . ■

Из утверждений 5.1 и 5.2 следует

Утверждение 5.3. Для схемы S без изолированных полюсов следующие свойства эквивалентны:

а) схема S — 3-незацепляемая;

б) каждая вершина в S принадлежит не более чем двум антикликам;

в) граф Γ_S не содержит треугольников.

* Под 3-незацепляемостью схемы S будет пониматься 3-незацепляемость семейства \mathcal{A}_S . При этом будем предполагать, что в S нет изолированных полюсов.

Определение. Схема S называется *четной* (по антикликам), если все циклы в Γ_S — четные (т. е. граф Γ_S — двудольный), и *нечетной*, если в Γ_S имеется нечетный цикл.

Следствием излагаемого ниже алгоритма \mathcal{Y} будет

Теорема 5.3. 1) Пусть схема $S = (T, U)$ — 3-незацепляемая и четная. Тогда для задачи $\langle S | c \rangle$ имеется оптимальная* $S, 1$ -метрика μ , имеющая вид

$$\mu = \frac{1}{2} \sum_{A \in \mathcal{A}_S} \rho_{X(A)}, \quad (5.1)$$

где $X(A)$ — подмножество V , такое, что $X(A) \cap T \subseteq A$, и выполняется: $X(A) \cap X(B) = \emptyset$, $\forall A, B \in \mathcal{A}_S (A \neq B)$ и $\bigcup_{A \in \mathcal{A}_S} X(A) \supseteq T$. При этом, если сеть $N = (V, T; c)$ — целочисленная, то задача $\langle S | c \rangle$ имеет полуцелочисленное решение.

2) Пусть схема $S = (T, U)$ — 3-незацепляемая и нечетная. Тогда для задачи $\langle S | c \rangle$ имеется оптимальная $S, 1$ -метрика μ вида

$$\mu = \frac{1}{4} \sum_{A \in \mathcal{A}_S} (\rho_{X(A)} + \rho_{Y(A)}), \quad (5.2)$$

где $X(A)$, $Y(A) \subseteq V$, $X(A) \cap T \subseteq A$, $Y(A) \cap T \subseteq A$, и выполняется: $X(A) \cap Y(B) = \emptyset$, $\forall A, B \in \mathcal{A}_S (A \neq B)$, для любого $s \in T$ имеется ровно два множества среди $\{X(A), Y(A); A \in \mathcal{A}_S\}$, содержащих s . При этом, если сеть $N = (V, T; c)$ — целочисленная, то задача $\langle S | c \rangle$ имеет четвертьцелочисленное решение.

Укажем на одно следствие теоремы 5.3. В работе Б. В. Черкасского [22] изучалась задача построения максимального многополюсного двухпродуктового потока. В наших терминах — это задача $\langle S | c \rangle$ со схемой $S = (T, U)$, являющейся объединением двух полных двудольных графов $K(S', T')$ и $K(S'', T'')$ ($S' \cap T' = S'' \cap T'' = \emptyset$, $S' \cup T' \cup S'' \cup T'' = T$, $[s, t] \in U \Leftrightarrow [s, t] \in [S', T'] \cup [S'', T'']$). В [22] были решены некоторые частные случаи такой задачи; относительно всей задачи в целом была высказана гипотеза о точной верхней оценке и о дробности решения (см. также [1]). Эта гипотеза принимает теперь вид следующей теоремы, вытекающей из теоремы 5.3.

Теорема 5.4. Для задачи на $\max - \Sigma \langle S | c \rangle$, для которой схема S есть объединение двух полных двудольных графов $K(S', T')$ и $K(S'', T'')$, выполняется

$$\begin{aligned} \max \|F\| = \min \left\{ \frac{1}{2} \cdot (c[X_{S'S''}, \bar{X}_{S'S''}] + c[X_{S'T''}, \bar{X}_{S'T''}] + \right. \\ \left. + c[X_{T'S''}, \bar{X}_{T'S''}] + c[X_{T'T''}, \bar{X}_{T'T''}]) \right\}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

где $X_{S'S''}$, $X_{S'T''}$, $X_{T'S''}$, $X_{T'T''}$ — такие непересекающиеся подмножества в V , содержащие в совокупности все T , что

$$\begin{aligned} S' \subseteq X_{S'S''} \cup X_{S'T''}, \quad S'' \subseteq X_{S'S''} \cup X_{T'S''}, \quad T' \subseteq X_{T'S''} \cup X_{T'T''}, \\ T'' \subseteq X_{S'T''} \cup X_{T'T''}. \end{aligned}$$

Если функция c — целочисленная, то задача имеет полуцелочисленное решение.

Действительно, в рассматриваемом случае антицикликами в S являются множества $S' \cup S'' \setminus (T' \cup T'')$, $S' \cup T'' \setminus (T' \cup S'')$, $T' \cup T'' \setminus (S' \cup S'')$ и $T' \cup S'' \setminus (S' \cup T'')$, а графом Γ_S — цикл длины 4.

2. Начальный этап алгоритма

Первый (начальный) этап алгоритма \mathcal{Y} решения задачи $\langle S | c \rangle$ для 3-незацепляемой схемы $S = (T, U)$ и целочисленной сети $N =$

* Т. е. метрика, на которой достигается минимум правой части в (2.40)

$= (V, T; c)$ состоит в решении задачи о запирании $\langle \mathcal{A}_s, N \rangle$. Согласно теореме 3.1 задача $\langle \mathcal{A}_s, N \rangle$ имеет решение; пусть $\Phi = \{\varphi = (L[s, t], \alpha); s, t \in T, \alpha > 0\}$ — цепной мультипоток, запирающий все подмножества в \mathcal{A}_s . Согласно теореме 3.5 будем считать, что для Φ выполнены следующие условия.

L1. Вес α каждой нити $\varphi = (L, \alpha) \in \Phi$ кратен $1/2$.

L2. В Φ отсутствуют нити-циклы, не являющиеся замкнутыми нитями с концами в T .

L3. Функция нагрузки ζ_φ — целочисленная, иначе говоря, для любого ребра $[x, y] \in [V]^d$ остаточная пропускная способность $\Delta_\varphi[x, y] \equiv c[x, y] - \zeta_\varphi[x, y]$ — целая.

Будем считать в дальнейшем, что все нити в Φ имеют вес ровно $1/2$ (нити $\varphi = (L, \alpha)$ веса $\alpha > \frac{1}{2}$ следуют «расслоить» на 2α одинаковых нитей веса $1/2$). Будем использовать для нитей в Φ всю ту систему обозначений, которая применялась для цепей — их носителей.

Для каждой антиклики $A \in \mathcal{A}_s$ ее минимальное запирающее множество обозначим через X_A .

Согласно лемме 3.7 и свойству 3-незацепляемости для S справедливо:

1°. Если антиклики A и B — не смежны (т. е. $A \cap B = \emptyset$), то $X_A \cap X_B = \emptyset$.

2°. Если A, B, C — три различные антиклики, то $X_A \cap X_B \cap X_C = \emptyset$.

Обозначим через $O(A)$ множество антиклик, смежных антиклике A . Для $A \in \mathcal{A}_s$ назовем *лункой* каждое из множеств $X_{AB} \equiv X_A \cap X_B$, $B \in O(A)$, а *центральным множеством* — множество $X_A^c \equiv X_A \setminus \bigcup_{B \in O(A)} X_{AB}$.

Проведем классификацию полюсов и нитей. Полюс s , принадлежащий двум антикликам, называется *2-полюсом*, а принадлежащий ровно одной антиклике — *1-полюсом*; множество 1-полюсов в $A \in \mathcal{A}_s$ обозначается A^+ . Пара полюсов s, t , а также нить $\varphi[s, t] \in \Phi$ с такими концами, называется *истинной*, если $[s, t] \in U$, и *паразитной*, если $[s, t] \in [T] \setminus U$. Множество истинных нитей в Φ образуют истинный мультипоток Φ_U , а оставшиеся нити — паразитный мультипоток $\Phi_{\bar{U}}$. Мультипоток Φ_U — это как раз та часть Φ , мощность которой требуеться максимизировать в задаче; паразитный мультипоток служит для вспомогательных целей и в конце алгоритма отбрасывается. Паразитная пара $[s, t]$, а также нить $\varphi[s, t] \in \Phi_{\bar{U}}$, принадлежащая ровно одной антиклике $A \in \mathcal{A}_s$, называется *1-парой* (*1-нитью*), а принадлежащая двум антикликам — *2-парой* (*2-нитью*). Множество всех 1-нитей в Φ (1-пар) для $A \in \mathcal{A}_s$ обозначим через $\Phi_{[A]}^+$ (соответственно, $[A]^+$), а множество всех 2-нитей (2-пар) для $A, B \in \mathcal{A}_s$ — через $\Phi_{[AB]}$ (соответственно, $[AB]$). Среди истинных нитей выделим *критические*: нить $\varphi[s, t] \in \Phi_U$ называется критической, если имеется пара смежных антиклик $A, B \in \mathcal{A}_s$, такая, что $s \in A, t \in B$ и $\varphi[s, t] \cap X_{AB} \neq \emptyset$; из 2° следует, что для критической нити $\varphi[s, t]$ такая пара антиклик — единственная. Множество критических нитей для смежных $A, B \in \mathcal{A}_s$ обозначим через $\Phi_{A \nabla B}$. Следующее утверждение очевидно.

