Е. А. Диниц, А. В. Карзанов, М. В. Ломоносов

О СТРУКТУРЕ СИСТЕМЫ МИНИМАЛЬНЫХ РЕБЕРНЫХ РАЗРЕЗОВ ГРАФА

1. Рассматривается класс неориентированных связных взвешенных графов. Граф G из этого класса имеет множество вершин $V = V(G)$, множество ребер $U = U(G)$, и каждому ребру $u \in U$ приписан вес $c(u)$ — положительное действительное число.

Разрезом $R = (V_1, V_2)$ называется разбиение множества вершин графа на два подмножества — V_1 и $V_2 : V_1 \cup V_2 = V$, $V_1 \cap V_2 = \phi$. Ребро $u \in U$, один конец которого лежит в V_1, а другой — в V_2, называется ребром разреза R. Множество этих ребер обозначается $U(R)$. *Мощностью* разреза R называется величина $c(R) = \sum_{u \in U(R)} c(u)$. Условимся считать, что если V_1 или V_2 пусто, то $c(V_1, V_2) = \infty$. Разрез минимальной мощности $c = c(G)$ называется минимальным или *m-разрезом*, множество всех m-разрезов обозначается $\mathbf{M}(G)$.

Для произвольного графа G определяется структурный граф $\Gamma = \Gamma(G)$, несущий информацию о наличии и взаимном расположении всех минимальных разрезов в G.

Каков бы ни был граф G, его структурный граф обладает свойством I: любые два его простых цикла имеют не более одной общей вершины. Свойству I эквивалентно свойство II: любое ребро принадлежит не более чем одному простому циклу (рис. 1б). Такие графы обобщают деревья и так называемые «кактусы». Мы будем называть граф, удовлетворяющий условию I (или, эквивалентно, II), *растением*.

Назовем разрез *правильным*, если при выбрасывании его ребер граф распадается ровно на две компоненты связности. Легко показать, что минимальный разрез всегда

является правильным. Множество правильных разрезов графа G будем обозначать $\mathbf{P}(G)$. Нетрудно доказать, что множество правильных разрезов растения состоит из: а) однореберных разрезов, определяемых каким-либо нециклическим ребром (не принадлежащим никакому циклу); б) двуреберных, определяемых какими-либо двумя циклическими ребрами, принадлежащими одному и тому же циклу.

Веса ребер структурного графа Γ распределены следующим образом:

1) если ребро $u \in U(\Gamma)$ нециклическое, то $c(u) = c$;

2) если ребро $u \in U(\Gamma)$ циклическое, то $c(u) = c/2$.

Растение с такими весами ребер будем называть c-растением.

Из приведенного выше следует, что для структурного графа Γ : а) $c(\Gamma) = c(G) = c$; б) каждый правильный разрез в Γ — минимальный и обратно, т. е. $\mathbf{P}(\Gamma) = \mathbf{M}(\Gamma)$.

Пусть $G' = [V', U']$ и $G = [V, U]$ — два графа и $\rho = V' \to V$ — некоторое отображение. Каждому разрезу $R = (V_1, V_2)$ графа G поставим в соответствие разрез $\rho^*(R) = (\rho^{-1}(V_1), \rho^{-1}(V_2))$ графа G'.

Основной результат. Для любого графа G существует структурный граф: c-растение Γ вместе с отображением $\varphi : V(G) \to V(\Gamma)$, таким, что:

а) $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$ в том, и только в том случае, если вершины v_1 и v_2 не разделяются ни одним m-разрезом;

б) отображение φ^* переводит множество правильных (т. е. минимальных) разрезов графа Γ в множество минимальных разрезов графа G, причем на все это множество (рис. 1).

Фактически отображение φ^* устанавливает почти взаимно-однозначное соответствие между $\mathbf{M}(G)$ и $\mathbf{P}(\Gamma)$. В то же время строение структурного графа и его связь с исходным графом весьма просты. Это делает граф Γ хорошей моделью для изучения минимальных разрезов графа G. Следует отметить, что существует алгоритм построения

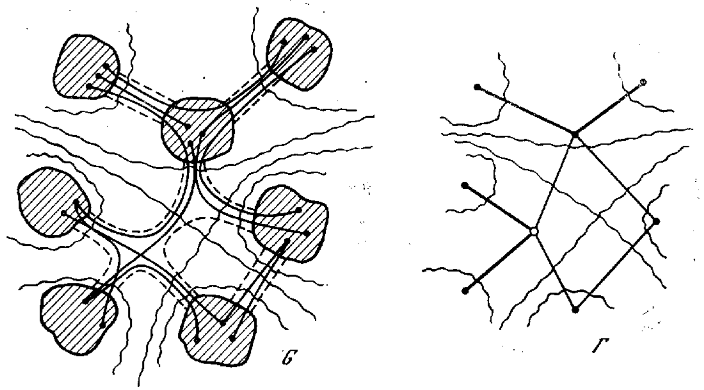


Рис. 1

структурного графа, трудоемкость которого (в машинных действиях) имеет порядок np, где n — число вершин, а p — число дуг исходного графа (в настоящей работе алгоритм не рассматривается).

