Е. А. Диниц, В. А. Карзанов

ЦЕЛОЧИСЛЕННАЯ ЗАДАЧА О ДВУХ ПОТОКАХ ЕДИНИЧНОЙ МОЩНОСТИ

В этой статье рассматривается задача о построении двух потоков с мощностями, равными 1, с дополнительным условием целочисленности каждого потока во всех дугах сети. Пусть задана неориентированная потоковая сеть $N=(V, P; c)$, где V — множество вершин, $P=\{s_1, t_1, s_2, t_2\}$ — множество полюсов, $c \geqslant 0$ — целочисленная функция пропускной способности, определенная на множестве $[V]^d$ неупорядоченных пар $x, y \in V$, $x \neq y$. Потоковая схема $S=(P, U)$ для рассматриваемой задачи состоит из двух ребер $[s_1, t_1]$ и $[s_2, t_2]$. Требуется построить допустимый мультипоток $F=\{f_{s_1,t_1}, f_{s_2,t_2}\}$, состоящий из целочисленных потоков единичных мощностей (задача $\langle c; 1, 1 \rangle^I$). Известно (см. [34]), что общая задача о двух целочисленных потоках (задача $\langle c; k, l \rangle^I$, где $c \in \mathscr{E}_+$, $k, l > 0$ — любые целые числа) является универсальной переборной, или NP-полной, задачей.

Рассматриваемая задача $<c;\ 1,\ 1>^I$ имеет графовую постановку, которой мы в дальнейшем будем придерживаться: для заданного неориентированного мультиграфа $G=(V, E; s_1, t_1, s_2, t_2)$ с множеством вершин V, ребер E и выделенными вершинами s_1, t_1, s_2, t_2, в котором ребра, соединяющие вершины x и y имеют кратности $c[x, y]$, построить две непересекающиеся по ребрам цепи (цепь ξ_1, соединяющую s_1 и t_1, и цепь ξ_2, соединяющую s_2 и t_2) либо показать, что таких цепей не существует. В таком, графовом, виде задача будет обозначаться через $<G;\ 1,\ 1>$.

В настоящей работе дается полное описание класса мультиграфов $G=(V, E;\ s_1,\ t_1,\ s_2,\ t_2)$ для которых задача $<G;\ 1, 1>$ имеет решение, а также приводится эффективный (полиномиальный от $|V|$) алгоритм, который либо строит искомые цепи либо устанавливает неразрешимость задачи. В процессе исследования проводится поэтапное отсечение относительно простых случаев. В результате вскрывается узловое место проблемы — прямая связь между существованием решения и непланарностью соответствующего кубического графа (теорема 1).

1. Будем считать, что некоторые из полюсов s_1, t_1, s_2, t_2 могут совпадать. Наличие совпавших полюсов переводит задачу в разряд легко решаемых — решение получается построением одного максимального потока. Такое допущение делается для удобства описания и в подходящий момент будет снято.

Скажем, что мультиграф $G=(V, E;\ s_1,\ t_1,\ s_2,\ t_2)$ *редуцируется* к мультиграфу $G'=(V', E';\ s_1',\ t_1',\ s_2',\ t_2')$, если задачи $<G;\ 1, 1>^I$ и $<G';\ 1, 1>^I$ либо одновременно разрешимы либо одновременно неразрешимы, и в первом случае имеется эффективная процедура (каждый раз уточняется, какая именно), строящая по любому решению задачи $<G';\ 1, 1>^I$ некоторое решение задачи $<G;\ 1, 1>^I$.

Очевидно, нам достаточно рассматривать только связные мультиграфы. Ребро $e \in E$ называется *мостом*, если при его удалении граф перестает быть связным (см. [19]). Пусть $e=[x,\ y]$ — мост в G и $G_1=(V_1,\ E_1)$, $G_2=(V_2,\ E_2)$ — компоненты связанности мультиграфа $G'=(V,\ E \setminus \{e\})$. Возможны следующие варианты расположения полюсов в компонентах G_1 и G_2.

1) $s_1,\ t_1,\ s_2,\ t_2 \in V_1$. Тогда задача $<G;\ 1, 1>$ редуцируется к $<G_1;\ 1, 1>^I$.

2) $s_1,\ t_1,\ s_2,\ \in V_1,\ t_2 \in V_2$. Тогда задача $<G;\ 1, 1>^I$ редуцируется к $<G_1';\ 1, 1>$, где $G_1'=(V_1,\ E_1,\ s_1,\ t_1,\ s_2,\ x)$.

3) $s_1,\ t_1 \in V_1,\ s_2,\ t_2 \in V_2$. Тогда задача $<G;\ 1, 1>^I$ очевидным образом разрешима (цепь ξ_1 строится в G_1, а цепь ξ_2 — в G_2).

4) $s_1,\ s_2 \in V_1,\ t_1,\ t_2 \in V_2$. Тогда задача $<G;\ 1, 1>^I$ неразрешима, поскольку пропускная способность $c(R)$ разреза $R=[V_1,\ V_2]$ равна 1, а через разрез R должны пройти две цепи мощности 1 каждая.

Остальные случаи равносильны каким-либо из рассмотренных. Таким образом, мы можем ограничиться рассмотрением мультиграфов, не имеющих мостов.

2. Примем следующий способ обозначения цепей, аналогичный принятому в [I]. Пусть L — цепь, состоящая из последовательности вершин и ребер $x_0,\ e_0,\ x_1,\ e_1,\ x_2, \ldots, x_{l-1},\ e_{l-1},\ x_l$. Тогда цепь L может быть обозначена как $\langle x_0, \alpha_{s_1}, \alpha_{s_2}, \ldots, \alpha_{s_k}, x_l \rangle L$, где α есть e либо x, а последовательность чисел $s_1, s_2, \ldots, s_k$ $(0 \leqslant s_1,\ s_k \leqslant l-1)$ — неубывающая (обычно множество $\alpha_{s_1}, \ldots, \alpha_{s_k}$ — это то подмножество элементов цепи, которое нас интересует; простейшее обозначение $L=L[x_0,\ x_l]=\langle x_0,\ x_l \rangle L$). Для участка цепи L от x_r до $x_{r'}$ используется обозначение

$$L[x_r,\ x_{r'}]=\langle x_r, \alpha_{s_1}, \alpha_{s_2}, \ldots, \alpha_{s_k}, x_{r'} \rangle L \ (r \leqslant s_1,\ s_k < r').$$

Добавим к мультиграфу G вершину s и четыре ребра $[s,\ s_1]$, $[s,\ t_1]$, $[s,\ s_2]$, $[s,\ t_2]$; полученный мультиграф обозначим $G^s=(V^s,\ E^s)$. Будем обозначать $d(v)$ (соответственно $d^s(v)$) — степень вершины v в графе G (соответственно, в G^s). В мультиграфе G (соответственно и G^s) вершину v будем называть *существенной*, если $d(v) \geqslant 3$ (соответственно $d^s(v) \geqslant 3$). Пусть $R=[V_1,\ V_2]$ — разрез в G^s. То из множеств V_1, V_2, которое содержит s, будем называть *внешностью*, а оставшееся — *внутренностью* разреза R; для разреза $R=[V_1,\ V_2]$ внутренность которого V_1, примем обозначение $(V_1,\ V_2)$ (для V_2 — соответственно, $(V_2,\ V_1)$).

