А. В. Карзанов

ЭКОНОМНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ДВУХ ИЗВЕСТНЫХ ЗАДАЧ О МУЛЬТИПОТОКАХ В НЕОРИЕНТИРОВАННЫХ СЕТЯХ

Как известно, первыми задачами о семействах потоков в неориентированных сетях, для которых были найдены методы решения комбинаторного характера, явились задача о построении двух потоков с предписанными мощностями либо с максимальной суммой мощностей и задача о построении мультипотока максимальной мощности, в котором допускаются потоки, соединяющие любую пару полюсов (это так называемая свободная задача на max-Σ). Первоначальные методы решения этих задач (алгоритм Т. Ч. Ху [20]) — для первой задачи и первый алгоритм Б. В. Черкасского [23] — для второй задачи) были предназначены для работы с целочисленными сетями и относились к группе условно-эффективных сетевых методов, т. е. имели верхние оценки числа действий, зависящие полиномиально от числа элементов сети и линейно — от суммы числовых параметров (в данном случае — пропускных способностей ребер). В дальнейшем для этих задач были получены алгоритмы, конечные для произвольных сетей и при этом эффективные (т. е. с оценками трудоемкости, зависящими полиномиально от числа элементов) [1; 23]. Наконец, Е. А. Диниц и Б. В. Черкасский построили наиболее экономный алгоритм решения задачи о двух потоках путем четырехкратного решения задачи о максимальном потоке (этот алгоритм приведен в [1]).

В настоящей работе предлагаются два экономных алгоритма, пригодных для произвольных сетей. Первый алгоритм, описываемый в разделе 1, решающий первую задачу (на допустимость), фактически сводит ее к двукратному решению задачи о построении потока заданной мощности. В разделе 2 рассматривается алгоритм решения свободной задачи на max-Σ, этот алгоритм эквивалентен по трудоемкости решению $[\log_2 p]$ задач о максимальном потоке в сетях той же размерности (здесь p — число полюсов сети). Оба алгоритма в случае целочисленных сетей, как и предшествующие методы, гарантируют получение полуцелочисленного решения, разумеется при условии, что используемая процедура нахождения максимального потока строит для таких сетей целочисленное решение.

Неориентированная потоковая сеть $N=(V,\ P;\ c)$ (где V — множество вершин, $P\subseteq V$ — множество полюсов, $c{:}c[x,\ y]$ — функция пропускной способности, заданная на множестве $[V]^d$ неупорядоченных пар x, y различных вершин в V) будет обозначаться в виде $(G,\ c)$, где $G=(V,\ E)$ — граф сети N — объект с множеством вершин V и множеством ребер $E=\{[x,\ y]\in[V]^d | c[x,\ y]>0\}$; можно считать, что в сети (G, c) функция c определена на ребрах графа G. В процессе работы алгоритмов будет весьма важной ориентация промежуточных потоков, поэтому для потока f_{st} с источником s и стоком t (т. е. $\mathrm{div}_{f_{st}}(s)\geqslant 0$, $\mathrm{div}_{f_{st}}(t)\leqslant 0$) будет использоваться обозначение $\vec{f_{st}}$. Необходимые определения можно найти в работе [1].

1. Алгоритм для задачи о двух потоках

Рассматривается класс задач о допустимости $\langle \mathrm{Ex}, \mathrm{П}_2 \rangle$ с потоковой схемой $\mathrm{П}_2=(P, U)$, где U — пара несмежных ребер. Для конкретной рассматриваемой задачи $\langle c,\ d \rangle \in \langle \mathrm{Ex}, \mathrm{П}_2 \rangle$ в сети $N=(V, P; c)$ будем считать, что $P=\{s_1,\ t_1,\ s_2,\ t_2\}$, $U=\{[s_1,\ t_1], [s_2, t_2]\}$, $d_i=d[s_i,\ t_i]$, $i=1,\ 2$. В результате работы алгоритма либо будет установлена неразрешимость задачи либо будут построены потоки $f'=f_{\overrightarrow{s_1t_1}}$, $\|f'\|=d_1$ и $f''=f_{\overrightarrow{t_2s_2}}$, $\|f''\|=d_2$. Алгоритм состоит из двух этапов, на каждом из которых решается одна задача о максимальном потоке (фактически о потоке данной мощности).