Из основного результата, как будет показано, вытекает:

Теорема о расположении на окружности. Вершины любого графа G можно так расположить на окружности, что любой минимальный разрез R определяется рассечением окружности на две дуги.

О количестве минимальных разрезов (следствие из теоремы). Число минимальных разрезов графа не превосходит $n(n-1)/2$, где n — число его вершин. Эта оценка точна: достигается на цикле с n вершинами и ребрами равного веса [1]. ■

2. Пусть $R = (V_1, V_2)$ и $R' = (V_1', V_2')$ — два различных разреза некоторого графа. Возможны два случая их взаимного расположения: 1) все множества $V_1 \cap V_1'$, $V_1 \cap V_2'$, $V_2 \cap V_1'$, $V_2 \cap V_2'$ — непусты; 2) одно из указанных множеств пусто.

[1] Используя теорему и ее доказательство, данное ниже, можно показать, что оценка достигается только на таких графах, при склеивании кратных ребер которых получается цикл с ребрами равного веса.

В первом случае разрезы R и R' называются *трансверсальными* (рис. 2а), во втором — *параллельными* (рис. 2б).

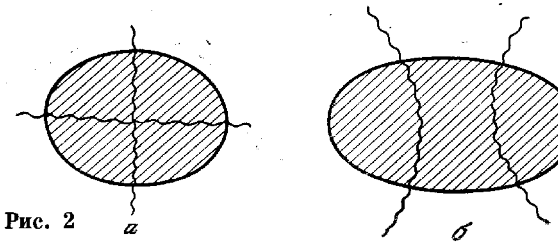


Рис. 2

m-разрез графа G назовем p-разрезом, если любой другой m-разрез ему параллелен; в противном случае он называется t-разрезом. Множество p-разрезов графа G обозначим $\mathbf{M}_p(G)$, t-разрезов — $\mathbf{M}_t(G)$.

В этом пункте будет исследовано взаимное расположение p-разрезов графа.

Утверждение о структуре системы p-разрезов. Для любого графа G существует структурное дерево Δ (с ребрами веса c) вместе с отображением $\psi : V(G) \to V(\Delta)$, таким, что:

а) $\psi(v_1) = \psi(v_2)$ в том, и только в том случае, если v_1 и v_2 не разделяются ни одним p-разрезом;

б) отображение ψ^* задает взаимно-однозначное соответствие между множеством правильных (т. е. минимальных) разрезов дерева Δ и множеством p-разрезов графа G[2].

Пусть $R = (V_1, V_2)$ и $R' = (V_1', V_2')$ — p-разрезы и пусть $V_1 \cap V_2' = \phi$. Скажем, что разрез $R'' = (V_1'', V_2'')$ лежит между R и R' (разделяет R и R'), если $V_1 \subset V_1''$,

[2] Читатель может убедиться из сказанного ниже в том, что фактически здесь не существенно, что $V(G)$ — множество вершин графа, существенно лишь, что задано множество V и конечная система P взаимно параллельных его разбиений.

$V_2' \subset V_2''$ (либо $V_1 \subset V_2''$, $V_2' \subset V_1''$). Вершина $v \in V$ называется лежащей между R и R', если $v \in V_1' \cap V_2$.

Для множества $X \subset V$ положим $\overline{X} = V \setminus X$. Рассмотрим произвольный p-разрез $R = (X, \overline{X})$ и всевозможные p-разрезы, разделяющие X (они, по определению p-разреза, не разделяют $\overline{X}$). p-разрез R' из этого множества назовем *соседним* с R, если не существует p-разреза, лежащего между R и R'. Обозначим $S(X)$ множество всех соседних с $R = (X, \overline{X})$ разрезов, разделяющих X. Пусть $R' = (X', \overline{X}') \in S(X)$ и R разделяет X'. Тогда,

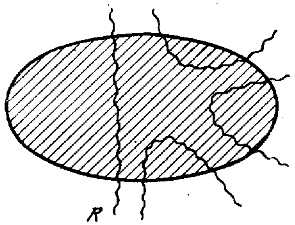


Рис. 3

как легко проверить, любой p-разрез $R'' \in S(X) \cup R$, $R'' \neq R'$ — соседний для R'. Следовательно, $S(X') \cup R' = S(X) \cup R$. Таким образом, совокупность попарно соседних разрезов (для каждого разреза берутся соседние только с одной стороны) определяется канонически. Назовем ее p-связкой (рис. 3).