В мультиграфе G (G^s) пропускной способностью $c(R)$ (соответственно, $c^s(R)$) разреза $R=[V_1,\ V_2]$ называется число ребер, соединяющих V_1 и V_2. Разрез $R=(V_1, V_2)$ в G^s называется *k-блокадой**, если в его внутренности V_1 содержится не менее двух существенных вершин и $c^s(R)=k$. Если G^s не имеет i-блокад, $i=1, 2, \ldots, k-1$, то он называется k-блокадным. Пусть $R=(V_1, V_2)$ — разрез в G^s. Обозначим $G_R{}^s(G_R)$ мультиграф, получающийся из G^s (соответственно, G) стягиванием (т. е. отождествлением) множества V_1.

Лемма 1. Если разрез $R=(V_1, V_2)$ в G^s является 2- или 3-блокадой, то G редуцируется к G_R (полюса, расположенные в V_1, переносятся в отождествленную вершину).

Доказательство. Из разрешимости задачи $\langle G; 1, 1 \rangle^I$ легко следует разрешимость задачи $\langle G_R; 1, 1 \rangle^I$. Докажем обратное. Пусть задача $\langle G_R; 1, 1 \rangle^I$ имеет решение $\{\xi_1, \xi_2\}$ и пусть v_1—отождествленная вершина.

1) $s_1, t_1, s_2, t_2 \notin V_1$. Поскольку вершина v_1 имеет степень 2 или 3, то через v_1 может проходить не более одной цепи ξ_1, ξ_2. Пусть через v_1 проходит цепь $\xi_1 = \langle s_1, x, v_1, y, t_1 \rangle \xi_1$. Поскольку, как нетрудно видеть, подграф $\langle V_1 \rangle G$ мультиграфа G, порожденный множеством V_1, связен, то можно перестроить цепь ξ_1 в цепь $\xi_1' = \langle s_1, x,$ $x_1, x_2, \ldots, x_k, y, t \rangle \xi_1 = \xi_1[s_1, x] \cdot \tilde{\xi}[x, y] \cdot \xi_1[y, t_1] \subset G_R$, где $\tilde{\xi}[x, y]$— цепь, все вершины которой, кроме x и y, принадлежит $\langle V_1 \rangle_G$. Цепи ξ_1' и ξ_2 дают решение задачи $\langle G; 1, 1 \rangle^I$.

2) Множество V_1 содержит один полюс (скажем, s_1). Тогда $[s_1, s]$ — ребро разреза R и, поскольку в G нет мостов, разрез R — 3-блокада. Таким образом, вершина v_1 в G_R (отождествляемая с s_1) имеет степень 2 и через s_1 проходит не более одной цепи ξ_1, ξ_2. По этой цепи, как и в первом случае, восстанавливается цепь в G.

3) Множество V_1 содержит 2 полюса. Но тогда множество V_1 соединяется с $V \setminus V_1$ одним ребром, т. е. мультиграф G имеет мост. Случаи, когда в V_1 содержатся 3 или 4 полюса, также невозможны. ■

3. На основании леммы 1 нам достаточно рассматривать только такие мультиграфы G, для которых мультиграф G^s — 4-блокадный. Мы будем считать далее, что все полюса в G различны.

Лемма 2. Пусть мультиграф G^s — 4-блокадный и содержит вершину v_1, отличную от s и такую, что $d^s(v) \geqslant 4$. Тогда задача $<G; 1, 1>^I$ разрешима.

Доказательство. Будем рассматривать мультиграф G^s в качестве потоковой сети с источником v, стоком s и пропускными способностями всех ребер, равными 1. Построим целочисленный максимальный поток f из v в s. Очевидно $\|f\| \leqslant 4$. Если $\|f\|=4$, то, пользуясь разложением потока f, выделим из f четыре непересекающиеся по ребрам цепи, соединяющие v и s. Каждая из этих цепей проходит через свой полюс из $\{s_1, t_1, s_2, t_2\}$. Сращивая соответствующие пары цепей и удаляя вершину s, мы получим искомое решение задачи $<G; 1, 1>^I$. Пусть $\|f\|<4$. Тогда минимальный разрез $R=(V_1, V_2)$, $v \in V_1$, $s \in V_2$ имеет пропускную способность не более 3. Поскольку степень вершины v не менее 4, то в V_1 должна содержаться по крайней мере еще одна существенная вершина. Следовательно, R — 2- или 3-блокада в G^s, что противоречит условию.

4. Мультиграф G назовем *квазикубическим*, если все его вершины, кроме быть может одной, имеют степени не более 3. На основании лемм 1 и 2 нам осталось рассмотреть только такие мультиграфы G,

* Данное определение k-блокады отлично от общепринятого.

для которых G^s — 4-блокадный квазикубический мультиграф. Пусть e_1 и e_2 — параллельные ребра в G^s, соединяющие вершины x и y. Поскольку степень вершин x и y не более 3 (ввиду очевидного $x \neq s$, $y \neq s$), то вершина x соединена с множеством вершин $V^s \setminus \{x, y\}$ не более чем одним ребром, аналогичное верно для y. Отсюда следует, что либо в G есть мост либо разрез $(\{x, y\}, V^s \setminus \{x, y\})$ — 2-блокада. Таким образом, в рассматриваемом мультиграфе G^s нет параллельных ребер, т. е. G^s — обыкновенный граф.