Первый этап алгоритма. Добавим к сети $(G,\ c)$ новые полюса s и t и ребра $[s, s_1]$, $[s, s_2]$, $[t, t_1]$, $[t, t_2]$ (рис. 1), для которых положим

$c[s, s_1] = c[t, t_1] = d_1, \quad c[s, s_2] = c[t, t_2] = d_2.$

В полученной сети (G', c) построим максимальный поток $f_{\overrightarrow{st}}$. Если $\|f_{\overrightarrow{st}}\| < d_1 + d_2$, то задача неразрешима. Пусть $\|f_{\overrightarrow{st}}\| = d_1 + d_2$. Удалим добавленные вершины и дуги и разложим поток в оставшейся сети

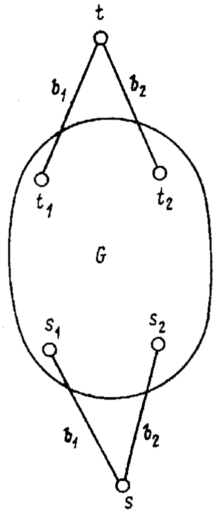

Рис. 1

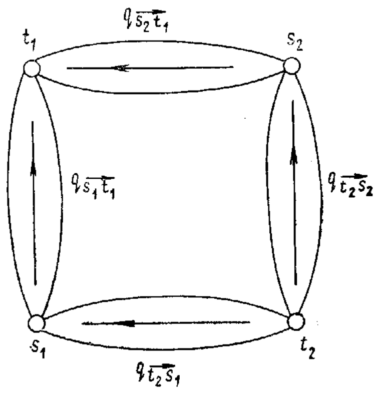

Рис. 2

на четыре подпотока: $g_{\overrightarrow{s_1t_1}}$, $g_{\overrightarrow{s_1t_2}}$, $g_{\overrightarrow{s_2t_1}}$ и $g_{\overrightarrow{s_2t_2}}$, для которых, очевидно выполняется

$$\|g_{\overrightarrow{s_1t_1}}\| + \|g_{\overrightarrow{s_1t_2}}\| = \|g_{\overrightarrow{s_1t_1}}\| + \|g_{\overrightarrow{s_2t_2}}\| = d_1, \tag{1}$$

$$\|g_{\overrightarrow{s_2t_2}}\| + \|g_{\overrightarrow{s_2t_2}}\| = \|g_{\overrightarrow{s_1t_2}}\| + \|g_{\overrightarrow{s_2t_2}}\| = d_2. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует, что

$$\|g_{\overrightarrow{s_1t_2}}\| = \|g_{\overrightarrow{s_2t_1}}\| = d_1 - \|g_{\overrightarrow{s_1t_1}}\| = d_2 - \|g_{\overrightarrow{s_2t_2}}\|. \tag{3}$$

Если $\|g_{\overrightarrow{s_1t_2}}\| = \|g_{\overrightarrow{s_2,t_1}}\| = 0$, то потоки $g_{\overrightarrow{s_1t_2}}$ и $g_{\overrightarrow{s_2t_2}}$ являются решением рассматриваемой задачи. Если $\|g_{\overrightarrow{s_1t_2}}\| = \|g_{\overrightarrow{s_2t_1}}\| > 0$, то приступаем ко второму этапу.

Второй этап алгоритма. Образуем потоки $g_{\overrightarrow{t_2s_2}}$ и $g_{\overrightarrow{t_2s_1}}$ переориентировав, соответственно, потоки $g_{\overrightarrow{s_2t_2}}$ и $g_{\overrightarrow{s_1t_2}}$ (см. рис. 2). Построим ориентированную сеть (G_F, c_F), где $G_F = (V, A_F)$ — граф с тем же множеством вершин V и множеством дуг A_F, полученным путем замены каждого ребра $[x, y] \in E$ парой дуг (x, y) и (y, x); функция пропускной способности c_F: $c_F(x, y)$, $(x, y) \in A_F$ определяется как

$$c_F(x, y) = c[x, y] - F(x, y) + F(y, x), \tag{4}$$

здесь $F = \{g_u;\ u \in U = \{(s_1, t_1), (t_2, s_1), (t_2, s_2), (s_2, t_1)\}$ и $F(z, w) \equiv \equiv \Sigma_{u \in U} g_u(z, w)$, $(z, w) \in A_F$.

В сети G_F построим поток $f_{\overrightarrow{s_1s_2}}$ заданной мощности $2\|g_{\overrightarrow{s_2t_1}}\| = 2\|g_{\overrightarrow{t_2s_1}}\|$. Пусть такого потока не существует. Покажем, что в этом случае исходная задача неразрешима. Пусть $R=(X, Y)$ — минимальный разрез сети G_F, отделяющий полюс s_1 от полюса s_2 (т. е. имеющий минимальную пропускную способность $c_F(X, Y) \equiv \Sigma_{(x,y)\in(X,Y)} c_F(x, y)$). Тогда $c_F(X, Y) < 2\|g_{\overrightarrow{t_2 s_1}}\| = 2\|g_{\overrightarrow{s_2 t_1}}\|$. Следует рассмотреть четыре случая:

1) $s_1 \in X$, s_2, t_1, $t_2 \in Y$; 2) s_1, $t_2 \in X$, s_2, $t_1 \in Y$;
3) s_1, $t_1 \in X$, s_2, $t_2 \in Y$; 4) s_1, t_1, $t_2 \in X$, $s_2 \in Y$.