Будем считать, что вершина $v \in V$ лежит в p-связке $S = S(v)$, если она лежит между любыми двумя разрезами из S. Множество таких вершин обозначим $V(S)$. Возможно, что таких вершин для S не существует, т. е. $V(S) = \phi$, в этом случае p-связка называется пустой. Можно доказать, что каждая вершина $v \in V$ лежит в некоторой p-связке, причем ровно в одной.

Две различные p-связки S' и S'' назовем соседними, если существует p-разрез, общий для S' и S''. Такой разрез всегда единственный; будем обозначать его $R_*(S', S'')$. Каждый p-разрез R разделяет две соседние связки S' и S'', лежащие по разные его стороны, т. е. имеет вид $R(S', S'')$.

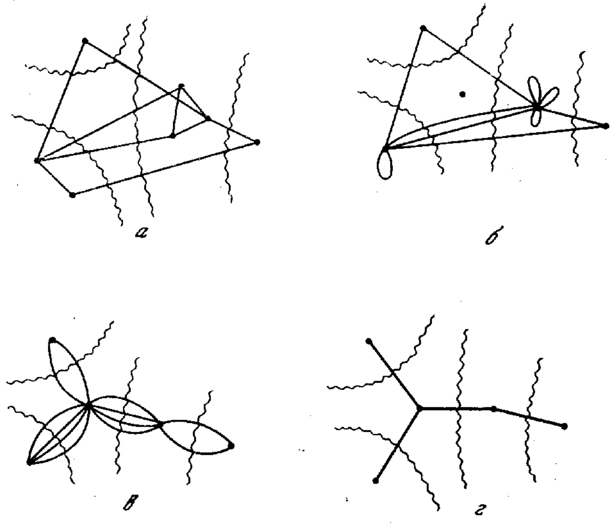


Рис. 4

Пусть $[v_1, v_2]$ — ребро графа G. Множество p-разрезов, которым принадлежит это ребро, можно представить в виде последовательности $R_1, R_2, \ldots, R_k$, где $R_i = (X_i, \overline{X}_i)$, $v_1 \in X_i$ и $X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_k$. Кроме того, как легко показать, разрезы, стоящие рядом в последовательности, соседние в графе, т. е. принадлежат одной связке: $\forall i \in [2, k]$ $R_{i-1}, R_i \in S(X_i) \cup R_i = S_i(v_1, v_2)$. Обозначим также $S(v_1)$ через $S_1(v_1, v_2)$ и $S(v_2)$ через $S_{k+1}(v_1, v_2)$.

Чтобы получить структурный граф Δ системы p-разрезов графа G, преобразуем граф G следующим образом.

1) Для каждой p-связки S склеим все вершины, лежащие в ней, в одну вершину x_S; если S — пустая связка, то добавим фиктивную вершину x_S (рис. 4а, б).

2) Образ каждого ребра $[v_1, v_2] \in U$ — ребро $[x_{S(v_1)}, x_{S(v_2)}]$ того же веса — либо удалим (если оно петля), либо заменим на цепочку ребер $[x_{S_i(v_1, v_2)}, x_{S_{i+1}(v_1, v_2)}]$, $i \in [1, k]$ (в противном случае) (см. рис. 4б, в).

3) Склеим каждую совокупность кратных ребер в одно ребро суммарного веса (рис. 4 в, г).

Утверждение. а) Построенный граф Δ является деревом, все ребра которого имеют вес $c(\Delta) = c = c(G)$. б) Вершины (x_S) дерева Δ взаимно-однозначно соответствуют p-связкам (S) графа G, а ребра $([x_S, x_{S'}])$ — парам соседних p-связок (S и S'), т. е. p-разрезам $(R(S, S'))$. ■

В дереве Δ каждый правильный разрез — однореберный, и обратно: каждое ребро определяет правильный разрез. Вес каждого из этих разрезов равен $c(G)$. Отсюда $\mathbf{P}(\Delta) = \mathbf{M}(\Delta) = \mathbf{M}_p(\Delta)$.

Имеется естественное отображение $\psi : V(G) \to V(\Delta)$, при котором вершина $v \in V(G)$, лежащая в связке S, отображается в вершину $x_S \in V(\Delta)$. Отображение ψ^* переводит однореберный разрез, определяемый ребром $[x_{S'}, x_{S''}]$, в разрез $R(S', S'')$. Взаимная однозначность ψ^* легко проверяется.

Таким образом, утверждение о структуре системы p-разрезов графа G доказано.

3. Включим теперь в рассмотрение t-разрезы графа G. Пусть R — t-разрез. Любой из p-разрезов по определению параллелен R. Рассмотрим систему взаимно параллельных разрезов $\mathrm{M}_p \bigcup R$. Выделим в ней все разрезы, соседние с R (с обеих сторон). Можно проверить, что эти p-разрезы образуют p-связку (S). Очевидно, R не разделяет p-разрезы связок, отличных от S. Скажем, что разрез R — *внутренний* для S.