Рассмотрим граф G. Поскольку он не имеет мостов, то полюса s_1 и t_1 (а также s_2 и t_2) соединимы в G двумя непересекающимися по ребрам цепями L_1' и L_1'' (соответственно, L_2' и L_2''). Эти цепи можно построить при помощи алгоритма нахождения максимального потока. Так как граф G не содержит вершин степени больше 3, то цепи L_1' и L_1'' (соответственно, L_2', L_2'') не пересекаются по вершинам, т. е. образуют простой цикл C_1 (соответственно, C_2). Если по крайней мере одна из цепей L_1', L_1'' не пересекается с какой-либо из цепей L_2', L_2'', то задача $\langle G;\ 1, 1\rangle^I$ решена. Предположим противное. Пусть $x(s_2, 1)$, $x(s_2, 2)$, $x(t_2, 1)$, $x(t_2, 2)$ — ближайшие к s_2, s_2, t_2, t_2 (соответственно) вершины цепей L_2', L_2'', L_2', L_2'' (соответственно), принадлежащие также $L_1' \cup L_1''$. Если окажется, что $x(s_2, 1)$, $x(t_2, 1)$ принадлежат одной и той же цепи из L_1', L_1'', то задача очевидно разрешима (например, если $x(s_2, 1)$, $x(t_2, 1) \in L_1'$, то искомые цепи — $\xi_1 = L_1''$ и $\xi_2 = L_2'[s_2, x(s_2, 1)] \cdot L_1'[x(s_2, 1), x(t_2, 1)] \cdot L_2'[x(t_2, 1), t_2]$), аналогично для $x(s_2, 2)$ и $x(t_2, 2)$. По тем же причинам задача $\langle G;\ 1, 1\rangle^I$ разрешима в случае, когда принадлежат одной и той же цепи из L_1', L_1'' вершины $x(s_2, 1)$ и $x(t_2, 2)$ (аналогично для $x(s_2, 2)$ и $x(t_2, 1)$). Следовательно, остается рассмотреть случай, когда $x(s_2, 1)$ и $x(s_2, 2)$ принадлежат одной, а $x(t_2, 1)$ и $x(t_2, 2)$ — другой из цепей L_1', L_1''. В этом случае цепи $L_2'[s_2, x(s_2, 1)]$, $L_2'[x(t_2, 1), t_2]$, $L_2''[s_2, x(s_2, 2)]$, $L_2''[x(t_2, 1), t_2]$ вместе с четырьмя участками цепей L_1', L_1'' от полюсов s_1, t_1 до ближайших точек пересечения с L_2', L_2'' образуют простой цикл C, содержащий все 4 полюса s_1, t_1, s_2, t_2, причем на одной части цикла от s_1 до t_1 лежит s_2, а на другой — t_2 (такое расположение четырех полюсов на цикле будем называть чередующимся). Итак, справедливо

Предложение 1. Изложенная выше процедура либо строит решение задачи $\langle G;\ 1, 1\rangle^I$ либо выявляет простой цикл C графа G, содержащий полюса s_1, t_1, s_2, t_2 в чередующемся порядке.

5. Теорема 1. Пусть G^s — 4-блокадный квазикубический граф и в G имеется цикл C, содержащий все четыре полюса s_1, t_1, s_2, t_2, которые расположены в C чередующимся образом. Тогда задача $\langle G;\ 1, 1\rangle^I$ разрешима, если и только если граф неплоский.

Доказательство теоремы. Относительно просто доказывается необходимость условия теоремы. Пусть G^s — плоский граф. Рассмотрим некоторую укладку $\mathcal{T}$ графа G^s на плоскость. Поскольку вершины s_1, t_1, s_2, t_2 расположены в цикле C чередующимся образом, то ребра $[s, s_1]$, $[s, t_1]$, $[s, s_2]$, $[s, t_2]$ также расположены в укладке $\mathcal{T}$ чередующимся образом (скажем, порядок следования их по часовой стрелке — $[s, s_1]$, $[s, s_2]$, $[s, t_1]$, $[s, t_2]$). Пусть M — грань, получающаяся при объединении четырех граней в укладке $\mathcal{T}$, содержащих вершину s (т. е. при выбрасывании вершины s), и пусть $B(M)$ — граница грани M. Тогда полюса s_1, t_1, s_2, t_2 расположены в цикле $B(M)$ в чередующемся порядке. Пусть теперь в G существуют требуемые цепи ξ_1 и ξ_2. Тогда из теоремы Жордана следует, что эти цепи пересекаются (рис. 1). Последнее противоречит тому, что граф G^s квазикубический:

если точка пересечения v — не полюс, то $d^s(v) \geqslant 4$, если же v — полюс, то $d(v) \geqslant 3$, а $d^s(v) \geqslant 4$.

Перейдем теперь к более сложному доказательству достаточности условий теоремы: если граф G^s неплоский, то задача $<G;\ 1, 1>^I$ разрешима. При этом мы воспользуемся некоторым итерационным процессом — *сборкой* графа G^s. Пусть перед началом i-й итерации имеются некоторый плоский подграф $G_i^s = (V_i^s, E_i^s)$ графа G^s и его укладка $\mathcal{T}_i$ на плоскость, для которых выполняются следующие условия:

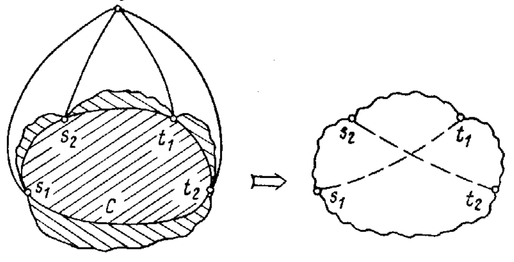


Рис. 1

A. Граф G_i^s содержит вершину s, ребра $[s, s_1]$, $[s, t_1]$, $[s, s_2]$, $[s, t_2]$ и цикл C.

B. Граф G_i^s — 4-блокадный.

C. Пусть $L = L[x, y]$ — некоторая простая цепь графа G^s, которая пересекается с G_i^s только в своих концевых вершинах x и y (такую цепь назовем *ординарной*). Тогда в укладке $\mathcal{T}_i$ вершины x и y принадлежат либо границе одной грани либо границам двух соседних (по стороне) граням.

Из того что граф G_i^s является 4-блокадным и квазикубическим, легко следует, что граница $B(M)$ каждой грани M в укладке $\mathcal{T}_i$ является простым циклом. Грани укладки $\mathcal{T}_i$, содержащие вершину s, будем называть *особыми*.

В качестве начального подграфа G_1^s выбирается граф, являющийся объединением цикла C, вершины s и ребер $[s, s_1]$, $[s, t_1]$, $[s, s_2]$ и $[s, t_2]$. Условия *A*, *B*, *C* для G_1^s очевидно выполняются.