Рассмотрим наиболее показательный случай 2, для которого получаем:

$$c[X, Y] \equiv \Sigma_{[x,y]\in[X,Y]} c[x, y] = \Sigma_{[x,y]\in[X,Y]} (c[x, y] - F(x, y) +$$
$$+ F(x, y)) + \Sigma_{x\in X, y\in Y} (F(x, y) - F(y, x)) = \Sigma_{(x,y)\in(X,Y)} c_F(x, y) +$$
$$+ \Sigma_{u\in U} \Sigma_{x\in X, y\in Y} (g_u(x, y) - g_u(y, x)) = c_F(X, Y) + \|g_{\overrightarrow{s_1 t_1}}\| +$$
$$+ \|g_{\overrightarrow{t_2 s_2}}\| < \|g_{\overrightarrow{t_2 s_1}}\| + \|g_{\overrightarrow{s_2 t_1}}\| + \|g_{\overrightarrow{s_1 t_1}}\| + \|s_{\overrightarrow{t_2 s_2}}\| = d_1 + d_2,$$

т. е. $c[X, Y] < d]X, Y] \equiv d_1 + d_2$, и в силу японской теоремы (см. [I]) задача неразрешима. В случае 1 мы получаем

$$c[X, Y] = c_F(X, Y) + \|g_{\overrightarrow{s_1 t_1}}\| - \|g_{\overrightarrow{t_2 s_1}}\| < \|g_{\overrightarrow{s_1 t_1}}\| + \|g_{\overrightarrow{t_2 s_1}}\| = d_1.$$

Аналогичное соотношение, показывающее неразрешимость исходной задачи, получаем и в случае 4. Наконец, как показывают те же преобразования, случай 3 невозможен.

Пусть требуемый поток $f_{\overrightarrow{s_1 s_2}}$ построен. Образуем поток $f' \equiv \equiv (g_{\overrightarrow{s_1 t_1}} + g_{\overrightarrow{s_2 t_1}}) \oplus 1/2 f_{\overrightarrow{s_1 s_2}}$:

$$f'(x, y) = \max\left\{g^*_{\overrightarrow{s_1 t_1}}(x, y) + g^*_{\overrightarrow{s_2 t_1}}(x, y) + 1/2 f^*_{s_1 s_2}(x, y), 0\right\},$$

где $h^*(x, y) \equiv h(x, y) - h(y, x)$. Аналогично определим поток $f'' \equiv \equiv (g_{\overrightarrow{t_2 s_2}} + g_{\overrightarrow{t_2 s_1}}) \oplus 1/2 f_{\overrightarrow{s_1 s_2}}$:

$$f''(x, y) = \max\left\{g^*_{\overrightarrow{t_2 s_2}}(x, y) + g^*_{\overrightarrow{t_2 s_1}}(x, y) + 1/2 f^*_{s_1 s_2}(x, y), 0\right\}.$$

Мы покажем, что f' и f'' и есть потоки в сети (G, c), требуемые в исходной задаче. Установим, что f' — поток в сети (G, c) с источником s_1 и стоком t_1, мощность которого равна d_1. Определим функцию

$$h'(x, y) \equiv g_{\overrightarrow{s_1 t_1}}(x, y) + g_{\overrightarrow{s_2 t_1}}(x, y) + 1/2 f_{\overrightarrow{s_1 s_2}}(x, y) \; ((x, y) : [x, y] \in E).$$

Тогда

$$\mathrm{div}_{f'}(x) = \Sigma_{y\in V} f'(x, y) - \Sigma_{y\in V} f'(y, x) = \Sigma_{y\in V} \max\{h'^*(x, y), 0\} -$$
$$\Sigma_{y\in V} \max\{h'^*(y, x), 0\} = \Sigma_{y\in V} (h'(x, y) - h'(y, x)) = \mathrm{div}_{h'}(x) =$$
$$= \mathrm{div}_{g_{\overrightarrow{s_1 t_1}}}(x) + \mathrm{div}_{g_{\overrightarrow{s_2 t_1}}}(x) + 1/2\, \mathrm{div}_{f_{\overrightarrow{s_1 s_2}}}(x),$$

откуда следует, что

$$\mathrm{div}_{f'}(s_1) = d_1, \quad \mathrm{div}_{f'}(t_1) = -d_1, \quad \mathrm{div}_{f'}(x) = 0, \quad \forall x \in V \setminus \{s_1, t_1\}.$$

Аналогично показывается, что f' — поток с источником t_2 и стоком s_2 мощности d_2. Осталось доказать, что мультипоток $\{f', f''\}$ допустим в сети G, т. е. что пропускные способности ребер сети G не превышены. Очевидно $\min\{f'(x, y), f'(y, x)\} - 0$, $\forall (x, y)$, поэтому достаточно рассмотреть два случая:

1) $f'(x, y)+f'(y, x)+f''(x, y)+f''(y, x)=f'(x, y)+0+$
$+f''(x, y)+0=h'(x, y)-h'(y, x)+h''(x, y)-h''(y, x)=F(x, y)-$
$-F(y, x)+f_{\overrightarrow{s_1s_2}}(x, y)-f_{\overrightarrow{s_1s_2}}(y, x)\leqslant F(x, y)-F(y, x)+$
$+(c[x, y]-F(x, y)+F(y, x))-f_{\overrightarrow{s_1s_2}}(y, x)\leqslant c[x, y]$;

2) $f'(x, y)+f'(y, x)+f''(x, y)+f''(y, x)=f'(x, y)+0+0+$
$+f''(y, x)=h'(x, y)-h'(y, x)+h''(y, x)-h''(x, y)\leqslant F(x, y)+$
$+F(y, x)\leqslant c[x, y]$.

Таким образом $\{f_1, f_2\}$ — допустимый мультипоток в (G, c), удовлетворяющий требованиям $\{d_1, d_2\}$. В рассмотренном алгоритме строятся два потока — максимальный поток $f_{\overrightarrow{st}}$ и поток заданной мощности $f_{\overrightarrow{s_1s_2}}$, кроме того, для построения потоков g_u, $u \in U$ используется процедура разложения потока $f_{\overrightarrow{st}}$ (имеющая заведомо не бóльшую, а на сегодняшний день — меньшую трудоемкость, чем трудоемкость построения максимального потока); остальные процедуры имеют трудоемкость не выше $O(|E|)$.

2. Быстрый алгоритм решения свободной задачи на max-Σ

Для класса свободных задач на max-Σ $\langle K_p, \Sigma\rangle$, $p=3, 4, \ldots, \infty$, известен алгоритм Б. В. Черкасского [23], решающий каждую задачу $\langle K_p|c\rangle$ со степенной от $|V|$ и $|P|=p$ оценкой трудоемкости при произвольной функции $c\geqslant 0$. Предлагаемый нами алгоритм имеет существенно меньшую трудоемкость — $O(\eta_{n,m}\cdot \log_2 p)$, где $\eta_{n,m}$ — трудоемкость построения максимального потока в сети с числом вершин n и числом ребер m.

Задача с тремя полюсами. Покажем сначала, как решать задачу с тремя полюсами $\langle K_3, \Sigma\rangle$. Пусть $\{s_1, s_2, s_3\}$ — множество полюсов в (G, c) и $f_{\overrightarrow{s_1s_2}}$, $f_{\overrightarrow{s_2s_3}}$, $f_{\overrightarrow{s_1s_3}}$ (рис. 3) — уже имеющиеся потоки, которые

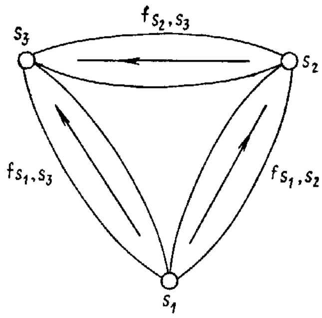

Рис. 3

образуют мультипоток $F=\{f_u;\ u\in U=\{(s_1, s_2), (s_1, s_3), (s_2, s_3)\}\}$. Построим сеть (G_F, c_F), где граф $G_F=(V, A_F)$ получается из G заменой каждого ребра $[x, y]$ парой дуг (x, y) и (y, x); пропускную способность дуг $c_F(x, y)$ определим согласно (4). В сети (G_F, c_F) построим максимальный поток $g_{\overrightarrow{s_1s_2}}$ и определим следующие функции:

$$f':f'(x, y)=\max\left\{f^*_{\overrightarrow{s_1s_3}}(x, y)+f^*_{\overrightarrow{s_2s_3}}(x, y)+1/2g^*_{\overrightarrow{s_1s_2}}(x, y),\ 0\right\};$$

$$f'':f''(x, y)=\max\left\{f^*_{\overrightarrow{s_1s_2}}(x, y)+1/2g^*_{s_1s_2}(x, y),\ 0\right\},$$

где $h^*(x, y)=h(x, y)-h(y, x)$. Тем же способом, что и для задачи о двух потоках, показывается, что:

а) f' — многополюсный поток в (G, c) с полюсами s_1, s_2, s_3, для которого

$$\begin{gathered}\operatorname{div}_{f'}(s_1)=\|f_{\overrightarrow{s_1s_3}}\|+1/2\|g_{\overrightarrow{s_1s_2}}\|,\quad \operatorname{div}_{f'}(s_2)=\|f_{\overrightarrow{s_2s_3}}\|-1/2\|g_{\overrightarrow{s_1s_2}}\|,\\ \operatorname{div}_{f'}(s_3)=-\|f_{\overrightarrow{s_1s_3}}\|-\|f_{\overrightarrow{s_2s_3}}\|,\ \operatorname{div}_{f'}(x)=0,\ \forall x\in V\setminus\{s_1, s_2, s_3\};\end{gathered}\tag{5}$$