Основную роль в исследовании t-разрезов играет следующая лемма. Пусть R' и R'' — два трансверсальных t-разреза некоторого графа и A_1, A_2, A_3, A_4 — (непустые) подмножества, на которые разбивается множество вершин графа этими разрезами; для определенности $R' = (A_1 \bigcup A_2, \quad A_3 \bigcup A_4)$, $\quad R'' = (A_1 \bigcup A_4, \quad A_2 \bigcup A_3)$ (рис. 5а). Обозначим $c(A_i, A_j)$ сумму весов ребер, соединяющих вершины из A_i с вершинами из A_j. Далее пусть R_X обозначает разрез $(X, \overline{X})$.

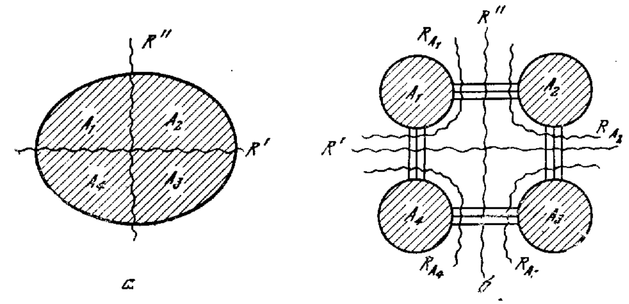


Рис. 5

Лемма о четырехугольнике. а) $c(A_1, A_3) = c(A_2, A_4) = 0$; $c(A_1, A_2) = c(A_2, A_3) = c(A_3, A_4) = c(A_4, A_1) = c/2$; б) «угловые» разрезы R_{A_i} минимальны (рис. 5б).

Доказательство.

$$c(R_{A_i}) \geqslant c \Rightarrow 2c \leqslant {}^1/_2 \Sigma c(R_{A_i}) = \sum_{ij} c(A_i, A_j);$$

$$2c = c(R') + c(R'') = \sum_{i,j} c(A_i, A_j) + c(A_1, A_3) + c(A_2, A_4).$$

Вычитая, имеем $c(A_1, A_3) + c(A_2, A_4) \leqslant 0$. Отсюда в силу $c(A_i, A_j) \leqslant 0$ имеем следующее. Во-первых, $c(A_1, A_3) = c(A_2, A_4) = 0$. Во-вторых, ${}^1/_2 \Sigma c(R_{A_i}) = 2c$, откуда $\forall i \; c(R_{A_i}) = c$, т. е. разрезы R_{A_i} минимальны.

Пусть $c(A_1, A_2) = d$. Тогда в силу доказанного $c(A_4, A_1) = c(A_2, A_3) = c - d$. Аналогично $c(A_3, A_4) = d$. Имеем $2d = c(R'') = c$, откуда $d = d - c = c/2$. ■

Из леммы вытекает:

Теорема о пересечении минимальных разрезов. Если $R' = (X, \overline{X})$ и $R''(Y, \overline{Y})$ — минимальные разрезы графа и $X \bigcap Y \neq \phi$, то $R = (X \bigcup Y, \overline{X} \bigcup \overline{Y})$ — также минимальный разрез [3].

[3] Ниже фактически доказывается, что для множества V и системы его разбиений, для которой верна теорема о пересечении, структурный граф представляет собой растение.

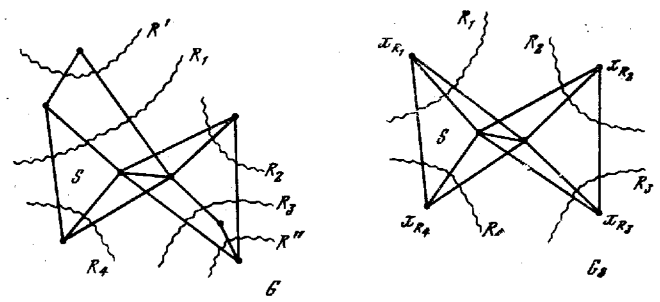


Рис. 6

Назовем L-классом относительно некоторой совокупности разрезов L максимальное по включению множество вершин, не разделяемое никаким разрезом из совокупности L (легко видеть, что классы попарно не пересекаются и вместе составляют все множество вершин).

Утверждение. Множество M_p-классов совпадает с множеством **М**-классов.