3°. Пусть $s, t \in A \cap B$ ($A, B \in \mathcal{A}_s$) и $p \in T$. Тогда пара $[s, p]$ является соответственно, истинной, паразитной, 1-парой, 2-парой тогда и только тогда, когда таковой же является пара $[t, p]$.

Полюса s и t , такие, что $s, t \in A \cap B$ для некоторых $A, B \in \mathcal{A}_s$, назовем *эквивалентными*. Из запирающих свойств мультипотока Φ ,

а именно из того, что каждая нить в Φ пересекается с каждым разрезом $[X_A, \bar{X}_A]$, $A \in \mathcal{A}_S$ не более одного раза, вытекают следующие утверждения.

4°. Пусть нить $\varphi[s, t] \in \Phi$ содержит вершину, принадлежащую X_A . Тогда $s \in A$ или $t \in A$ и множество вершин, принадлежащих X_A , составляет в $\varphi[s, t]$ участок подряд идущих вершин.

5°. Если для $\varphi[s, t] \in \Phi$ выполняется $[s, t] \in [A]$, $A \in \mathcal{A}_S$, то $\text{supp}^v(\varphi[s, t]) \subseteq X_A$. Если для $\varphi[s, t] \in \Phi$ выполняется $[s, t] \in [AB]$, $A, B \in \mathcal{A}_S$, то $\text{supp}^v(\varphi[s, t]) \subseteq X_{AB}$.

6°. Если нить $\varphi[s, t]$ содержит вершину в лунке X_{AB} ($A, B \in \mathcal{A}_S$), то либо $\varphi[s, t] \in \Phi_{A \vee B}$ либо один из полюсов s, t принадлежит $A \cap B$.

7°. Пусть $\varphi'[s', t'] \in \Phi_{[AB]}$ и $\varphi''[s'', t''] \in \Phi_{A \vee B}$ — две нити, имеющие общую вершину x . Тогда $\varphi'[s', x] \cdot \varphi''[x, t'']$ и $\varphi''[t', x] \cdot \varphi'[x, t'']$ — 1-нити, одна из которых относится к A , а другая — к B .

8°. Пусть $\varphi[s', t'] \in \Phi_{[A]}^+$, $\varphi''[s'', t''] \in \Phi_{[B]}^+$ и x — общая вершина для φ' и φ'' . Тогда одна из четырех пар $\{s', s''\}, \{s', t''\}, \{t', s''\}, \{t', t''\}$ содержит эквивалентные полюса. Если s' и s'' эквивалентны, то $\varphi'[s', x] \cdot \varphi''[x, s'']$ — 2-нить, а $\varphi'[t', x] \cdot \varphi''[x, t'']$ — критическая нить для пары $A, B \in \mathcal{A}_S$. Переключение $\text{SWITCH}(\varphi', \varphi'', x; s's'' \times t't'')$ приводит к мультипотоку, по-прежнему запирающему все подмножества в \mathcal{A}_S .

9°. Пусть $\varphi'[s', t']$ и $\varphi''[s'', t'']$ — две нити в Φ , имеющие общую вершину x и пусть $[s', t'] \in [AB]$. Тогда переключение $\text{SWITCH}(\varphi', \varphi'', x; s's'' \times t't'')$ приводит к мультипотоку, по-прежнему запирающему все подмножества в \mathcal{A}_S .

10°. Пусть $\varphi'[s', t']$ и $\varphi''[s'', t'']$ — две нити в Φ с общей вершиной x и пусть $[s', t'] \in [A]^+$. Тогда по крайней мере одно из переключений $\text{SWITCH}(\varphi', \varphi'', x; s's'' \times t't'')$, $\text{SWITCH}(\varphi', \varphi'', x; s''t'' \times t's'')$ создает такие нити φ_1 и φ_2 , что: а) φ_1 — 1-нить для A ; б) нить φ_2 имеет ту же категорию, что и φ'' , т. е. является, соответственно, истинной, паразитной, 1-нитью, 2-нитью, критической, если такова же φ'' , и при этом относится к той же антиклике или паре антиклик; в) новый мультипоток по-прежнему запирает все подмножества в \mathcal{A}_S .

Итак, мы описали свойства мультипотока Φ , построенного на первом этапе решения задачи $\langle S | c \rangle$. Второй (основной) этап алгоритма даст требуемое решение. Этот этап различен для четной и нечетной схем S . В следующем пункте будет рассмотрен случай четной схемы, а в п. 4 будет описано преобразование задачи, позволяющее свести нечетный случай к четному.

3. Основной этап для случая четной схемы

Разобъем множество \mathcal{A}_S на два подмножества \mathcal{A}_S^h и \mathcal{A}_S^q , элементы которого называются, соответственно, *нечетными* и *четными* антикликами, таким образом, что из двух смежных антикликов обязательно одна — нечетная, а другая — четная.

Базой антиклики A при мультипотоке Φ будет считаться множество $B(\Phi, A) \equiv A \cup \bigcup_{\varphi \in \Phi_{[A]}} \text{supp}^v(\varphi)$, а ее *ресурсом* — множество $B^+(\Phi, A) \equiv A^+ \cup \bigcup_{\varphi \in \Phi_{[A]}^+} \text{supp}^v(\varphi)$. Согласно лемме 3.3 имеем

11°. Множество X_A ($A \in \mathcal{A}_S$) совпадает с множеством вершин, которое оказывается помеченным при процедуре $\text{LABEL}(\Phi, A)$, т. е. с множеством вершин, достижимых активными путями из $B(\Phi, A)$.

В дальнейшем нам потребуются две другие процедуры расстановки пометок.

Процедура FLAB ($\Phi, A; Z, W$). Эта процедура применяется к антиклике A , множеству $W \subset X_A$, такому, что W либо пусто либо насыщено мультипотоком Φ_A ($\Phi_A = \{\varphi[s, t], [s, t] \in [A, \bar{A}]\}$) и согласовано с ним*, и множеству $Z \subset X_A \setminus W$. Для этой процедуры начальным помеченным множеством является Z , называемое *основой*. На очередном шаге просматривается ребро $[x, y]$, такое, что вершина x помечена, но не просмотрена, а y — не помечена и не принадлежит W , и производится помечение y в следующих случаях.

F1. $\Delta_\Phi[x, y] > 0$. Тогда $l(y) = \{x, fr\}$.

F2. Имеется нить $\vec{\varphi} = \vec{\varphi}(s, t) \in \vec{\Phi}_A$ (с началом в A и концом в \bar{A}), такая, что $(y, x) \in \vec{\varphi}$. Тогда, как и в операции C2 процедуры LABEL (§ 3, п. 4), производится перебор вершин в $\vec{\varphi}$ от y к s . Если очередная вершина z не помечена и $z \notin W$, то полагается $l(z) = \{v, \vec{\varphi}\}$, где v — предыдущая вершина, т. е. $(z, v) \in \vec{\varphi}$. (Из определения множества W следует, что если некоторая вершина $w \in \vec{\varphi}$ принадлежит W , то все вершины участка $\vec{\varphi}(s, w)$ принадлежат W , поэтому операция F2 корректна.)

F3. Имеется нить $\varphi = \varphi[s, t] \in \Phi_{[A]}$, такая, что $[x, y] \in \varphi$. Тогда последовательно просматриваются вершины в φ от x в обе стороны к s и к t). Если очередная вершина z не помечена и $z \notin W$, то полагается $l(z) = \{v, \varphi\}$, где v — предыдущая вершина рассмотрения, расположенная с той же стороны от x , что и z ($[z, v] \in \varphi$). Операция корректна по тем же причинам, что и F2.

В результате процедуры помечения создается лес пометок τ , содержащий некоторое множество вершин X_Z ; в τ тупиковыми вершинами являются вершины из Z .