Ординарную цепь L назовем *1-цепью*, если ее концы принадлежат границе одной грани в $\mathcal{T}_i$, и *2-цепью*, если она не является 1-цепью и ее концы принадлежат границам двух соседних граней в $\mathcal{T}_i$.

Лемма 3. Пусть $L = L[x, y]$ — 2-цепь для графа G_i^s и укладки $\mathcal{T}_i$. Тогда задача $<G_i;\ 1, 1>^I$, где $\widetilde{G}_i = G_i \cup L$ разрешима.

Доказательство. Пусть вершины x и y принадлежат, соответственно, соседним странам M' и M''. Пусть $B(M', M'') = B(M') \cap \cap B(M'')$ и $B(M' \nabla M'')$ — граница грани, получающейся из граней M', M'' при выкидывании $B(M', M'')$. Из того что граф G_i^s — 4-блокадный и квазикубический, следует, что $B(M', M'')$ является простой цепью (обозначим ее $\widetilde{L} = \widetilde{L}[z, w]$), а $B(M' \nabla M'')$ — простым циклом. Поместим в «середину» цепи $\widetilde{L}[z, w]$ источник s'', а в «середину» цепи $L[x, y]$ — источник s', и построим в сети $\widetilde{G}_i^s$ целочисленный максимальный поток f с источниками s', s'' и стоком s (считая пропускную способность каждого ребра равной 1). Пусть $\|f\| = 4$, выделим тогда из потока f четыре не пересекающиеся по ребрам цепи $L^x = <s', x, s>L^x$, $L^y = <s', y, s>L^y$, $L^z = <s'', z, s>L^z$, $L^w = <s'', w, s>L^w$. Поскольку граф G_i^s — квазикубический, то цепи L^x, L^y, L^z, L^w попарно пересекаются только в вершинах s, s', s''. Каждая из этих цепей проходит через одну из вершин s_1, t_1, s_2, t_2. Пусть для определенности через вершину s_1 проходит цепь L^z. Тогда, поскольку цикл $\tilde{C}=L^z \cup L^w$ в $\mathcal{T}_i$ разделяет вершины x и y, с каждой стороны цикла $\tilde{C}$ лежит ровно один полюс из множества $\{t_1, s_2, t_2\}$ и, ввиду того, что полюса s_1, t_1, s_2, t_2 расположены в чередующемся порядке, цепь L^w проходит через вершину t_1 (рис. 2). Объединив попарно цепи L^w и L^z, а также L^x и L^y и удалив

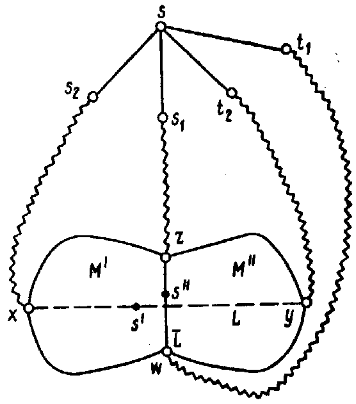


Рис. 2

вершину s, мы получим решение задачи $<G; 1, 1>^I$, являющееся также решением задачи $<G; 1, 1>^I$. ■

Итак, нам осталось рассмотреть случай, когда все ординарные цепи являются 1-цепями. Рассмотрим произвольную грань M в $\mathcal{T}_i$. Из 4-блокадности и квазикубичности графа G_i^s, а также из того, что $B(M)$ соединяется с остальной частью графа G_i^s только ребрами, инцидентными существенным вершинам, следует, что $B(M)$ содержит не менее четырех существенных в G_i^s вершин, если грань M — неособая, и не менее трех, если грань M — особая. Проведем классификацию 1-цепей.

Пусть $L=L[x, y]$ — 1-цепь, и ее концы x и y принадлежат $B(M)$. Очевидно вершины x и y не являются существенными в G_i^s. Пусть вершины x и y разделяют $B(M)$ на две цепи L_1 и L_2 и пусть $\nu(L_i)$ — число существенных вершин в L_i, $i=1, 2$. 1-цепь $L[x, y]$ называется: а) цепью *первого типа* если $\min\{\nu(L_1), \nu(L_2)\}=0$; б) цепью *второго типа*, если

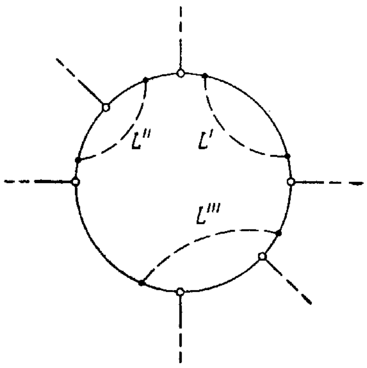


Рис. 3

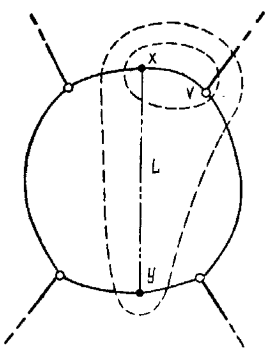


Рис. 4

$\min\{\nu(L_1), \nu(L_2)\}=1$ и в) цепью *третьего типа*, если $\min\{\nu(L_1), \nu(L_2)\}\geqslant 2$ (на рис. 3 изображены: цепь первого типа L', цепь второго типа L'' и цепь третьего типа L'''). Заметим, что цепи второго и третьего типа можно добавить к укладке $\mathcal{T}_i$, не нарушая плоского расположения, единственным образом — укладывая их внутрь страны M, а цепь первого типа — двумя способами: укладывая ее либо внутрь M либо внутри некоторой соседней с M страны M'.

Лемма 4. Пусть $L[x, y]$ — 1-цепь третьего типа. Тогда граф. $G^s_{i+1}=G^s_i \cup L[x, y]$ — 4-блокадный.