Доказательство. Достаточно показать, что если вершины v_1 и v_2 разделяются каким-либо m-разрезом, то они разделяются и некоторым p-разрезом. Возьмем минимальное по включению множество вершин X, такое, что $v_1 \in X$, $v_2 \in \overline{X}$ и $(X, \overline{X})$ — m-разрез. Покажем, что $(X, \overline{X})$ — p-разрез. Предположим, что ему трансверсален m-разрез $(Y, \overline{Y})$, для определенности $v_1 \in Y$. Тогда из теоремы о пересечении минимальных разрезов имеем, что разрез $(X \cap Y, \overline{X} \cup \overline{Y})$ минимален. Так как он разделяет вершины v_1 и v_2 и $(X \cap Y) \subset X$, то получаем противоречие с минимальностью по включению множества X. ■

4. В этом пункте исследуем локальную структуру системы t-разрезов графа G, а именно будем рассматривать t-разрезы, внутренние для некоторой p-связки S. Введем как модель для этих исследований граф G_S, получающийся из G следующим образом. Каждое из подмножеств вершин графа, отделяемое от S ее разрезом R, склеивается в вершину x_R, затем производится склеивание

кратных ребер и удаление петель (рис. 6). (Граф G_S отчасти сходен со звездой вершины x_S в дереве Δ: каждой периферийной вершине $x_{S'}$, соответствующей в G соседней с Sp-связке S' и отделяемой от x_S разрезом $R(S, S')$, соответствует вершина $x_{R(S,S')}$ в G_S, отделяемая крайним разрезом $R(S, S')$).

Аналоги p-разрезов связки будем называть *крайними* разрезами графа G_S; они отделяют одну вершину типа x_R от всех остальных. Они, и только они являются p-разрезами графа G_S.

Если два t-разреза, внутренние для S, трансверсальны, то их аналоги в G_S также трансверсальны. Аналоги t-разрезов, внутренних для S, и только они являются t-разрезами графа G_S.

Назовем c-циклом цикл с ребрами веса $c/2$.

Теорема о цикле. Если внутри p-связки S есть t-разрезы, то граф G_S является c-циклом с вершинами типа x_R (R — крайний разрез в G_S).

Доказательство. Пусть имеется некоторое разбиение множества вершин графа G_S. Каждое подмножество в этом разбиении назовем классом. Факторграфом графа G_S относительно разбиения назовем граф, вершины которого суть классы; два класса A и B соединены в факторграфе ребром, если, и только если существует ребро в G_S, соединяющее вершину из A с вершиной из B, причем весом $c(A, B)$ ребра $[A, B]$ считается сумма весов по всем таким ребрам графа G_S.

Нас будут интересовать те разбиения множества $V(G_S)$, факторграфы которых представляют собой c-циклы. Имея некоторое из таких разбиений, построим по нему разбиение на большее число подмножеств и докажем, что его факторграф также c-цикл. В конце концов придем к такому разбиению, каждый класс которого содержит ровно одну вершину из G_S, т. е. получим, что граф G_S — c-цикл. Каждая его вершина отделяется от остальных минимальным разрезом, а именно p-разрезом

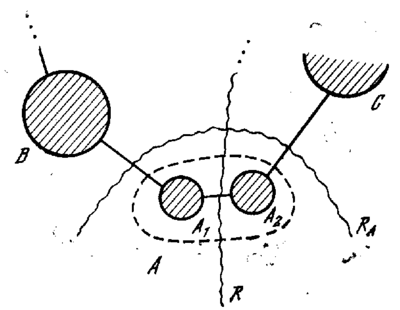


Рис. 7

и, следовательно, является вершиной типа x_R. Тем самым теорема будет доказана.

Вначале возьмем в G_S произвольную пару трансверсальных t-разрезов. По лемме о четырехугольнике факторграф относительно разбиения графа G_S этими разрезами будет c-циклом с четырьмя вершинами.

Пусть уже имеется некоторое разбиение, относительно которого факторграф является c-циклом Q с m вершинами. Назовем *класс-разрезом* разрез в G_S, отделяющий один класс от всех остальных (этот разрез минимален). Пусть некоторый класс-разрез R_A отделяет класс A, содержащий более одной вершины в G_S. Поскольку в G_S нет p-разрезов, отличных от одновершинных разрезов, то R_A — t-разрез. Пусть R — t-разрез в G_S, трансверсальный R_A и он разбивает класс A на подклассы A_1 и A_2 (рис. 7). По лемме о четырехугольнике для разрезов R и R_A $c(A_1, A_2) = c/2$. Так как $c(R) = c$, то отсюда следует, что R разбивает не более двух классов. Следовательно, хотя бы один из двух классов, соседних с A по циклу Q, не разбивается разрезом R. Пусть это класс B и R отделяет его, для определенности, от A_2. Из леммы о четырехугольнике для разрезов R и R_A следует, что $c(B, A_2) = 0$, и, учитывая $c(B, A) = c/2$, заключаем, что $c(B, A_1) = c/2$. Пусть C — второй класс в Q, соседний с A. Так как класс A соединен в Q ребрами только с классами B и C, а также поскольку $c(A_2, \bar{A}_2) = c$, $c(A_2, A_1) = c/2$ и $c(A_2, B) = 0$, то $c(A_2, C) = c/2$.

Таким образом, мы получили более мелкое разбиение множества $V(G_S)$ (класс A разбился на подклассы A_1 и A_2) и доказали, что факторграф относительно этого нового разбиения есть c-цикл с $m+1$ вершинами.