Лемма 5.1. Для помеченного множества X_Z справедливо:
а) $X_Z \subseteq X_A \setminus W$, б) множество $W \cup X_Z$ насыщено мультипотоком Φ_A и согласовано с ним.

Доказательство. Поскольку разрез $[X_A, \bar{X}_A]$ насыщен и согласован с Φ_A , то процесс помечения не выходит за пределы X_A . То, что разрез $[X_Z \cup W, X_Z \cup \bar{W}]$ насыщен мультипотоком Φ_A и согласован с ним, следует из аналогичного свойства для $[W, \bar{W}]$ и из правил F1—F3. ■

Заметим, что при $Z = B(\Phi, A)$, $W = \emptyset$ процедура FLAB($\Phi, A; Z, W$) совпадает с LABEL(Φ, A). Важный случай процедуры FLAB($\Phi, A; Z, W$) получается при $Z = B^+(\Phi, A)$ и $W = \emptyset$. В этом случае помеченное множество $X_A^+ \equiv X_Z$ называется *начальным доменом* в A . Рассмотрим его свойства.

Пусть $P(x, y) = (x = x_0, (x_0, x_1), x_1, \dots, x_k = y)$ — активный путь, обратный пути в лесе τ , соединяющему некоторую вершину $y \in X_A^+$ с $x \in B^+(\Phi, A)$. Вдоль пути P можно провести последовательность преобразований мультипотока — *D_F-операцию* —, в результате которой образуется нить мультипотока $\Phi_{[A]}^+$, проходящая через y . Вначале выделяется произвольная нить $\varphi(x) \in \Phi_{[A]}^+$, проходящая через x (если $x \in A^+$, то нить $\varphi(x)$ — вырожденная). Преобразование «рабочей» нити $\varphi(x_i)$ (проходящей через x_i) в нить $\varphi(x_{i+1})$ (проходящую через x_{i+1} и принадлежащую текущему мультипотоку $\Phi_{[A]}^+$) проводится по тем же пра-

* Имеется в виду указанное свойство для разреза $[W, \bar{W}]$.

вишам, что и в D -операции (§ 3, п. 4); при этом ввиду утверждения 10° нить φ , участвующая в переключении с рабочей нитью, преобразуется в нить φ' той же категории. Справедливо

Утверждение 5.4. Для любой вершины y , принадлежащей начальному домену X_A^+ , можно провести D_F -операцию вдоль активного пути, такую, что :а) через вершину y будет проходить нить мультипотока $\Phi_{[A]}^+$, б) любая нить $\varphi[s, t]$ исходного мультипотока, такая, что $x \in X_A^+, t \notin X_A^+$, либо не изменится либо перейдет в нить φ' (совпадающую с φ от t до первой вершины внутри X_A^+), имеющую ту же категорию, что и φ .

В частности, при такой D_F -операции не изменяется величина $\|\Phi_U\|$.

Рассмотрим один из возможных вариантов увеличения $\|\Phi_U\|$. Пусть $A \in \mathcal{A}_S^n$ и $B \in \mathcal{A}_S^n$ — две смежные антиклики, начальные домены X_A^+ и X_B^+ которых пересекаются. Выберем вершину $z \in X_A^+ \cap X_B^+$, такую, что активный путь $P_A(x, z)$ в X_A^+ пересекается с X_B^+ только в вершине z , и пусть $P_B(y, z)$ — активный путь в X_B^+ . Проведя D_F -операцию вдоль $P_A(x, z)$, получим 1-нить $\varphi^A \in \Phi_{[A]}$, проходящую через z . Проведем затем D_F -операцию вдоль $P_B(y, z)$, образовав 1-нить $\varphi^B \in \Phi_{[B]}$; заметим, что согласно утверждению 5.4 и выбору вершины z , нить φ^A , если и изменится, то лишь внутри $X_B^+ \setminus \{z\}$, т. е. по-прежнему имеется 1-нить φ^A , проходящая через z . Наконец, выполним (согласно утверждению 8°) переключение между φ^A и φ^B с образованием критической нити (см. рис. 12). Таким образом величина $\|\Phi_U\|$ увеличивается на $1/2$, при этом новый мультипоток Φ остается запирающим для \mathcal{A}_S и удовлетворяющим L1—L3. Описанная процедура, применяемая в случае существования пары пересекающихся начальных доменов, называется процедурой *прямого увеличения* — DAUGM(A, B); в этом случае итерация основного этапа (состоящая из данной процедуры) имеет наиболее простой вид.

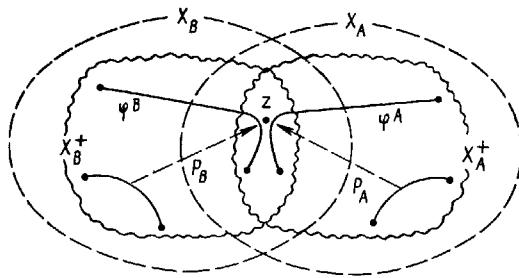


Рис. 12.

Поясним идею увеличения $\|\Phi_U\|$ в общем случае. Рассмотрим, например, ситуацию, изображенную на рис. 13а. Здесь $\mathcal{A}_S^n = \{A, C\}$, $\mathcal{A}_S^{n+1} = \{B, D\}$. Можно считать, что множества X_B^+ и X_C^+ пусты, так что применение процедуры DAUGM невозможно. Однако, «разорвав» критическую нить φ_{BC} в полюсе s на 1-нити φ_B и φ_C и сделав переключения в вершинах x и y для пар 1-нитей $\{\varphi_A, \varphi_B\}$ и $\{\varphi_C, \varphi_D\}$, соответственно, мы получим уже две критические нити φ_{AB} и φ_{CD} , увеличив, тем самым, мощность Φ_U на $1/2$ (рис. 13 б). Примерно так и происходит увеличение в общем случае: образуется цепочка нитей, в которой начальная — 1-нить нечетной, конечная — 1-нить четной антиклики, а все промежу-

точные — критические нити, имеющие соответствующие попарные пересечения; «разорвав» критические нити и по-новому «перевязав» образовавшуюся совокупность 1-нитей, мы получим множество критических нитей, на один элемент большее первоначального. Конечно, такой цепочки попарно пересекающихся нитей априори может не быть, эта цепочка последовательно создается путем преобразований типа D -операции.

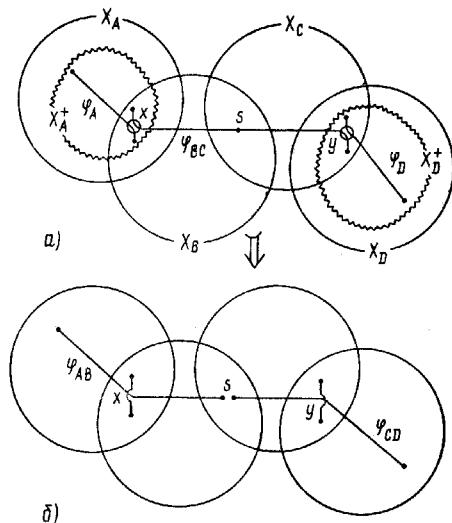


Рис. 13

Процедура BLAB ($\Phi, B; Z, Y$). Здесь B — антиклика (обычно, четная), Y — подмножество в X_B , такое, что $X_B^+ \subset Y$ и Y насыщено мультипотоком Φ_B и согласовано с ним, а Z (основа помечения) — подмножество в $Y \cap \cup_{A \in O(B)} X_{AB}$, для которого $Z \cap X_B^+ = \emptyset$ (см. рис. 14).

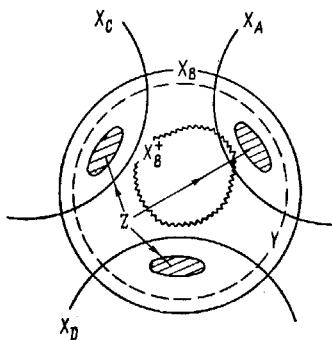


Рис. 14

В начале помеченным считается множество Z . Пусть очередное просматриваемое ребро — $[x, y]$, где $x \in Y$ — помеченная, а $y \in Y$ — непомеченная вершина. Тогда вершина y помечается в следующих случаях.

B1. $\Delta_\Phi[x, y] > 0$. Тогда $l(y) = \{x, f_r\}$.

B2. Имеется нить $\Phi = \Phi(s, t) \in \vec{\Phi}_B$ (с началом $s \in B$ и концом $t \in \bar{B}$),

такая, что $(x, y) \in \Phi$. Тогда производим перебор вершин в Φ от y к t , оставаясь в пределах Y . Если очередная вершина z не помечена и w — предыдущая вершина в $\Phi((w, z) \in \Phi)$, то полагаем $l(z) = \{w, \Phi\}$.