Доказательство. Пусть вершины x и y принадлежат $B(M)$ Рассмотрим произвольный разрез $R=(V_1, V_2)$ в G^s_{i+1}, внутренность которого V_1 содержит не менее двух существенных вершин и связна; обозначим $c_{i+1}(R)$ — пропускную способность разреза R в G^s_{i+1}, а $c_i(R')$ — пропускную способность соответствующего разреза $R'=(V'_1, V'_2)$ в G^s_i. Очевидно, $c_{i+1}(R)\geqslant c_i(R')$. Если x, $y\notin V_1$, то в V'_1 не менее двух существенных вершин и вследствие условия B $c_i(R')\geqslant 4$, откуда $c_{i+1}(R)\geqslant 4$. Если V_1 не содержит существенных вершин графа G^s_i, то x, $y\in V_i$ и, как легко видеть, $c_{i+1}(R)\geqslant 4$. Пусть V_1 содержит ровно одну существенную вершину v графа G^s_i. Тогда в силу связности V_1 вершины x, y, v принадлежат границе одной грани, и если x, $y\in V_1$, то $c_{i+1}(R)=5$, а если $x\in V_1$, $y\notin V_1$, то $c_{i+1}(R)=4$ (рис. 4). ■

Итак, если среди ординарных цепей нет 2-цепей, но есть некоторая 1-цепь третьего типа $L[x, y]$, то мы строим граф G^s_{i+1} и укладку $\mathcal{T}_{i+1}$, добавляя к G^s_i и $\mathcal{T}_i$ цепь $L[x, y]$. Для G^s_{i+1} и $\mathcal{T}_{i+1}$ условия A и C очевидны, условие B доказывается леммой 4.

Осталось рассмотреть случай, когда нет 2-цепей и 1-цепей третьего типа.

Лемма 5. Пусть для G_i^s и $\mathcal{T}_i$ нет 2-цепей и 1-цепей третьего типа. Тогда существует 1-цепь второго типа.

Доказательство. Предположим противное. Выберем цепь первого типа $[x, y]$, концевые вершины которой x и y принадлежат некоторой стороне $\tilde{L}=<z, z', w', w>\tilde{L}$ в $\mathcal{T}_i$ (здесь z и w — существенные вершины в G_i^s, ограничивающие сторону, а z' и w' — вершины, соседние с z и w, соответственно). Из условий леммы следует, что не существует ординарных цепей с началом, принадежащим $\tilde{L}[z', w]$, а концом — не принадлежащим $\tilde{L}[z', w']$. Поскольку множество вершин V_1 цепи $\tilde{L}[z', w']$ содержит существенные (для G^s) вершины x, y, то разрез $R=(V_1, V\setminus V_1)$ — 2-блокада графа G^s, что невозможно. ■

В соответствии с леммой 5 выберем некоторую 1-цепь второго типа $L=L[x, y]$, и пусть вершины x и y принадлежат границе $B(M)$ грани M. Рассмотрим тот из двух участков границы $B(M)$ между вершинами x и y, который содержит одну существенную вершину (v). Пусть в вершине v сходятся грани M_1, M_2, M_3 и стороны $L_1[v, v_1]$, $L_2[v, v_2]$, $L_3[v, v_3]$ и пусть $x\in L_1$, $y\in L_2$ (рис. 5). Выделим семейство $\mathcal{M}(v)$, состоящее из ординарных цепей, по крайней мере один конец которых принадлежит $L_1\cup L_2\cup L_3$. Будем считать, что все цепи в $\mathcal{M}(v)$ попарно не пересекаются, кроме своих конечных вершин (точнее, мы делаем преобразование графа G^s, состоящее в удалении всех ребер, принадлежащих цепям из $\mathcal{M}(v)$ и приклеивании элементов семейства $\mathcal{M}(v)$ к соответствующим концевым вершинам). На некоторых цепях в $\mathcal{M}(v)$ введем ориентацию ребер: 1) если $\tilde{L}[z, w]$ — цепь первого типа и вершина w расположена дальше от v, чем z, то ориентируем все ребра в $\tilde{L}[z, w]$ в направлении от z к w; 2) если $\tilde{L}[z, w]$ такова, что

$w \in L_3$, а $z \in L_1 \cup L_2$, то ориентируем все ребра в $\tilde{L}[z, w]$ от z к w; 3) если $\tilde{L}[z, w]$ такова, что $z \in L_1 \cup L_2 \cup L_3$, $w \notin L_1 \cup L_2 \cup L_3$, то ориентируем все ребра в $\tilde{L}[z, w]$ от z к w (на рис. 5 указаны пунктиром возможные цепи из $\mathcal{M}(v)$ и ориентация их ребер). Ориентируем также все

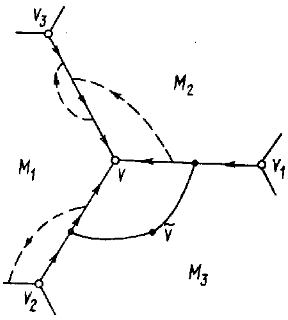


Рис. 5

ребра цепей L_i (при $i=1, 2, 3$) от v_i к v. В «середину» цепи $L[x, y]$ поместим вершину $\tilde{v}$ и рассмотрим множество *$\tilde{v}$-путей* — таких простых путей, которые начинаются в $\tilde{v}$ и проходят либо по неориентированным ребрам (в любом направлении) либо по ориентированным ребрам в соответствии с их ориентацией.

Лемма 6. Существует $\tilde{v}$-путь, оканчивающийся в вершине $v' : v' \notin L_1 \cup L_2 \cup L_3$, $v' \in V_i^s$.

Доказательство. Предположим противное, и пусть T — множество вершин, достижимых $\tilde{v}$-путями. Тогда $v_1, v_2, v_3 \notin T$ и множество T соединяется с $V^s \setminus T$ только тремя ребрами, расположенными на L_1, L_2, L_3, т. е. $R=(T, V^s \setminus T)$ — 3-блокада в G^s. ■

Итак, должен существовать $\tilde{v}$-путь $\hat{L}(\tilde{v}, z)$ с концом $z \notin L_1 \cup L_2 \cup L_3$. Произведем следующую обработку пути $\hat{L}$. Пусть для определенности путь $\hat{L}$ проходит через вершину x, тогда нарастим его с начала участком $L(y, \tilde{v})$; полученный путь обозначим $\hat{L}(y, z)$. Пусть далее $z' \in V_i^s$ — самая первая вершина в $\hat{L}$, не принадлежащая $L_1 \cup L_2 \cup L_3$, тогда вместо пути $\hat{L}(y, z)$ будем рассматривать его участок $\hat{L}(y, z')$. Очевидно, что $z' \in B(M_1) \cup B(M_2) \cup B(M_3)$. Из правил ориентации ребер, принадлежащих цепям в $M(v)$, и ориентации ребер цепей L_1, L_2, L_3 следует, что путь $\hat{L}(y, z')$ оканчивается цепью второго вида $\xi'[w', z']$, где $w' \in L_1 \cup L_2 \cup L_3$. Путь $\hat{L}(y, z')$ состоит из целых цепей семейства $\mathcal{M}(v)$, между которыми вставлены участки цепей L_1, L_2, L_3. Рассмотрим самую последнюю в $\hat{L}$ цепь второго типа $\xi''[w'', z'']$, где $w'', z'' \in L_1 \cup L_2 \cup L_3$. Тогда путь $\hat{L}(w'', z')$ начинается с цепи ξ'', оканчивается цепью ξ', а все остальные цепи из $\mathcal{M}(v)$, принадлежащие ему, — это цепи первого типа. Пусть для определенности $w'' \in L_2$, $z'' \in L_1$; тогда вершина w' и концы всех цепей первого типа в $\hat{L}[w'', z']$ принадлежат L_1 и цепь $\hat{L}[w'', z']$ имеет следующий вид: (рис. 6).