б) f'' — поток с источником s_1 и стоком s_2, для которого

$$\begin{gathered}\operatorname{div}_{f''}(s_1)=\|f_{\overrightarrow{s_1s_2}}\|+1/2\|g_{\overrightarrow{s_1s_2}}\|,\ \operatorname{div}_{f''}(s_2)=-\|f_{\overrightarrow{s_1s_2}}\|-1/2\|g_{\overrightarrow{s_1s_2}}\|,\\ \operatorname{div}_{f''}(x)=0,\quad \forall x\in V\setminus\{s_1, s_2\};\end{gathered}\tag{6}$$

в) мультипоток $F'=\{f', f''\}$ допустим в сети G.

Разложим функцию f' на два подпотока: в случае $\operatorname{div}_{f'}(s_2)\geqslant 0$ — на подпотоки $f'_{\overrightarrow{s_1s_3}}$ и $f'_{\overrightarrow{s_2s_3}}$ $\left(\|f'_{\overrightarrow{s_1s_3}}\|+\|f'_{\overrightarrow{s_2s_3}}\|=\|f'\|\right)$, а в случае $\operatorname{div}_{f'}(s_2)<0$ — на подтоки $f'_{\overrightarrow{s_1s_3}}$ и $f'_{\overrightarrow{s_1s_2}}$ $\left(\|f'_{\overrightarrow{s_1s_2}}\|+\|f'_{\overrightarrow{s_1s_3}}\|=\|f'\|\right)$. В первом случае мы получаем мультипоток $F'=\left\{f'_{\overrightarrow{s_1s_3}}, f'_{\overrightarrow{s_2s_3}}, f''\equiv f'_{\overrightarrow{s_1s_2}}\right\}$, во втором — мультипоток $F'=\left\{f'_{\overrightarrow{s_1s_3}}, f_{\overrightarrow{s_1s_2}}:=f'_{\overrightarrow{s_1s_2}}+f'', f'_{\overrightarrow{s_2s_3}}\equiv 0\right\}$. Из (5) и (6) следует, что

$$\|f'_{\overrightarrow{s_1s_3}}\|+\|f'_{\overrightarrow{s_2s_3}}\|=\|f_{\overrightarrow{s_1s_3}}\|+\|f_{\overrightarrow{s_2s_3}}\|;\tag{7}$$

$$\|f'_{\overrightarrow{s_1s_2}}\|+\|f'_{\overrightarrow{s_2s_3}}\|=\|f_{\overrightarrow{s_1s_3}}\|+\|f_{\overrightarrow{s_2s_3}}\|;\tag{8}$$

$$\|f'_{\overrightarrow{s_1s_2}}\|+\|f'_{\overrightarrow{s_1s_3}}\|=\|f_{\overrightarrow{s_1s_2}}\|+\|f_{\overrightarrow{s_1s_3}}\|+\|g_{\overrightarrow{s_1s_2}}\|=c[X, Y]\tag{9}$$

(здесь $[X, Y]$, $s_1\in X$, $s_2\in Y$ — разрез на множестве V, являющийся минимальным разрезом в сети (G_F, c_F), т. е. $c_F(X, Y)=\|g_{\overrightarrow{s_1s_2}}\|$). Таким образом, мощность нового мультипотока (F') больше мощности старого (F) на $1/2\cdot\|g_{\overrightarrow{s_1s_2}}\|$. Кроме того, мультипоток F' насыщает разрез R и согласован с ним (этот разрез отделяет либо s_1 от s_2, s_3, либо s_1, s_3 от s_2). Из соотношений (7)—(9) следует также, что если в сети G существовал насыщенный разрез R', согласованный с мультипотоком F, то этот разрез R' будет насыщен и согласован и с мультипотоком F'.

Из сказанного следует, что задача $\langle K_3|c\rangle$, независимо от того, имеется или нет в сети (G, c) начальный мультипоток, решается не более чем в три приема: сначала во вспомогательной сети строится поток с источником s_1 и стоком s_2, находится разрез R_1, насыщенный и согласованный с результирующим мультипотоком (пусть для определенности R_1 отделяет s_1 от s_2 и s_3), затем строится поток из s_2 в s_3, определяющий разрез R_2 (можно показать, что разрез R_2 непременно отделит s_2 от s_1 и s_3) и далее строится поток из s_3 (например, в s_1), определяющий разрез R_3, отделяющий s_3 от s_1 и s_2. Мультипоток, полученный на последнем этапе, является решением задачи $\langle K_3|c\rangle$, поскольку $\{R_1, R_2, R_3\}$ — совокупность насыщенных однополюсных разрезов, согласованных с F, т. е. мы находимся в условиях теоремы Купернтоха-Черкасского (см. [11, 23]). Заметим, что для целочисленных сетей полученное решение полуцелочисленно: это следует из того, что сеть G_F оказывается каждый раз целочисленной.