B3. Имеется нить $\Phi = \Phi[s, t] \in \Phi_{[AB]}$ (для некоторой антиклики A , смежной B), такая, что $[x, y] \in \Phi$. Тогда вершины в Φ последовательно помечаются от x в обе стороны. Очередная непомеченная вершина z помечается $l(z) = \{w, \Phi\}$, где w — предыдущая в Φ (уже помеченная) вершина.

Пусть X_Z — окончательное помеченное множество при процедуре $BLAB(\Phi, A; Z, Y)$. Очевидно, $X_Z \subseteq Y$.

Лемма 5.2. Справедливо: а) $X_Z \cap X_B^+ = \emptyset$; б) множество $Y' \equiv Y \setminus X_Z$ насыщено мультипотоком Φ_B и согласовано с ним.

Доказательство. Свойство $X_Z \cap X_B^+ = \emptyset$ следует из насыщенности множества X_B^+ мультипотоком Φ_B . Из правил *B1—B3* и свойств множества Y следует, что разрез $[Y', \bar{Y}']$ насыщен мультипотоком Φ_B и нет нитей $\Phi(s, t) \in \Phi_B ((s, t) \in (B, \bar{B}))$, содержащих дугу (z, w) такую, что $z \in \bar{Y}'$, $w \in Y'$. Это доказывает «б». ■

Определим множество $T_Z \equiv (X_Z \setminus Z) \cap B$. Множество X_Z называется *негативным*, если $T_Z = \emptyset$, и *позитивным* — в противном случае. Пусть X_Z — позитивное множество. Поскольку $X_Z \cap X_B^+ = \emptyset$, то любой полюс в T_Z — это 2-полюс. Рассмотрим некоторый путь $P(s, y) = (x_0 = s, (x_0, x_1), x_1, \dots, x_k = y)$ в лесе пометок τ , начинающийся в $s \in B \cap A$ и кончащийся в $y \in Z$. Возможны два случая.

1) Среди вершин x_0, x_1, \dots, x_{k-1} имеется вершина x_i с пометкой $\{\gamma(s), \Phi\}$, где Φ — критическая нить для A и B ($\Phi \in \Phi_{A \vee B}$). Такую вершину x_i с минимальным номером i обозначим через $\gamma(s)$, а также определим множество $Q(s, Z) \equiv \{x_j; j=0, 1, \dots, i\}$.

2) Среди вершин x_0, x_1, \dots, x_{k-1} указанной выше вершины x_i нет. Положим $\gamma(s) = \{\emptyset\}$, $Q(s, Z) \equiv \{x_j; j=0, 1, \dots, k-1\}$.

Утверждение 5.5. Пусть $P(s, y) = (x_0 = s, (x_0, x_1), x_1, \dots, x_k = y)$ — путь в лесе τ с началом в полюсе $s \in A \cap B$ (активный путь) и пусть $\gamma(s) = \{\emptyset\}$. Тогда: а) все вершины x_i , $i \in 0, k$, содержатся в лунке X_{AB} ; б) возможна такая цепочка преобразований (D_B -*операция*), при которой возникает 2-нить $\Phi[s, t] \in \Phi_{[AB]}$, проходящая через y и совпадающая на участке $\Phi[s, y]$ с путем $P(s, y)$; при этом категории всех участвующих в переключениях нитей сохраняются и эти нити неизменны вне $X_Z \cap X_{AB}$.

Доказательство. Пусть $\Phi' [p, q] = \langle p, z, w, q \rangle \Phi'$ — некоторая нить, не принадлежащая Φ_B^+ и содержащая ребро $[z, w]$: $z \in X_{AB}$, $w \in X_B^c$. Тогда согласно утверждению 6° либо $p \in A \cap B$, $q \notin B$, либо $\Phi' \in \Phi_{A \vee B}$. Отсюда, ввиду насыщенности X_A и согласованности его с Φ , следует, что активный путь в τ , начинающийся в лунке X_{AB} и выходящий в X_B^c , должен воспользоваться некоторой критической нитью; это доказывает «а». Пусть уже имеется рабочая нить $\Phi(x_i) = \Phi(x_i)[s, q] \in \Phi_{[AB]}$, такая, что $\Phi(x_i)[s, x_i]$ совпадает с $P(s, x_i)$. Если $l(x_i) = \{x_{i+1}, \Phi[p, p']\}$, $p \in A \cap B$, $\Phi = \langle p, x_{i+1}, x_i, p' \rangle \tilde{\Phi}$, то согласно 3° оба способа переключения в x_i сохраняют категорию нити $\tilde{\Phi}$. При переключении $SWITCH(\Phi(x_i), \tilde{\Phi}, x_i; sp \times qp')$ образуется рабочая нить $\Phi(x_{i+1})[s, p]$, такая, что $\Phi(x_{i+1})[s, x_{i+1}] = P(s, x_{i+1})$. ■

Рассмотрим теперь позитивный путь $P(s, y) = (x_0 = s, (x_0, x_1),$

$x_1, \dots, x_k = y$) с $x_i = \gamma(s)$ ($i < k$). Тогда до вершины x_i включительно применяется описанная D_B^1 -операция, в результате которой образуется рабочая нить $\varphi(x_i)[s, t] \in \Phi_{[AB]}$, проходящая через x_i и $\varphi(x_i)[s, x_i] = P(s, x_i)$. В вершине x_i с пометкой $l(x_i) = \{x_{i+1}, \Phi\}$, где $\Phi = \varphi[p, q] = \langle p, x_{i+1}, x_i, q \rangle \in \Phi_{A \nabla B}$ ($p \in B \setminus A$, $q \in A \setminus B$), производится операция *разрыва критической нити* — TEAR($\varphi, \varphi(x_i), x_i$), состоящая в переключении SWITCH($\varphi, \varphi(x_i); sq \times tp$). При этом образуются две 1-нити — рабочая нить $\varphi'[t, p] \in \Phi_{[B]}^+$, проходящая через x_{i+1} , и нить $\tilde{\varphi}[s, q] \in \Phi_{[A]}^+$, такая, что $\tilde{\varphi}[s, x_i] = P(s, x_i)$. В дальнейшем все преобразования вдоль P идут также, как и в D_F -операции. Справедливо

Утверждение 5.6. Пусть $P(s, y) = (x_0 = s, (x_0, x_1), x_1, \dots, x_k = y)$ — активный путь и $\gamma(s) = x_i \in X_{AB}$ ($i < k$). Тогда вдоль $P(s, y)$ возможна такая цепочка преобразований (D_B^2 -операция), что: а) через вершину y будет проходить 1-нить мультипотока $\Phi_{[B]}^+$; б) исчезнет некоторая критическая нить φ мультипотока $\Phi_{A \nabla B}$, проходящая через x_i ; в) возникнет 1-нить $\tilde{\varphi}[s, q] \in \Phi_{[A]}^+$, такая, что $\tilde{\varphi}[s, x_i] = P(s, x_i)$; г) категории всех нитей, участвующих в переключениях, кроме φ , сохранятся, и эти нити не изменятся вне X_z . ■

Заметим, что каждая нить (входящая в какую-либо пометку) участвует в переключении в D_B^2 -операции не более одного раза, следовательно нить $\varphi[s, q] \in \Phi_{[A]}^+$, образовавшаяся на i -м шаге, на дальнейших шагах уже не изменится. Это обстоятельство, отмеченное в утверждении, весьма важно.

Общая процедура увеличения GAUGM. Пусть начальные домены X_A^+ антиклик $A \in \mathcal{A}_S$ попарно не пересекаются. Процедура GAUGM состоит из последовательности итераций двух типов: F -итераций и B -итераций. После выполнения r -й итерации (являющейся B -итерацией, если r — нечетно, и F -итерацией, если r — четно) будут построены следующие объекты.

A. Для каждой нечетной антиклики $A \in \mathcal{A}_S^H$ — совокупность подмножеств $R_A^0 = X_A^+, R_A^1, R_A^2, \dots, R_A^{\left[\frac{r}{2}\right]}$ множества X_A (некоторые, быть может, пустые), таких, что: а) $R_A^i \cap R_A^j = \emptyset$, $\forall i, j$ ($i \neq j$); б) каждое множество $W_A^i \equiv \bigcup_{j=0}^i R_A^j$, $i = 0, 1, \dots, \left[\frac{r}{2}\right]$, насыщено Φ_A и согласовано с ним; в) $W_A^{\left[\frac{r-1}{2}\right]} \cap X_B^+ = \emptyset$, $\forall B \in O(A)$.