$$\hat{L}[w''=x_1, z'=y_l] = L'[x_1, y_1=z''] \cdot L_1[y_1, x_2] \cdot L^2[x_2, y_2] \times$$
$$\times L_1[y_2, x_3] \cdot \ldots \cdot L_1[y_{l-1}, x_l] \cdot L^l[x_l=w', y_l=z']$$

Перенесем путь $\hat{L}(x_1, y_l)$ в граф G^s. Если этот путь стал самопересекающимся, то выделим в нем простой путь с тем же началом и концом; тогда выделенный путь устроен аналогично рассмотренному пути $\hat{L}(x_1, y_l)$. Сохраним за новым путем то же самое обозначение $L(x_1, y_l)$; теперь $\hat{L}(x_1, y_l)$ — это простой путь в графе G^s. Предполо-

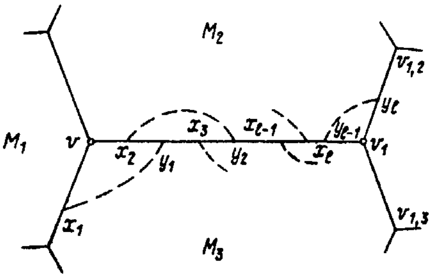


Рис. 6

жим далее, что вершина $y_{r'}$ расположена дальше от v, чем вершина $x_{r''}$ и $r' < l$, $r'' > 1$, $r'' \geqslant r' + 2$. Тогда заменим участок пути $\hat{L}(x_1, y_l)$ от $y_{r'}$ до $x_{r''}$ цепью $L_1[y_{r'}, x_{r''}]$. Проделав необходимое число таких преобразований пути $\hat{L}(x_1, y_l)$, получим простой путь (сохранив за ним то же самое обозначение $\hat{L}(x_1, y_l)$, для которого последовательность вершин $x_2, y_1, x_3, y_2, x_y, y_3, \ldots, y_{l-2}, x_l, y_{l-1}$ упорядочена по удалению от v.

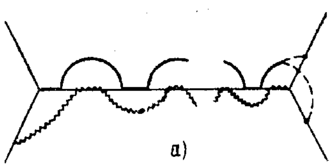
Обозначим $v_{1,2}$ следующую за v и v_1 существенную вершину границы $B(M_2)$, а $v_{1,3}$ — аналогичную вершину в $B(M_3)$ (рис. 6). Поскольку $L^l[x_l, y_l]$ — цепь второго типа, вершина y_l расположена либо на $B(M_2)$ между v_1 и $v_{1,2}$ либо на $B(M_3)$ между v_1 и $v_{1,3}$.

Образуем пару цепей L^a, L^b по следующим правилам:

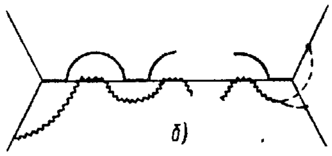
1) l — четно, $l = 2l'$; $L^a = L^a[x_1, x_{l+1}] = L^1[x_1, y_1] \cdot L_1[y_1, x_3] \times L^3[x_3, y_3] \cdot \ldots \cdot L_1[y_{2l'-1}, v_1 = x_{2l'+1=l+1}]$; $L^b = L^b[y_0, y_l] = L_1[v = y_0, x_2] \times L^2[x_2, y_2] \cdot L_1[y_2, x_4] \cdot \ldots \cdot L^l[x_{2l'}, y_l]$;

2) l — нечетно, $l = 2l' + 1$: $L^a = L^a[x_1, y_l] = L^1[x_1, y_1] \cdot L_1[y_1, x_3] \cdot \ldots \cdot L^l[x_{2l'+1}, y_{2l'+1=l}]$; $L^b = L[y_0, x_{l+1}] = L_1[v = y_0, x_2] \cdot L^2[x_2, y_2] \cdot \ldots \cdot L_1[y_{2l'}, v_1 = x_{2l'+2=l+1}]$.

(на рис. 7а) изображен случай четного l, а на рис. 7б — нечетного; здесь волнистой линией обозначена цепь L^a жирной сплошной — цепь



а)



б)

Рис. 7

L^b, пунктирной линией обозначено возможное окончание цепи $\hat{L}[w', z']$). В каждом из двух случаев возможен вариант прямого или перекрещенного расположения цепей L^a и L^b: при $l=2l'$ и $y_l \in B(M_2)$, а также при $l=2l'+1$ и $y_l \in B(M_3)$ мы имеем случай прямого расположения, а при $l=2l'$ и $y_l \in B(M_3)$ или при $l=2l'+1$ и $y_l \in B(M_2)$ — случай перекрещенного расположения (прямое расположение L^a и L^b означает возможность укладки этих цепей в $\mathcal{T}_i \setminus L_1$ без пересечения, а перекрещенное расположение — невозможность такой укладки).

Сделаем теперь следующее преобразование графа G_i^s: удалим из G_i^s цепь L_1 (кроме вершин v и v_1) и добавим цепь L^a. Очевидно старый и новый графы будут гомеоморфны, а поэтому для нового графа G_i^s мы применяем ту же укладку $\mathcal{T}_i$. Рассмотрим теперь цепь L^b. Если расположение цепей L^a и L^b перекрещенное, то L^b является 2-цепью для новых G_i^s и $\mathcal{T}_i$, что в силу леммы 3 влечет разрешимость задачи $<G_{i+1}; 1, 1>^I$ и, следовательно, $<G; 1, 1>^I$ (здесь $G_{i+1}=G_i \cup L^b$) (рис. 8). Пусть расположение цепей L^a и L^b — прямое. Тогда будем