Общий случай. Пусть число полюсов p в задаче $\langle K_p|c\rangle$ более трех. Сведем рассматриваемую задачу к двум задачам меньшего размера, а именно, — разобьем множество полюсов P на две части P_1 и P_2, так что $|P_1|$ отличается от $|P_2|$ не более чем на единицу. В сети G построим максимальный многополюсный поток из множества источников P_1 в множество стоков P_2, и пусть $R=[X, Y]$ — минимальный разрез ($P_1 \subseteq X$, $P_2 \subseteq Y$). Разрежем граф G на два графа $G'=(V', E')$ и $G''=(V'', E'')$. Для этого разрежем каждое ребро, соединяющее X с Y, на две части и концы, относящиеся к X, склеим в вершину s', а концы, относящиеся к Y, — в вершину s'' (рис. 4). Множеством

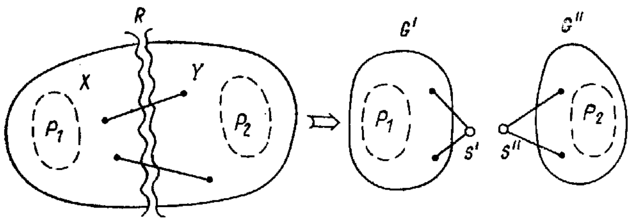

Рис. 4

полюсов сети (G, c) будем считать $P'=P_1 \cup \{s'\}$, а в сети (G'', c) — множество $P''=P_2 \cup \{s''\}$. Заметим, что $R'=[\{s'\}, V' \setminus \{s'\}]$ — минимальный разрез сети (G', c), разделяющий полюса s' и P_1; аналогично для $R''=[\{s''\}, V'' \setminus \{s''\}]$.

Пусть мы решили задачи для (G', c) и (G'', c). Покажем, как по соответствующим решениям F' и F'' построить искомый мультипоток F. Из отмеченного выше следует, что разрезы $R'=[\{s'\}, V' \setminus \{s'\}]$ и $R''=[\{s''\}, V'' \setminus \{s''\}]$ насыщены и согласованы с мультипотоками F' и F'', соответственно. Разрезам R' и R'' отвечает один и тот же разрез R сети G. Пусть $\{f'_{s's_i};\ s_i \in P_1\}$ и $\{f''_{s''s_j};\ s_j \in P_2\}$ — потоки в F' и F''. Образуем многополюсные потоки $f'_{s'P_1}=\Sigma_{s_i \in P_1} f'_{s's_i}$ и $f''_{s''P_2}=\Sigma_{s_j \in P_2} f''_{s''s_j}$ «Склеим» потоки $f'_{s'P_1}$ и $f''_{s''P_2}$ по разрезу R, полученный поток сети G обозначим $f_{P_1P_2}$. Применив к потоку $f_{P_1P_2}$ процедуру потокового разложения, образуем совокупность потоков $\{f_{st};\ s \in P_1,\ t \in P_2\}$. Эти потоки в объединении с потоками $\{f'_{s_is_j};\ [s_i, s_j] \in [P_1]^d\}$ и $\{f'_{s_is_j};\ [s_i, s_j] \in [P_2]^d\}$ и образуют искомый мультипоток F.

Оценка числа действий алгоритма. Докажем, что описанный алгоритм имеет верхнюю оценку числа действий $C \cdot \eta_{n,m} \log_2 P$, где $\eta_{n,m}$ — оценка числа действий алгоритма нахождения максимального потока в сети с n вершинами и m ребрами, относительно которой будем предполагать, что:

а) $\eta_{n',m}+\eta_{n'',m} \leqslant \eta_{n'+n'',m}$; б) $\eta_{n+\mathrm{const},m} < \eta_{n,m}+O(\eta_{n,m}/\log_2 n)$*.

* Имеющиеся оценки известных эффективных алгоритмов нахождения максимального потока удовлетворяют этим свойствам $O(n^2m)$ — для алгоритма [3], $O(n^3)$ — для алгоритма [7], $O(n^2\sqrt{m})$ — для алгоритма [24].