B. Для каждой четной антиклики $B \in \mathcal{A}_S^q$ — совокупность подмножеств $N_B^0 = \emptyset, N_B^1, \dots, N_B^{\left[\frac{r+1}{2}\right]}$ (некоторые, быть может, пустые) множества X_B , таких, что: а) $N_B^i \cap N_B^j = \emptyset$, $\forall i, j$ ($i \neq j$); б) каждое множество $Y_B^i \equiv X_B \setminus \bigcup_{j=0}^i N_B^j$, $i = 0, 1, \dots, \left[\frac{r+1}{2}\right]$, содержит X_B^+ , а также насыщено Φ_B и согласовано с ним.

В. Пусть $Z_{AB}^i \equiv R_A^i \cap Y_B^i$, $B \in \mathcal{A}_S^q$, $A \in O(B)$, $i = 0, 1, \dots, \left[\frac{r}{2}\right]$, и $Z_B^i \equiv \bigcup_{A \in O(B)} Z_{AB}^i$. Тогда, если $Z_B^i = \emptyset$, то $N_B^{i+1} = \emptyset$, а если $Z_B^i \neq \emptyset$, то N_B^{i+1} есть множество $X_{Z_B^i}$, помеченное при процедуре BLAB($\Phi, B; Z_B^i, Y_B^i$) на $(2i+1)$ -й итерации и имеющее лес пометок τ_B^i .

Г. Пусть $Q_{AB}^i \equiv \bigcup_{s \in T_{Z_B^{i-1}} \cap A} Q(s, Z_B^{i-1})$, $B \in \mathcal{A}_S^q$, $A \in O(B)$, $i = 0$,

$1, \dots, \left[\frac{r}{2} \right]$, и $Q_A^i = \bigcup_{B \in O(A)} Q_{AB}^i$ ($A \in \mathcal{A}_S^h$). Тогда для $i > 0$, если $Q_A^i \neq \emptyset$, то $R_A^i = \emptyset$, а если $Q_A^i \neq \emptyset$, то R_A^i есть множество $X_{Q_A^i}$, помеченное при процедуре $\text{FLAB}(\Phi, A; Q_A^i, W_A^{i-1})$ на $2i$ -й итерации и имеющее лес пометок τ_A^i .

Индукцией по номеру итерации доказывается

Утверждение 5.7. 1) Если r — четно, то $T \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{A}_S^h} W_A^{\left[\frac{r}{2} \right]} \cup \bigcup_{B \in \mathcal{A}_S^q} Y_B^{\left[\frac{r}{2} \right]}$; 2) если r — нечетно, то $T \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{A}_S^h} W_A^{\left[\frac{r}{2} \right]} \cup \bigcup_{B \in \mathcal{A}_S^q} Y_B^{\left[\frac{r+1}{2} \right]} \cup \bigcup_{A \in \mathcal{A}_S^h} Q_A^{\left[\frac{r+1}{2} \right]}$; 3) если для некоторых i, j, A, B ($0 \leq i, j \leq \left[\frac{r+1}{2} \right]$, $A \in \mathcal{A}_S^h, B \in O(A)$) выполняется $R_A^i \cap N_B^j \neq \emptyset$, то либо $j = i + 1$ и $R_A^i \cap N_B^j = Z_{AB}^i$ либо $j = i$ и $R_A^i \cap N_B^j \supseteq Q_{AB}^j$. ■

После окончания r -й итерации возникает один из следующих случаев.

Случай 1 (нормальный исход): а) r — четно, $Z_{AB}^{\left[\frac{r}{2} \right]} \cap X_B^+ = \emptyset$, $\forall B \in \mathcal{A}_S^q, A \in O(B)$, и не все множества $Z_{AB}^{\left[\frac{r}{2} \right]}$ ($A \in \mathcal{A}_S^h, B \in \mathcal{A}_S^q$) пусты; б) r — нечетно, и не все множества $Q_{AB}^{\left[\frac{r+1}{2} \right]}$ ($A \in \mathcal{A}_S^h, B \in \mathcal{A}_S^q$) пусты. Тогда переходим к $(r+1)$ -й итерации.

Случай 2 (окончание без прорыва): либо r — четно и $Z_{AB}^{\left[\frac{r}{2} \right]} = \emptyset$ $\forall A \in \mathcal{A}_S^h, B \in \mathcal{A}_S^q$ либо r — нечетно и $Q_{AB}^{\left[\frac{r+1}{2} \right]} = \emptyset$, $\forall A \in \mathcal{A}_S^h, B \in \mathcal{A}_S^q$. Тогда мультипоток Φ_U оптимален. В качестве множеств $X(A)$, $A \in \mathcal{A}_S^h$ в утверждении теоремы 5.3 берутся $W_A^{\left[\frac{r}{2} \right]}$, а в качестве множеств $X(B)$, $B \in \mathcal{A}_S^q$ — множества $Y_B^{\left[\frac{r+1}{2} \right]}$ (ввиду утверждения 5.7 будет выполняться $X(A) \cap X(B) = \emptyset \quad \forall A \in \mathcal{A}_S^h, B \in \mathcal{A}_S^q$, и $\bigcup_{A \in \mathcal{A}_S^h} X(A) \supseteq T$).

Случай 3 (прорыв). Ситуация прорыва возникает для четного r при наличии множества $Z_{AB}^{\left[\frac{r}{2} \right]} = R_A^{\left[\frac{r}{2} \right]} \cap Y_B^{\left[\frac{r}{2} \right]}$, такого, что $Z_{AB}^{\left[\frac{r}{2} \right]} \cap X_B^+ \neq \emptyset$. Покажем, как в этом случае производится увеличение мощности мультипотока Φ_U . Пусть x_r — вершина $R_{A^\alpha(r)}^{\left[\frac{r}{2} \right]} \cap X_{B^\beta(r+1)}^+$ и $P_r = P_r(x_r, x_{r-1})$ — путь в лесе $\tau_{A^\alpha(r)}$, ведущий в вершину основы $x_{r-1} \in Q_{A^\alpha(r) B^\beta(r-1)}$. Пусть x_{r-1} принадлежит $Q(s_{r-1}, Z_{B^\beta(r-1)}^{\left[\frac{r-2}{2} \right]})$, тогда для вершины x_{r-1} возьмем путь $P_{r-1} = P_{r-1}(s_{r-1}, x_{r-2}) = \langle s_{r-1}, x_{r-1}, x_{r-2} \rangle P_{r-1}$ в лесе $\tau_{B^\beta(r-1)}$, ведущий в вершину x_{r-2} множества $Z_{A^\alpha(r-2) B^\beta(r-1)}^{\left[\frac{r-2}{2} \right]}$. Действуя тем же образом и далее, мы получим цепочку путей. $\xi = P_r(x_r, x_{r-1}), P_{r-1}(s_{r-1}, x_{r-2}), P_{r-2}(x_{r-2}, x_{r-3}), P_{r-3}(s_{r-2}, x_{r-4}), \dots$

$\dots, P_1(s_1, x_0), P_0(x_0, \tilde{x})$, расположенных, соответственно, в множествах $R_{A^{\alpha(r)}}, N_{B^{\beta(r-1)}}^{[\frac{r}{2}]}, R_{A^{\alpha(r-2)}}^{[\frac{r-2}{2}]}, N_{B^{\beta(r-3)}}^{[\frac{r-2}{2}]}, \dots, N_{B^{\beta(1)}}^1, X_{A^{\alpha(0)}}^+ (\tilde{x} \in B^+\Phi, A))$. Пере- бираем пути в цепочке ξ в обратном порядке и производим требуемые D_F -операции и D_B -операции, а именно: вначале рассматриваем путь $P_0(x_0, \tilde{x})$ и в соответствии с утверждением 5.4 образуем 1-нить $\varphi_0 \in \Phi_{[A^{\alpha(0)}]}^+$, проходящую через x_0 . На втором шаге рассматриваем путь $P_1(s_1, x_0)$, для которого возможны два варианта.

1) $\gamma(s_1) = \emptyset$. Тогда посредством D_B^1 -операции (в соответствии с утверждением 5.5) создаем нить $\varphi_1[s_1, \tilde{s}_1] \in \Phi_{[A^{\alpha(0)} \triangleright B^{\beta(1)}]}$, проходящую через x_0 и такую, что $\varphi_1[s_1, x_0] = P_1(s_1, x_0)$. Производя в вершине x_0 переключение между φ_0 и φ_1 , образуем нить $\varphi_2 \in \Phi_{[A^{\alpha(0)} \rightarrow A^{\alpha(2)}]}^+$, содержащую $P_1(s_1, x_0)$ и, в частности, вершину x_1 .