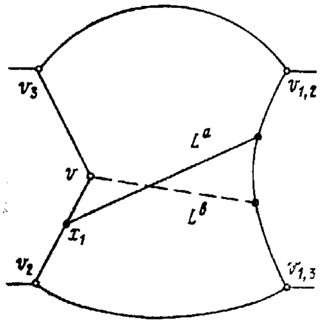


Рис. 8

последовательно добавлять цепи к G_i^s (рис. 9). Вначале проверяем, имеются ли для новых G_i^s и $\mathcal{T}_i$ 2-цепи, и если нет, то добавляем к G_i^s цепь L^b. Очевидно, цепь L^b является 1-цепью третьего типа, поэтому на

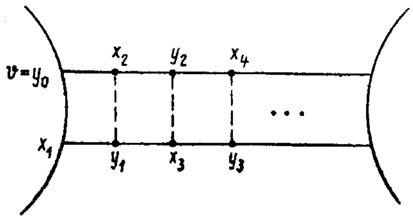


Рис. 9

основании леммы 4 условие B не будет нарушено. Далее к новому графу G_i^s последовательно добавляем цепи $L_1[x_2, y_1]$, $L_1[x_3, y_2]$, ..., $L_1[x_{l+1}, y_l]$. Заметим, что каждая из добавляемых цепей для текущих G_i^s и $\mathcal{T}_i$ будет являться 1-цепью третьего типа, следовательно, условие B будет сохраняться. Как только при добавлении очередной цепи для текущих G_i^s и $\mathcal{T}_i$ возникнет 2-цепь, то процесс прекращается и на основании леммы 3 строится решение задачи $<G; 1, 1>^I$.

В случае, если удалось добавить все указанные цепи, будут построены граф G_{i+1}^s и укладка $\mathcal{T}_{i+1}$, для которых выполняются условия A, B, C.

Поскольку описанный итерационный процесс исчерпывает весь граф G^s и при этом процессе все текущие графы плоские, то, ввиду того, что граф G^s — неплоский, рано или поздно нам встретится 2-цепь и мы построим решение задачи $<G;\ 1, 1>^I$. Итак, теорема доказана.

6. Таким образом, леммы 1, 2 и теорема 1 дают полное описание мультиграфов G, для которых задача $<G;\ 1, 1>^I$ разрешима.

Данное доказательство фактически проведено конструктивными средствами и легко может быть преобразовано в алгоритм решения задачи $<G;\ 1, 1>^I$. Поясним некоторые моменты алгоритма. Пусть n — число вершин, а m — число ребер в остовном графе мультиграфа G (т. е. в графе, получающемся из G путем замены каждой совокупности кратных ребер одним ребром).

1) Выявление мостов (п. 1) — эффективная процедура, которая может быть осуществлена за $O(m)$ действий (см., например [4, 6, 44]).

2) Нахождение 2- и 3-блокад графа G_3 (п. 2) можно проводить следующим заведомо неэкономным, но эффективным способом. Будем склеивать пары существенных вершин и искать максимальный поток из склеенной вершины в s. Если мощность потока 2 или 3, то соответствующий минимальный разрез будет 2- или 3-блокадой.

3) Построение решения в случае, если 1-блокадный граф G^s содержит вершину $v(v \neq s)$ с $d^s(v) \geqslant 4$ (п. 3), сводится к решению одной задачи о построении потока данной мощности.

4) Описанная в п. 4 работа с 4-блокадным квазикубическим графом G^s состоит в построении цепей L_1', L_1'', L_2', L_2'' и в дальнейшем комбинаторном их исследовании. Построение каждой пары цепей можно произвести при помощи алгоритма построения потока данной мощности.

5) Наиболее существенная часть алгоритма состоит в работе с 4-блокадным квазикубическим графом G^s, имеющим цикл C (п. 5), в результате которой либо строится решение, либо устанавливается, что граф G^s — плоский. Алгоритм производит итерационное исчерпывание графа G^s, начиная от G_1^s до тех пор, пока не будет построен весь граф G^s (тогда G^s — плоский граф) либо пока не возникнет 2-цепь (тогда применяется заключительная процедура — построение искомых цепей путем решения одной задачи о потоке данной мощности). На каждой итерации мы исследуем ординарные цепи, эти цепи за исключением своих концов принадлежат $G^s \setminus G_i^s$. Множество таких цепей может быть велико, но фактически нас интересует только то, какие пары вершин в G_i^s связываются ординарными цепями, поэтому нам достаточно иметь набор, состоящий не более чем из C_n^2 цепей, имеющих различные пары концов. Таким образом, можно считать, что нахождение множества ординарных цепей — эффективная процедура. Наиболее трудоемкая работа производится в случае отсутствия 2-цепей и 1-цепей третьего типа. В этом случае мы ищем требуемый v-путь на графе G_i^s с добавленными (но не пересекающимися) цепями из $\mathcal{M}(v)$ и затем устраняем в этом пути избыточные участки.

Из сказанного следует, что алгоритм решения задачи $<G;\ 1, 1>^I$ имеет полиномиальную от $|V|$ трудоемкость.