Замечание. t-разрезами графа G_S являются все разрезы, разбивающие цикл C_S на две цепочки, в каждой из которых более одной вершины, и только они.

5. Структурный граф $\Gamma = \Gamma(G)$ построим, исходя из структурного дерева $\Delta = \Delta(G)$. Пометим в дереве Δ такие вершины x_S, что p-связка S содержит t-разрезы. На каждом ребре $[x_S, x_{S'}]$, выходящем из помеченной вершины x_S, «поставим» новую вершину $x_{S,S'}$ («поблизости» от вершины x_S). Некоторые ребра в результате всех таких операций превратятся в два ребра, а некоторые — в три. Получим дерево Δ' (рис. 8а, б).

Удалим из дерева Δ' звезды всех помеченных вершин. Периферийные вершины $x_{S,S'}$ каждой такой звезды соединим ребрами веса $c/2$ в том порядке, в каком расположены соответствующие им вершины цикла G_S. Полученный граф Γ' (рис. 8в), очевидно, растение, причем именно c-растение.

Каждое ребро графа Γ' вида $[x_{S,S'}, x_{S'}]$ (x_S — помеченная, а $x_{S'}$ — непомеченная вершина) стянем в точку — вершину $x_{S'}$, а каждое ребро вида $[x_{S,S'}, x_{S',S}]$ (x_S и $x_{S'}$ — помеченные звезды) стянем в вершину $x_{[S,S']}$. Получим искомый граф Γ (рис. 8г). Заметим, что все стянутые ребра — нециклические. Можно показать, что стягивание нециклического ребра не нарушает свойства графа быть растением. Следовательно, Γ — c-растение.

Отображение φ: $V \to V(\Gamma)$ естественно получается из отображения $\psi: V \to V(\Delta)$. Сравним множества $V(\Delta)$ и $V(\Gamma)$. В $V(\Delta)$ по сравнению с $V(\Gamma)$ есть «лишние» вершины — центры помеченных звезд. Заметим, что каждая такая вершина (x_S) в $V(\Delta)$ — фиктивная (т. е. $\psi^{-1}(x_S) = \phi$). Пусть $V_{\text{п}} \subseteq V(\Delta)$ — множество центров всех помеченных звезд и $V_{\text{р}} \subseteq V(\Gamma)$ — множество точек

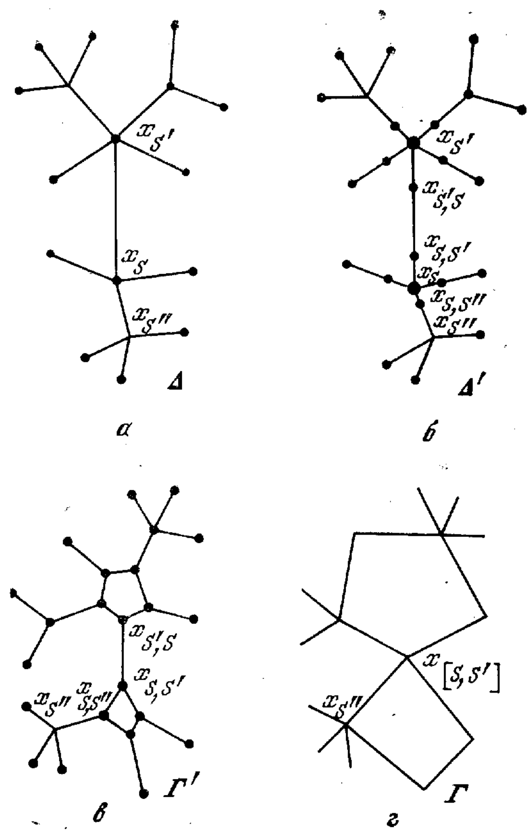


Рис. 8

вида $x_{[S,S']}$. Имеется естественное отображение φ' : : $V(\Delta) \setminus V_п \to V(\Gamma)$ (оно взаимно-однозначно переводит $V(\Delta) \setminus V_п$ в $V(\Gamma) \setminus V_р$). Поскольку $\psi(V) \subseteq \subseteq V(\Delta) \setminus V_п$, то определена композиция $\varphi = \varphi' \circ \psi$ — отображение из V в $V(\Gamma)$.

6. Исследуем множество $\mathbf{P}(\Gamma)$ правильных разрезов в графе Γ.

а) Если ребро u графа Γ — нециклическое (все такие ребра имеются и в графе Δ), то при выкидывании этого ребра граф Γ распадается на две компоненты связности. Выше мы называли такой разрез однореберным и пред-

ставимым ребром u. Мощность однореберного разреза равна c.

б) Если u_1 и u_2 — два произвольных ребра одного и того же простого цикла C графа Γ, то при выкидывании этих ребер из графа Γ он распадается на две компоненты связности. Такой разрез называется двуреберным и представимым ребрами u_1, u_2. Его мощность равна c.