2) $\gamma(s_1) \neq \emptyset$. Тогда в соответствии с утверждением 5.6 вдоль P_1 проводим D_B^2 -операцию, в результате которой образуется 1-нить $\varphi_1 \in \Phi_{[B^{\beta(1)}]}^+$, проходящая через x_0 , и 1-нить $\varphi_2 \in \Phi_{[A^{\alpha(2)}]}^+$, содержащая участок $P_1(s_1, \gamma(s_1))$ и, в частности, вершину x_1 ; при этом происходит исчезновение одной критической нити. Делая в вершине x_0 переключение между φ_0 и φ_1 , создаем критическую нить $\varphi_0 \in \Phi_{[A^{\alpha(0)} \triangleright B^{\beta(1)}]}$, восстанавливая прежнее значение мощности Φ_U . На следующем (третьем) шаге проводим D_F -операцию вдоль пути $P_2(x_1, x_2)$, исходя из нити $\varphi_2 \in \Phi_{[A^{\alpha(2)}]}^+$, и образуем нить $\varphi_3 \in \Phi_{[A^{\alpha(2)}]}^+$, проходящую через x_2 .

В конечном итоге мы создадим нить $\varphi_r \in \Phi_{[A^{\alpha(r)}]}^+$, проходящую через x_r , при этом мощность истинного мультипотока останется прежней. Образовав также нить $\varphi_{r+1} \in \Phi_{[B^{(r+1)}]}^+$, проходящую через x_r (использовав для этого лес домена $X_{B^{(r+1)}}^+$), произведем окончательное переключение в x_r между φ_r и φ_{r+1} , увеличив мощность Φ_U на $1/2$.

Для обоснования корректности перестройки вдоль цепочки ξ следует показать, что выполнение преобразования для некоторого P_i не влияет на возможность совершения требуемого преобразования вдоль P_j при ($j > i$). Фактически надо доказать следующее: пусть согласно по- метке в вершине $x_l \in P_j$ требуется произвести переключение с нитью $\varphi = \langle s, x_{l+1}, x_l, t \rangle \varphi$ при четном j либо с $\varphi = \langle s, x_{l-1}, x_l, t \rangle \varphi$ при нечетном j ; тогда, если на i -й итерации нить φ преобразуется в нить $\langle s', x_{l+1}, x_l, t \rangle \varphi$ (либо $\langle s', x_{l-1}, x_l, t \rangle \varphi$), то s' — полюс все той же антиклики j -й итерации. Доказательство можно получить, опираясь на утверждения 5.4—5.6.

З а м е ч а н и е 5.2. В алгоритме выгодно использовать следующий локальный способ задания нитей. Для каждого ребра $[x, y]$ имеется совокупность элементов $\text{Th}[x, y] = \{e_i; i \in I\}$, идентифицирующих ребра $[x, y]$ всевозможных нитей мультипотока. Каждой паре (e_i, x) ($e_i \in \text{Th}[x, y]$) сопоставляется некоторый (быть может, пустой) элемент $\sigma(e_i, x) = e_j \in \text{Th}[x, z]$ — следующее звено той же нити (со стороны x). Нить, проходящую через $[x, y]$ «по элементу e_i », можно построить, следуя сопоставлениям σ , в обе стороны от e_i вплоть до пустых элементов. В пометку $l(x_j) = \{x_{j-1}, \varphi\}$ вместо φ ставится соответствующий элемент $e \in \text{Th}[x_{j-1}, x_j]$. Операция переключения $\text{SWITCH}(\varphi', \varphi'', x; Sp \times tq)$ есть не что иное, как смена некоторых двух сочетаний $\{e_1', e_2'\}$ ($e_2' = \sigma(e_1', x)$) и $\{e_1'', e_2''\}$ ($e_2'' = \sigma(e_1'', x)$) двумя другими — $\{e_1', e_1''\}$ ($e_1'' = \sigma(e_1', x)$), $\{e_2', e_2''\}$ ($e_2'' = \sigma(e_1'', x)$).

4. Случай нечетной схемы

Пусть Φ — мультипоток в сети $N = (V, T; c)$, полученный на начальном этапе алгоритма, т. е. запирающий все антиклики \mathcal{A}_S нечетной схемы S . Как и в четном случае, будем считать, что все нити в Φ имеют мощность $1/2$, а функция Δ — целочисленная; пусть также X_A обозначает минимальное запирающее множество для $A \in \mathcal{A}_S$.

Сведение рассматриваемой задачи к задаче с четной схемой состоит в следующем. Вначале удалим из сети все вершины, лежащие вне множества $\bigcup_{A \in \mathcal{A}_S} X_A$. Для каждой нити $\varphi = (x_0, [x_0, x_1], x_1, \dots, x_k) \in \Phi$, имеющей участок $\varphi[x_i, x_j]$ с вершинами вне $\bigcup_{A \in \mathcal{A}_S} X_A$, этот участок заменяется ребром $[x_{i-1}, x_{j+1}]$, т. е. нить φ преобразуется в $(x_0, [x_0, x_1], x_1, \dots, x_{i-1}, [x_{i-1}, x_{j+1}], x_{j+1}, \dots, x_k)$. Таким образом, мы получаем сеть $N' = (V', T'; c')$ (где $V' = V \setminus \bigcup X_A$) и мультипоток Φ' в ней, по-прежнему запирающий все $A \in \mathcal{A}_S$. Пусть $N_A = (X_A, A; c_A)$ — подсеть в N' , порожденная множеством вершин X_A , $A \in \mathcal{A}_S$. Возьмем совокупность подсетей $\{N_A^1, N_A^2; A \in \mathcal{A}_S\}$ (где N_A^1 и N_A^2 — копии сети N_A) и для каждой пары смежных антиклик A и B произведем «склеивание» сетей N_A^1 и N_B^2 (по множеству, изоморфному X_{AB}), а также сетей N_A^2 и N_B^1 . В результате мы получим сеть $\tilde{N} = (\tilde{V}, \tilde{T}; \tilde{c})$, в которой каждой вершине $x \in V$ отвечает пара вершин (копий) x^1, x^2 (см. рис. 15);

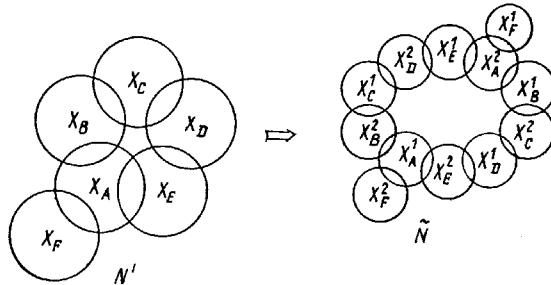


Рис. 15

обозначим через $\gamma: \tilde{V} \rightarrow V$ отображение, переводящее «копию» x^i в «оригинальную» вершину x . Определим мультипоток $\tilde{\Phi}$ в \tilde{V} . Каждая нить $\varphi \in \Phi'$ переходит в пару непересекающихся нитей φ' и φ'' в $\tilde{\Phi}$, образованных копиями вершин в φ (с сохранением порядка следования). При этом соблюдается правило: если нить φ имеет участок в N_A , то одна из копий имеет изоморфный участок в N_A^1 , а другая — в N_A^2 . Заметим, что пропускная способность ребер $[x, y]$, не принадлежащих какой-либо подсети N_A^i , $A \in \mathcal{A}_S$, $i=1, 2$, полагается равной функции нагрузки $\zeta_{\tilde{\Phi}}$. Зададим потоковую схему $\tilde{S} = (\tilde{T}, \tilde{U})$ семейством ее антиклик $\mathcal{A}_{\tilde{S}} = \{A^1, A^2; A \in \mathcal{A}_S\}$ (A^i — множество полюсов в N_A^i). Справедливо

Утверждение 5.8. 1) Схема \tilde{S} — четная; для антиклики A^i множеством смежных антиклик является $O(A^i) = \{B^{3-i}; B \in O(A)\}$. 2) Для любого ребра $[s, t] \in \tilde{U}$ либо $[\gamma(s), \gamma(t)] \in U$ либо $\gamma(s), \gamma(t) \in A$ для некоторой антиклики $A \in \mathcal{A}_S$. 3) Для каждой нити $\varphi \in \Phi'$, являющейся, соответственно, 1-нитью, 2-нитью, критической нитью, ее копии $\varphi', \varphi'' \in \tilde{\Phi}$ являются таковыми же и по построению определяются однозначно.