В заключение заметим, что в своих построениях мы фактически попутно указали процедуру распознавания планарности 4-блокадного квазикубического графа, а также его укладки на плоскость. Кроме того, в случае, если граф G^s — неплоский, мы обнаруживаем такой плоский 4-блокадный подграф графа G^s и такую цепь, добавление которой делает этот подграф неплоским. Отсюда легко получить подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Адельсон-Вельский Г. М., Диниц Е. А., Карзанов А. В.* Потоковые алгоритмы. М., «Наука», 1975,
2. *Гришухин В. П.* Многогранники, связанные со структурами, и минимаксные комбинаторные задачи.— В сб.: Графы, гиперграфы и дискретные оптимизационные задачи. Киев, «Знание», 1977, с. 14—16.
3. *Диниц Е. А.* Алгоритм решения задачи о максимальном потоке в сети со степенной оценкой. — Доклады АН СССР, 1970, т. 194, № 4.
4. *Диниц Е. А., Зайцев М. А., Карзанов А. В.* Алгоритм выделения блоков в графе. — Журнал вычислительной математики и математической физики, 1974, т. 14, № 6, с. 1309—1316.
5. *Диниц Е. А., Карзанов А. В., Ломоносов М. В.* О структуре системы минимальных реберных разрезов графа. — В сб.: Исследования по дискретной оптимизации. М., «Наука», 1976, с. 290—306.
6. *Карзанов А. В.* Экономный алгоритм нахождения бикомпонент графа. — В сб.: Труды 3-ей Зимней школы по математическому программированию и смежным вопросам в г. Дрогобыч. М., 1970.
7. *Карзанов А. В.* Нахождение максимального потока в сети методом предпотоков. — Доклады АН СССР, 1974, т. 215, № 1, с. 49—53.
8. *Карзанов А. В.* Экономные реализации алгоритмов Эдмондса нахождения паросочетания максимальной мощности и максимального веса. — В сб.: Исследования по дискретной оптимизации. М., «Наука», 1976, с. 306—327.
9. *Карзанов А. В.* Справочная для выборки максимального элемента и ее приложения. — В сб.: Исследования по дискретной оптимизации. М., «Наука», 1976, с. 348—359.
10. *Карзанов А. В., Ломоносов М. В.* Системы потоков в неориентированных сетях. — В сб.: Математическое программирование. Проблемы социальных и экономических систем. Модели исследования операций. Вып. 1. М., ВНИИСИ, 1978, с. 59—66.
11. *Куперштох В. Л.* Об одном обобщении теоремы Форда и Фалкерсона на многополюсные сети. — Киев, «Кибернетика», 1971, № 3.
12. *Ломоносов М. В.* О системе потоков в сети. — Проблемы передачи информации, 1978, т. 13, № 4.
13. *Ломоносов М. В.* Решение двух задач о потоках в сети. — Проблемы передачи информации. 1979, т. 14, № 1.
14. *Оре О.* Теория графов. М., «Наука», 1968.
15. *Папернов Б. А.* Эквивалентные потоковые многополюсники. — В сб.: Вопросы кибернетики. Вып. 3. М., 1973.
16. *Папернов Б. А.* Реализуемость многопродуктовых потоков. — В сб.: Исследования по дискретной оптимизации. М., «Наука», 1976.
17. *Фараджев И. А.* Эффективные алгоритмы решения некоторых задач для ориентированных графов. — Журнал вычислительной математики и математической физики, 1970, т. 10, № 4, с. 1049—1054.
18. *Форд Л. Р., Фалкерсон Д. Р.* Потоки в сетях. М., «Мир», 1966.
19. *Харари Ф.* Теория графов. М., «Мир», 1973.
20. *Ху Т. Ч.* Целочисленное программирование и потоки в сетях. М., «Мир», 1974.
21. *Черкасский Б. В.* Конечный алгоритм решения задачи о двухпродуктовом потоке. — «Экономика и математические методы», 1973, т. 9, № 6, с. 1147—1149.
22. *Черкасский Б. В.* Многополюсные двухпродуктовые задачи. — В сб.: Исследования по дискретной оптимизации. М., «Наука», 1976, с. 261—289.
23. *Черкасский Б. В.* Решение одной задачи о многопродуктовых потоках в сети. — «Экономика и математические методы», 1977, т. 13, № 1.
24. *Черкасский Б. В.* Алгоритм построения максимального потока в сети с трудоемкостью $O(n^2\sqrt{p})$ действий. — В сб.: Математические методы в экономических исследованиях. Вып. 7. М., «Наука»,1977, с. 117—126.

25. *Эрроу К. Дж., Гурвиц Л., удзава Х.* Исследования по линейному и нелинейному программированию. М., ИЛ, 1962.
26. *Balinsky M. L.* Establishing the matching polytope. J. Comb. Theory, Ser. B, 1972, v. 13B, № 1, pp. 1—13.
27. *Cook S. A.* The Complexity of Theorem—Proving Procedures. Conf. Ref. 3-rd Annual ACM Sympos. Theory Comp., N. Y., 1971, pp. 151—158.
28. *Cunnigham W. H., Marsh A. B.* A primal algorithm for optimum matching. In: Mathematical Programming Study, v. 8, 1978, pp. 50—72.
29. *Dijkstra E. W.* A Note on Two Problems in Connection with Graphs. Numerical Mathematik, 1959, v. 1, pp. 269—271.
30. *Edmonds J.* Maximum matcing and polyhedron with 0,1-vertices. J. of Research, 1965, v. 698, № 1, 2.
31. *Edmonds J.* Edge-disjoint branchings. In: Combinatorial Algorithms, R. Rustin (ed.), Algorithmics Press, N. Y., 1972, pp. 91—96.
32. *Edmonds J.* Paths, trees and flowers. Can. J. Math., 1965, v. 17, № 3.
33. *Edmonds J., Karp R. M.* Theoretical Improvements in Algorithmic Efficiency for Network Flow Problems. J. ACM, v. 19, № 2, pp. 248—264.
34. *Even S. V., Itai A., Shamir A.* On the complexity of timetable and multicommodity flow problem. SIAM J. Comput., 1976 (Dec.), v. 5, № 4.
35. *Fulkerson D. R., Harding G. C.* On edge-disjoint branchings. Networks, 1976, v. 6, pp. 97—104.
36. *Iri M.* On an Extension of the Maximum-flow Minimum-cut Theorem to Multi-commodity Flows. J. Operat. Res. Soc. Japan., 1970/71, v. 13, pp. 129—135.
37. *Karp R. M.* Redusibility among Combinatorial Problems. Proc. Sympos. on Complexity of Computer Computations, N. Y., Plenum Press, 1972.
38. *Lovász L.* On two minimax theorems in graph. J. Comb. Theory, Ser. B, 1976, v. 21, pp. 96—103.
39. *Lucchessi C., Younger D. H.* A minimax theorem for directed graphs. Proc. London Math. Soc., 1978, v. 17, Ser. 2, pp. 269—375.
40. *Onaga K., Kakusho O.* On Feasibility Conditions of Multicommodity Flows in Networks. IEEE Trans. on Circuit Theory, 1971, CT-18, № 4, pp. 425—429.
41. *Perl Y., Shiloach Y.* Finding Two Disjoint Paths Between Two Pairs of Vertices in a Graph. J. of the Assoc. for Comput. Mach., 1978, v. 25, № 1, pp. 1—9.
42. *Pulleyblank N., Edmonds J.* Facets of 1-matching polyhedra. In: Hypergraph seminar. Lecture Notes in Math., № 411, pp. 111—126, Springer, Berl.-N. Y., 1974.
43. *Seymour P. D.* The Matroids with the Max-Flow Min-Cut Property. J. of Comb. Theory, Ser. B, 1977, v. 23, pp. 189—222.
44. *Tarjan R. E.* Depth-First Search and Linear Graph Algoritms. SIAM J. Comput., 1972, v. 1, pp. 146—160.
45. *Tarjan R. E.* Finding edge-disjoint spanning trees. Proc. 8th. Haw. Int. Conf. Syst. Sci, Honolulu, Haw., 1975.
46. *Tarjan R. E.* A good algorithm for edge-disjoint branchings. Inform. Process. Letters, 1974. v. 3, № 2, pp. 51—53.