Этими двумя случаями исчерпывается множество правильных разрезов в Γ. Тем самым каждый правильный разрез в Γ является минимальным. В Γ p-разрезами являются: 1) однореберные разрезы; 2) двуреберные разрезы, представимые парой смежных ребер одного и того же простого цикла (такой разрез назовем *крайним двуреберным* разрезом). Двуреберный разрез R, представимый парой u_1, u_2 несмежных ребер, является t-разрезом. Действительно, пусть ребра u_1, u_2 принадлежат простому циклу C и u' — ребро, лежащее между u_1 и u_2 на одной части цикла C, а u'' — на другой части. Тогда разрез, представимый парой ребер u', u'', минимален и трансверсален R.

Теперь оба свойства отображения φ, входящие в формулировку основного результата, легко следуют из всего изложенного. Таким образом основной результат доказан.

Отметим, что отображение φ сохраняет взаимную параллельность (трансверсальность) m-разрезов. Поэтому если R — p-разрез (t-разрез) графа Γ, то $\varphi^*(R)$ — p-разрез (t-разрез) графа G, т. е. $\varphi^*(\mathbf{M}_p(\Gamma)) = \mathbf{M}_p(G)$ и $\varphi^*(\mathbf{M}_t(\Gamma)) = \mathbf{M}_t(G)$.

7. Перейдем к доказательству теоремы о расположении на окружности. Мы докажем ее для произвольного растения и множества его правильных разрезов. Тогда справедливость теоремы для любого графа будет следовать из основного результата. Действительно, пусть Γ — растение, отвечающее графу G, и τ — требуемое расположение $V(\Gamma)$ на окружности. Выберем для каждой вершины $v \in V(\Gamma)$ достаточно малый дуговой интервал так, чтобы эти интервалы взаимно не пересекались. В интервале, соответствующем вершине v, расположим произвольным образом вершины множества $\varphi^{-1}(v) \subseteq V(G)$. Пусть $R = (V_1, V_2) \in \mathbf{M}(\bar{G})$. Рассмотрим разрез $R' = (V_1', V_2') \in \mathbf{P}(\Gamma)$, такой, что $\varphi^*(R') = R$ (такой разрез существует, так как φ^* отображает $\mathbf{P}(\Gamma)$ на $\mathbf{M}(G)$). Так как R' определяется рассечением окружности на две дуги (на одной лежит V_1', на другой — V_2'), то разрез R определяется рассечением окружности на те же, с точностью до малого изменения, две дуги (на одной лежит $V_1 = \varphi^{-1}(V_1')$, на другой — $V_2 = \varphi^{-1}(V_2')$).

Дадим доказательство теоремы для растения Γ и множества $\mathbf{P}(\Gamma)$ его правильных разрезов.

Заметим, что полный пятивершинный граф K_5 и полный двудольный 3×3 граф $K_{3,3}$ содержат циклы, пересекающиеся более чем по одной вершине. Следовательно, растение не может содержать частей, гомеоморфных K_5 или $K_{3,3}$, т. е. по теореме Понтрягина — Куратовского растение — плоский граф [4]. |

Назовем плоское представление графа правильным, если внутри никакого цикла не лежат вершины и ребра графа. Покажем, что у растения Γ всегда имеется правильное представление. Пусть для плоского представления τ графа Γ число циклов, внутри которых содержатся вершины или ребра, равно $k > 0$. Покажем, как получить новое плоское представление τ', для которого число таких циклов равно $k - 1$. Рассмотрим произвольный цикл C, внутри которого содержится часть Γ' графа Γ. Пусть $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_l$ — компоненты связности части Γ'. Каждая компонента Γ_i соединяется ребрами не более чем с одной вершиной цикла C (рис. 9а): иначе нашелся бы цикл, пересекающийся с C более чем по одной вершине. Пусть компонента Γ_i «подвешена» к вершине $x \in C$. Очевидно, снаружи цикла C может быть найдена достаточно малая

[4] Плоскую реализацию графа Γ можно получить непосредственно при построении его из дерева Δ.