Замечание 5.3. Пусть $\varphi[s, t] = (s = x_0, (x_0, x_1), x_1, \dots, x_k = t)$ —

истинная некритическая нить. Определим $i(s)$ — максимальный номер i , при котором вершина x_i еще принадлежит X_A , при $s \in A^+$, либо $X_A \cup X_B$ — при $s \in A \cap B$; аналогично определим $i(t)$. Тогда $i(t) = i(s) + 1$. При построении копий $\Phi'[s', t']$ и $\Phi''[s'', t'']$ нити $\Phi[s, t]$ участки $\Phi'[s', x_{i(s)}]$, $\Phi'[x_{i(t)}, t']$, $\Phi''[s'', x_{i(s)}]$, $\Phi''[x_{i(t)}, t'']$ однозначно определяются своими концами s' , t' , s'' , t'' , соответственно; при этом концы s' , s'' (копии s) и концы t' , t'' (копии t) могут быть определены произвольно (т. е. возможны два варианта задания пары копий Φ' , Φ''). Единственное исключение: $s \in A$, $t \in B$ и A , B — смежны. В этом случае выбор делается однозначно: $s' \in X_A^1$, $t' \in X_B^2$, $s'' \in X_A^2$, $t'' \in X_B^1$.

Пусть $\tilde{\Phi}^*$ получен в результате проведения основного этапа алгоритма для сети \tilde{N} , четной схемы \tilde{S} и исходного мультипотока $\tilde{\Phi}$ и пусть $\{X(A^i), A^i \in \mathcal{A}_{\tilde{S}}\}$ — соответствующая система запирающих множеств. Каждой нити $\tilde{\Phi}^* \in \tilde{\Phi}^*$ сопоставим нить $\Phi^* = \frac{1}{2} \gamma(\tilde{\Phi}^*)$ в сети N' , совокупность таких нитей обозначим Φ^* . Покажем, что Φ_U^* — искомый (оптимальный) мультипоток в сети N' со схемой S . Из того что $c[x, y] = \tilde{c}[x', y'] + \tilde{c}[x', y''] + \tilde{c}[x'', y'] + \tilde{c}[x'', y'']$ ($\gamma(x') = \gamma(x'') = x$, $\gamma(y') = \gamma(y'') = y$) и $\zeta_{\tilde{\Phi}^*} \leq \tilde{c}$, следует $\zeta_{\Phi^*} \leq c$. Легко видеть также, что множества $\gamma(X(A^i))$, $A^i \in \mathcal{A}_{\tilde{S}}$, являются насыщенными мультипотоком Φ^* , причем прообразами нитей, участвующих в насыщении, являются истинные нити в $\tilde{\Phi}^*$. Установим отсутствие в $\tilde{\Phi}^*$ истинных нитей $\tilde{\Phi}^*[s', t']$, для которых $s' \in A^1$, $t' \in A^2$ (тогда для любой нити $\tilde{\Phi}^*$, истинной в $\tilde{\Phi}^*$, ее образ $\gamma(\tilde{\Phi}^*)$ — истинная нить в Φ^*).

Пусть $\tilde{\Phi}[p, q] = (p = x_0, [x_0, x_1], x_1, \dots, x_k = q)$ — истинная некритическая нить исходного мультипотока $\tilde{\Phi}$, и пусть $x_{i(p)} \in X_{A^1}$, $x_{i(q)} \in X_{B^1}$. Если между рабочей нитью и нитью $\tilde{\Phi}$ производится переключение в вершине x_i , $i \leq i(p)$, то для получающейся нити $\tilde{\Phi}'[p', q] = \langle p', i(p), i(q), q \rangle \tilde{\Phi}'$ вследствие ее согласованности с X_{A^1} справедливо $p' \in X_{A^1}$ (так же, как и $p \in X_{A^1}$). Следовательно, концы p^* и q^* окончательной нити $\tilde{\Phi}^*[p^*, q^*]$, полученной из $\tilde{\Phi}$, всегда будут принадлежать X_{A^1} и X_{B^1} , соответственно. Согласно замечанию 5.3 антиклики A и B различны и несмежны, отсюда нетрудно заключить, что не существует такой антиклики $C \in \mathcal{A}_S$, что $p^* \in C^m$, $q^* \in C^{3-m}$ ($1 \leq m \leq 2$), а это означает истинность нити $\gamma(\tilde{\Phi}^*)$. Все остальные нити в $\tilde{\Phi}^*$ — это 1-нити, 2-нити и критические нити; истинность такой нити Φ эквивалентна истинности $\gamma(\Phi)$.

Таким образом, Φ_U^* — оптимальный мультипоток в N' со схемой S , и множества $X(A) \equiv \gamma(X(A^i))$, $Y(A) \equiv \gamma(X(A^2))$, $A \in \mathcal{A}_S$, образуют совокупность разрезов, указанную в теореме 5.3. Мультипоток Φ_U^* очевидным образом перестраивается в мультипоток сети N .

Таким образом мы доказали теоремы 5.2 и 5.3 для класса целочисленных сетей. Эти теоремы, очевидно, верны и для ε -целочисленных сетей (для любого $\varepsilon > 0$). Наконец, справедливость теорем в общем случае следует из выпуклости и замкнутости множества векторов (соответствующего евклидова пространства), изображающего мультипотоки, допустимые для данной сети.

Замечание 5.4. Существуют примеры целочисленных сетей, имеющих только четвертьцелочисленные решения. Например, для сети N

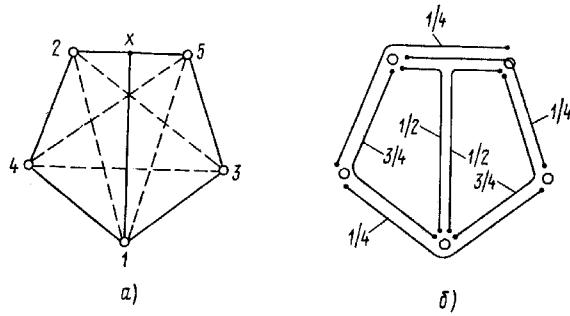


Рис. 16

и схемы $S = C_5 = (1, 2, 3, 4, 5)$ на рис. 16 а (все ребра единичные) оптимальный мультипоток — единственный (он изображен на рис. 16 б), его мощность равна $3\frac{1}{4}$

А. В. Қарзанов, П. А. Певзнер

ОПИСАНИЕ КЛАССА НЕРАЗРЕЗНЫХ ЗАДАЧ О МУЛЬТИПОТОКАХ МАКСИМАЛЬНОЙ МОЩНОСТИ

В статье устанавливается неразрезность для некоторого класса мультипотоковых задач на тах- Σ в неориентированных сетях. Неразрезные массовые задачи на тах- Σ характеризуются тем, что препятствия, ограничивающие мощности мультипотоков, в общем случае не являются линейными комбинациями метрик-разрезов. По-видимому, для таких задач будут недостаточными применяемые до сих пор методы решения, основанные только на преобразованиях мультипотоков вдоль определенных увеличивающих путей — альтернатив насыщенным разрезам. Рассматриваемый класс одержит все те массовые задачи на тах- Σ , которые не входят в класс разрезных задач, решаемых при помощи алгоритма работы [I], таким образом на вопрос о полном описании класса разрезных задач на тах- Σ получен окончательный ответ.

Приведем необходимые нам определения и утверждения, содержащиеся в работе [I]. Потоковой сетью называется объект $(V, T; c)$, состоящий из множества вершин V , множества полюсов $T \subseteq V$ и неотрицательной действительно-значной функции пропускной способности c , заданной на множестве $[V]^d$ неупорядоченных пар различных вершин V .

Сеть $N = (V, T; c)$ может быть задана также в виде пары (G, c) , где $G = (V, E)$ — граф с множеством ребер $E = \{[x, y] \in [V]^d : c[x, y] > 0\}$, а c рассматривается как функция на E . Мультипотоком в сети $N = (V, T; c)$, соответствующим потоковой схеме $S = (T, U)$, называется семейство двухполюсных потоков*, $F = \{f_{st} : [s, t] \in U\}$, такое, что:

$$\zeta_F[x, y] = \sum_{[s, t] \in U} (f_{st}(x, y) + f_{st}(y, x)) \leq c[x, y], \quad \forall [x, y] \in [V]^d.$$

Задача на тах- Σ для сети $N(V, T, c)$ потоковой схемой $S(T, U)$, обозначаемая в виде $\langle S | c \rangle$, состоит в отыскании в N мультипотока $F = \{f_{st} : [s, t] \in U$, максимальной мощности $\|F\| = \sum_{[s, t] \in U} \|f_{st}\|$. Совокупность задач на тах- Σ со всевозможными сетями $N(V, T; c)$ (т. е.