Мы свели задачу в сети (G, c), имеющей $p>3$ полюсов, n вершин и m ребер к двум задачам с параметрами p', n', m' и p'', n'', m'', для которых имеют место следующие соотношения: 1) p', $p'' \leqslant \left[\frac{p}{2}\right]+1$ (где $[a]$ — ближайшее к a целое снизу); 2) $n'+n''=n+2$; 3) m', $m'' \leqslant m$. Кроме того, мы потратили $\eta_{n,m}$ действий на построение максимального потока сети (G, c), $C' \cdot nm$ действий на построение мультипотока F из мультипотоков F' и F'' (оценка для процедуры потокового разложения, имеющей наибольшую трудоемкость); оценим эти дополнительные действия как $C''\eta_{n,m}$. Имеем: оценка числа действий $= C\eta_{n',m'}\log_2 p' + C\eta_{n'',m''}\log_2 p'' + C''\eta_{n,m} \leqslant C \cdot \eta_{n+2,m}\log_2\left(\left[\frac{p}{2}\right]+1\right) + C''\eta_{n,m} \leqslant C\eta_{n,m} \times \log\frac{p}{2} + C'''\eta_{n,m} = C\eta_{n,m}\left(\log\frac{p}{2} + \frac{C'''}{C}\right)$.

Если константа C выбрана таким образом, чтобы выполнялось $C'''/C < \log_2 2 = 1$, а также чтобы трудоемкость решения задачи $\langle K_3, \Sigma \rangle$ была не выше $C\eta_{\tilde{n},\tilde{m}} \cdot \log_2 3$ (где $\tilde{n}$ $(\tilde{m})$ — число вершин (ребер) в $\tilde{G}$), то мы получаем требуемое соотношение

$$C\eta_{n,m}\log_2 p \geqslant C\eta_{n',m'}\log_2 p' + C\eta_{n'',m''}\log_2 p'' + C''\eta_{n,m}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Адельсон-Вельский Г. М., Диниц Е. А., Карзанов А. В.* Потоковые алгоритмы. М., «Наука», 1975,
2. *Гришухин В. П.* Многогранники, связанные со структурами, и минимаксные комбинаторные задачи.— В сб.: Графы, гиперграфы и дискретные оптимизационные задачи. Киев, «Знание», 1977, с. 14—16.
3. *Диниц Е. А.* Алгоритм решения задачи о максимальном потоке в сети со степенной оценкой. — Доклады АН СССР, 1970, т. 194, № 4.
4. *Диниц Е. А., Зайцев М. А., Карзанов А. В.* Алгоритм выделения блоков в графе. — Журнал вычислительной математики и математической физики, 1974, т. 14, № 6, с. 1309—1316.
5. *Диниц Е. А., Карзанов А. В., Ломоносов М. В.* О структуре системы минимальных реберных разрезов графа. — В сб.: Исследования по дискретной оптимизации. М., «Наука», 1976, с. 290—306.
6. *Карзанов А. В.* Экономный алгоритм нахождения бикомпонент графа. — В сб.: Труды 3-ей Зимней школы по математическому программированию и смежным вопросам в г. Дрогобыч. М., 1970.
7. *Карзанов А. В.* Нахождение максимального потока в сети методом предпотоков. — Доклады АН СССР, 1974, т. 215, № 1, с. 49—53.
8. *Карзанов А. В.* Экономные реализации алгоритмов Эдмондса нахождения паросочетания максимальной мощности и максимального веса. — В сб.: Исследования по дискретной оптимизации. М., «Наука», 1976, с. 306—327.
9. *Карзанов А. В.* Справочная для выборки максимального элемента и ее приложения. — В сб.: Исследования по дискретной оптимизации. М., «Наука», 1976, с. 348—359.
10. *Карзанов А. В., Ломоносов М. В.* Системы потоков в неориентированных сетях. — В сб.: Математическое программирование. Проблемы социальных и экономических систем. Модели исследования операций. Вып. 1. М., ВНИИСИ, 1978, с. 59—66.
11. *Куперштох В. Л.* Об одном обобщении теоремы Форда и Фалкерсона на многополюсные сети. — Киев, «Кибернетика», 1971, № 3.
12. *Ломоносов М. В.* О системе потоков в сети. — Проблемы передачи информации, 1978, т. 13, № 4.
13. *Ломоносов М. В.* Решение двух задач о потоках в сети. — Проблемы передачи информации. 1979, т. 14, № 1.
14. *Оре О.* Теория графов. М., «Наука», 1968.
15. *Папернов Б. А.* Эквивалентные потоковые многополюсники. — В сб.: Вопросы кибернетики. Вып. 3. М., 1973.
16. *Папернов Б. А.* Реализуемость многопродуктовых потоков. — В сб.: Исследования по дискретной оптимизации. М., «Наука», 1976.
17. *Фараджев И. А.* Эффективные алгоритмы решения некоторых задач для ориентированных графов. — Журнал вычислительной математики и математической физики, 1970, т. 10, № 4, с. 1049—1054.
18. *Форд Л. Р., Фалкерсон Д. Р.* Потоки в сетях. М., «Мир», 1966.
19. *Харари Ф.* Теория графов. М., «Мир», 1973.
20. *Ху Т. Ч.* Целочисленное программирование и потоки в сетях. М., «Мир», 1974.
21. *Черкасский Б. В.* Конечный алгоритм решения задачи о двухпродуктовом потоке. — «Экономика и математические методы», 1973, т. 9, № 6, с. 1147—1149.
22. *Черкасский Б. В.* Многополюсные двухпродуктовые задачи. — В сб.: Исследования по дискретной оптимизации. М., «Наука», 1976, с. 261—289.
23. *Черкасский Б. В.* Решение одной задачи о многопродуктовых потоках в сети. — «Экономика и математические методы», 1977, т. 13, № 1.
24. *Черкасский Б. В.* Алгоритм построения максимального потока в сети с трудоемкостью $O(n^2\sqrt{p})$ действий. — В сб.: Математические методы в экономических исследованиях. Вып. 7. М., «Наука»,1977, с. 117—126.