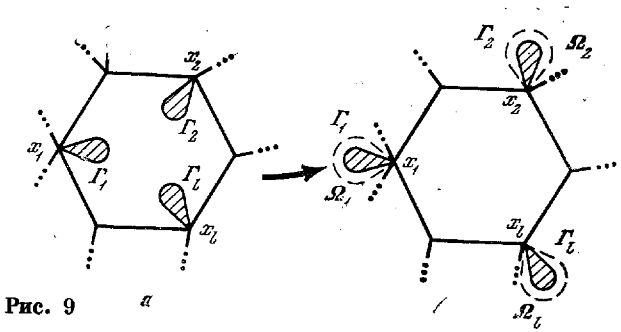


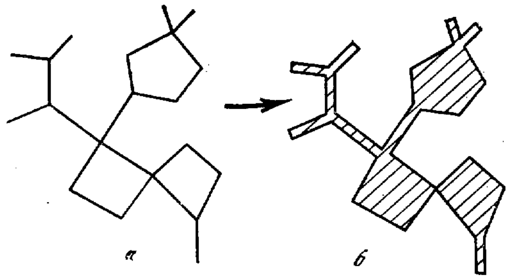
Рис. 9 а б

область Ω_i, не пересекающаяся с τ, замыкание которой пересекается с τ только по вершине x. Перенесем компоненту Γ_i вместе с ребрами, соединяющими ее с x, внутрь Ω_i, соответствующим образом ее деформируя. Проделав такую операцию с каждой компонентой, получим геометрическое изображение τ', для которой число «плохих» циклов равно $k - 1$.

Пусть τ — правильное представление растения Γ. Будем считать дуги и вершины имеющими «толщину» (более строго, рассматриваем замкнутую ε-окрестность τ, где ε — достаточно малое положительное число). Для каждого простого цикла его внутренние точки присоединим к строящейся фигуре. В результате образуется замкнутая многоугольная область Ω (некоторой искривленностью вблизи вершин из τ пренебрегаем). Границей области Ω является многоугольник M, в котором каждому циклическому ребру из Γ соответствует одна сторона, каждому нециклическому ребру — две параллельные стороны. Отобразим многоугольник M гомеоморфно на окружность O. Вершины из Ω перейдут в точки на окружности O, стороны — в дуги на ней (рис. 10).

Рассмотрим произвольный правильный разрез графа Γ. Ему будет соответствовать разбиение области Ω на две связные части, а также разбиение на две части многоугольника M и, следовательно, окружности O.

Заметим, что каждая вершина $v \in V(\Gamma)$ представлена на окружности O, быть может, несколькими точками.



а *б* **Рис. 10**

Из этих точек оставим для рассмотрения только одну (произвольную) точку, а остальные учитывать не будем. Таким образом определено взаимно-однозначное отображение множества $V(\Gamma)$ на выделенные $|V(\Gamma)|$ точек окружности O, которое является искомым. Теорема о расположении на окружности установлена.

А. В. Карзанов

ЭКОНОМНЫЕ РЕАЛИЗАЦИИ АЛГОРИТМОВ ЭДМОНДСА НАХОЖДЕНИЯ ПАРОСОЧЕТАНИЯ МАКСИМАЛЬНОЙ МОЩНОСТИ И МАКСИМАЛЬНОГО ВЕСА

1. Рассматривается граф $G = [V(G),\ U(G)]$ с множеством вершин $V(G)$, $|V(G)| = n$, множеством ребер $U(G)$, $|U(G)| = p$. Множество $P \subset U(G)$ называется паросочетанием, если никакие два ребра из P не имеют общих концов.

Задача А. Найти в G паросочетание M, мощность которого (т. е. $|M|$) максимальна (паросочетание M называется *максимальным*).

Задача Б. Заданы «веса» ребер — функция $c(u) \geqslant 0$, $u \in U(G)$. Найти паросочетание M^c, «вес» которого (т. е. $\sum_{u \in M^c} c(u)$), максимален (паросочетание *максимального веса*).

Эдмондс [1], [2] впервые предложил эффективные алгоритмы решения обеих задач. Анализируя эти алгоритмы, можно установить, что оценка числа действий на решение задачи **А** — $O(n^2p)$, задачи **Б** — $O(n^3p)$, требуемая рабочая память — $O(np)$ «ячеек» (единицей информации и операндом считается многоразрядное «слово», помещающееся в ячейке). Алгоритмы решения задачи **А** приведены также в [3], [4], оценка числа действий для них — $O(n^2p)$, требуемая рабочая память — $O(p)$.

В настоящей работе предлагаются реализации алгоритмов Эдмондса (по существу это модифицированные алгоритмы). Оценка реализации для задачи **А** — $O(n^3)$, для задачи **Б** — $O(n^3 + np\cdot\log_2 n)$, оценка рабочей памяти — $O(n^2)$.

2. Пусть P — паросочетание в графе G. Вершины, не инцидентные ребрам из P, назовем свободными. Ребра, принадлежащие P, и только их назовем выделенными.

Простая цепь (быть может, вырожденная) называется чередующейся, если в любой паре ее соседних ребер ровно одно выделенное. Невырожденная чередующаяся цепь называется увеличивающей (ув.), если ее концевые вершины — свободные.

Критерий максимальности паросочетания дает теорема Бержа [5]: P максимально, если, и только если в G нет ув. чередующейся цепи.

При наличии ув. чередующейся цепи L можно перейти к паросочетанию на единицу большей мощности, поменяв ролями выделенные и невыделенные ребра этой цепи. Такую процедуру назовем *перекраской* вдоль L.

На основании теоремы Бержа максимальное паросочетание можно получить из исходного (быть может, пусто-