* Определение потока см. в [I].

- б) если функция c — целочисленная (случай c -целочисленной сети), то существует и отыскивается алгоритмом $a < K_p, .Cost >$ полуценчесленное решение; оценка числа действий алгоритма в этом случае — $O(P(|V| \cdot \Sigma_{[x,y] \in E} c[x,y]))$;
- в) если функция a — целочисленная (случай a -целочисленной сети), то справедлива оценка числа действий алгоритма $O(P(|V|) \Sigma_{[x,y] \in E} a[x,y])$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Адельсон-Вельский Г. М., Диниц Е. А., Карзанов А. В. Потоковые алгоритмы. М., «Наука», 1975,
2. Гришухин В. П. Многогранники, связанные со структурами, и минимаксные комбинаторные задачи. — В сб.: Графы, гиперграфы и дискретные оптимизационные задачи. Киев, «Знание», 1977, с. 14—16.
3. Диниц Е. А. Алгоритм решения задачи о максимальном потоке в сети со степенной оценкой. — Доклады АН СССР, 1970, т. 194, № 4.
4. Диниц Е. А., Зайцев М. А., Карзанов А. В. Алгоритм выделения блоков в графе. — Журнал вычислительной математики и математической физики, 1974, т. 14, № 6, с. 1309—1316.
5. Диниц Е. А., Карзанов А. В., Ломоносов М. В. О структуре системы минимальных реберных разрезов графа. — В сб.: Исследования по дискретной оптимизации. М., «Наука», 1976, с. 290—306.
6. Карзанов А. В. Экономный алгоритм нахождения бикомпонент графа. — В сб.: Труды 3-ей Зимней школы по математическому программированию и смежным вопросам в г. Дрогобыч. М., 1970.
7. Карзанов А. В. Нахождение максимального потока в сети методом предпотоков. — Доклады АН СССР, 1974, т. 215, № 1, с. 49—53.
8. Карзанов А. В. Экономные реализации алгоритмов Эдмондса нахождения паросочетания максимальной мощности и максимального веса. — В сб.: Исследования по дискретной оптимизации. М., «Наука», 1976, с. 306—327.
9. Карзанов А. В. Справочная для выборки максимального элемента и ее приложения. — В сб.: Исследования по дискретной оптимизации. М., «Наука», 1976, с. 348—359.
10. Карзанов А. В., Ломоносов М. В. Системы потоков в неориентированных сетях. — В сб.: Математическое программирование. Проблемы социальных и экономических систем. Модели исследований операций. Вып. 1. М., ВНИИСИ, 1978, с. 59—66.
11. Куперштог В. Л. Об одном обобщении теоремы Форда и Фалкерсона на многополюсные сети. — Киев, «Кибернетика», 1971, № 3.
12. Ломоносов М. В. О системе потоков в сети. — Проблемы передачи информации, 1978, т. 13, № 4.
13. Ломоносов М. В. Решение двух задач о потоках в сети. — Проблемы передачи информации, 1979, т. 14, № 1.
14. Оре О. Теория графов. М., «Наука», 1968.
15. Папернов Б. А. Эквивалентные потоковые многополюсники. — В сб.: Вопросы кибернетики. Вып. 3. М., 1973.
16. Папернов Б. А. Реализуемость многопродуктовых потоков. — В сб.: Исследования по дискретной оптимизации. М., «Наука», 1976.
17. Фараджев И. А. Эффективные алгоритмы решения некоторых задач для ориентированных графов. — Журнал вычислительной математики и математической физики, 1970, т. 10, № 4, с. 1049—1054.
18. Форд Л. Р., Фалкерсон Д. Р. Потоки в сетях. М., «Мир», 1966.
19. Харари Ф. Теория графов. М., «Мир», 1973.
20. Ху Т. Ч. Целочисленное программирование и потоки в сетях. М., «Мир», 1974.
21. Черкасский Б. В. Конечный алгоритм решения задачи о двухпродуктовом потоке. — «Экономика и математические методы», 1973, т. 9, № 6, с. 1147—1149.
22. Черкасский Б. В. Многополюсные двухпродуктовые задачи. — В сб.: Исследования по дискретной оптимизации. М., «Наука», 1976, с. 261—289.
23. Черкасский Б. В. Решение одной задачи о многопродуктовых потоках в сети. — «Экономика и математические методы», 1977, т. 13, № 1.
24. Черкасский Б. В. Алгоритм построения максимального потока в сети с трудоемкостью $O(n^2 \sqrt{p})$ действий. — В сб.: Математические методы в экономических исследованиях. Вып. 7. М., «Наука», 1977, с. 117—126.

25. Эррод К., Гурвиц Л., Узазава Х. Исследования по линейному и нелинейному программированию. М., ИЛ, 1962.
26. Balinsky M. L. Establishing the matching polytope. J. Comb. Theory, Ser. B, 1972, v. 13B, № 1, pp. 1—13.
27. Cook S. A. The Complexity of Theorem—Proving Procedures. Conf. Ref. 3-rd Annual ACM Sympos. Theory Comp., N. Y., 1971, pp. 151—158.
28. Cunningham W. H., Marsh A. B. A primal algorithm for optimum matching. In: Mathematical Programming Study, v. 8, 1978, pp. 50—72.
29. Dijkstra E. W. A Note on Two Problems in Connection with Graphs. Numerical Mathematik, 1959, v. 1, pp. 269—271.
30. Edmonds J. Maximum matcing and polyhedron with 0,1-vertices. J. of Research, 1965, v. 69B, № 1, 2.
31. Edmonds J. Edge-disjoint branchings. In: Combinatorial Algorithms, R. Rustin (ed.), Algorithmics Press, N. Y., 1972, pp. 91—96.
32. Edmonds J. Paths, trees and flowers. Can. J. Math., 1965, v. 17, № 3.
33. Edmonds J., Karp R. M. Theoretical Improvements in Algorithmic Efficiency for Network Flow Problems. J. ACM, v. 19, № 2, pp. 248—264.
34. Even S. V., Itai A., Shamir A. On the complexity of timetable and multicommodity flow problem. SIAM J. Comput., 1976 (Dec.), v. 5, № 4.
35. Fulkerson D. R., Harding G. C. On edge-disjoint branchings. Networks, 1976, v. 6, pp. 97—104.
36. Iri M. On an Extension of the Maximum-flow Minimum-cut Theorem to Multi-commodity Flows. J. Operat. Res. Soc. Japan., 1970/71, v. 13, pp. 129—135.
37. Karp R. M. Redusibility among Combinatorial Problems. Proc. Sympos. on Complexity of Computer Computations, N. Y., Plenum Press, 1972.
38. Lovász L. On two minimax theorems in graph. J. Comb. Theory, Ser. B, 1976, v. 21, pp. 96—103.
39. Lucchesi C., Younger D. H. A minimax theorem for directed graphs. Proc. London Math. Soc., 1978, v. 17, Ser. 2, pp. 269—375.
40. Onaga K., Kakusho O. On Feasibility Conditions of Multicommodity Flows in Networks. IEEE Trans. on Circuit Theory, 1971, CT-18, № 4, pp. 425—429.
41. Perl Y., Shiloach Y. Finding Two Disjoint Paths Between Two Pairs of Vertices in a Graph. J. of the Assoc. for Comput. Mach., 1978, v. 25, № 1, pp. 1—9.
42. Pulleyblank N., Edmonds J. Facets of 1-matching polyhedra. In: Hypergraph seminar. Lecture Notes in Math., № 411, pp. 111—126, Springer, Berl.-N. Y., 1974.
43. Seymour P. D. The Matroids with the Max-Flow Min-Cut Property. J. of Comb. Theory, Ser. B, 1977, v. 23, pp. 189—222.
44. Tarjan R. E. Depth-First Search and Linear Graph Algorithms. SIAM J. Comput., 1972, v. 1, pp. 146—160.
45. Tarjan R. E. Finding edge-disjoint spanning trees. Proc. 8th. Haw. Int. Conf. Syst. Sci, Honolulu, Haw., 1975.
46. Tarjan R. E. A good algorithm for edge-disjoint branchings. Inform. Process. Letters, 1974, v. 3, № 2, pp. 51—53.