25. *Эрроу К. Дж., Гурвиц Л., Удзава X.* Исследования по линейному и нелинейному программированию. М., ИЛ, 1962.
26. *Balinsky M. L.* Establishing the matching polytope. J. Comb. Theory, Ser. B, 1972, v. 13B, № 1, pp. 1—13.
27. *Cook S. A.* The Complexity of Theorem—Proving Procedures. Conf. Ref. 3-rd Annual ACM Sympos. Theory Comp., N. Y., 1971, pp. 151—158.
28. *Cunnigham W. H., Marsh A. B.* A primal algorithm for optimum matching. In: Mathematical Programming Study, v. 8, 1978, pp. 50—72.
29. *Dijkstra E. W.* A Note on Two Problems in Connection with Graphs. Numerical Mathematik, 1959, v. 1, pp. 269—271.
30. *Edmonds J.* Maximum matcing and polyhedron with 0,1-vertices. J. of Research, 1965, v. 698, № 1, 2.
31. *Edmonds J.* Edge-disjoint branchings. In: Combinatorial Algorithms, R. Rustin (ed.), Algorithmics Press, N. Y., 1972, pp. 91—96.
32. *Edmonds J.* Paths, trees and flowers. Can. J. Math., 1965, v. 17, № 3.
33. *Edmonds J., Karp R. M.* Theoretical Improvements in Algorithmic Efficiency for Network Flow Problems. J. ACM, v. 19, № 2, pp. 248—264.
34. *Even S. V., Itai A., Shamir A.* On the complexity of timetable and multicommodity flow problem. SIAM J. Comput., 1976 (Dec.), v. 5, № 4.
35. *Fulkerson D. R., Harding G. C.* On edge-disjoint branchings. Networks, 1976, v. 6, pp. 97—104.
36. *Iri M.* On an Extension of the Maximum-flow Minimum-cut Theorem to Multi-commodity Flows. J. Operat. Res. Soc. Japan., 1970/71, v. 13, pp. 129—135.
37. *Karp R. M.* Redusibility among Combinatorial Problems. Proc. Sympos. on Complexity of Computer Computations, N. Y., Plenum Press, 1972.
38. *Lovász L.* On two minimax theorems in graph. J. Comb. Theory, Ser. B, 1976, v. 21, pp. 96—103.
39. *Lucchessi C., Younger D. H.* A minimax theorem for directed graphs. Proc. London Math. Soc., 1978, v. 17, Ser. 2, pp. 269—375.
40. *Onaga K., Kakusho O.* On Feasibility Conditions of Multicommodity Flows in Networks. IEEE Trans. on Circuit Theory, 1971, CT-18, № 4, pp. 425—429.
41. *Perl Y., Shiloach Y.* Finding Two Disjoint Paths Between Two Pairs of Vertices in a Graph. J. of the Assoc. for Comput. Mach., 1978, v. 25, № 1, pp. 1—9.
42. *Pulleyblank N., Edmonds J.* Facets of 1-matching polyhedra. In: Hypergraph seminar. Lecture Notes in Math., № 411, pp. 111—126, Springer, Berl.-N. Y., 1974.
43. *Seymour P. D.* The Matroids with the Max-Flow Min-Cut Property. J. of Comb. Theory, Ser. B, 1977, v. 23, pp. 189—222.
44. *Tarjan R. E.* Depth-First Search and Linear Graph Algoritms. SIAM J. Comput., 1972, v. 1, pp. 146—160.
45. *Tarjan R. E.* Finding edge-disjoint spanning trees. Proc. 8th. Haw. Int. Conf. Syst. Sci, Honolulu, Haw., 1975.
46. *Tarjan R. E.* A good algorithm for edge-disjoint branchings. Inform. Process. Letters, 1974. v. 3, № 2, pp. 51—53.