ДОКЛАДЫ

АКАДЕМИИ НАУК СССР

1974

т. 215, № 1

Доклады Академии наук СССР
1974. Том 215, № 1

УДК 518.5

МАТЕМАТИКА

А. В. КАРЗАНОВ

НАХОЖДЕНИЕ МАКСИМАЛЬНОГО ПОТОКА В СЕТИ МЕТОДОМ ПРЕДПОТОКОВ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 16 IV 1973)

Излагается алгоритм нахождения максимального потока в сети с верхней оценкой числа действий $O(n^3)$, n — число вершин сети.

1. Потоковой сетью называется ориентированный граф $G=[V;\ U]$ с множеством вершин V, $|V|=n$, множеством дуг U, $|U|=p$, действительной функцией «пропускной способности» дуги $c(u)>0$, $u\in U$, «источником» $s\in V$, «стоком» $t\in V$. Функция $f(u)$, $u\in U$ называется потоком, если:

1) $0\leqslant f(u)\leqslant c(u)\quad \forall u\in U$,

2) $$\mathrm{Div}(x)=\sum_{(x,y)\in U} f((x,y))-\sum_{(z,x)\in U} f((z,x))=0\qquad \forall x\in V\diagdown\{s,t\}.$$

Максимальным называется поток с наибольшей мощностью $v(f)=\mathrm{Div}(s)=-\mathrm{Div}(t)$ ([1]).

В ([2]) задача фактически сводится к решению не более чем $n-1$ задач следующего вида:

Дана сеть (справочная кратчайших путей) $S_k=[V_k;\ U_k]$, $|V_k|\leqslant n$, $|U_k|\leqslant p$, $1\leqslant k\leqslant n-1$, с «источником» s, «стоком» t, «пропускной способностью» дуги $c_k(u)$, $u\in U_k$, такая, что любая вершина, а также любая дуга принадлежат некоторому кратчайшему (ориентированному) пути из s в t (с числом дуг k). Найти такой поток f_k, что для любого (ориентированного) пути ξ из s в t найдется насыщенная дуга $u\in\xi$, т. е. $f_k(u)=c_k(u)$. f_k называется **тупиковым потоком**.

Предлагается алгоритм, решающий эту задачу за $O(n^2)$ действий.

2. В справочной $S=[V;\ U]$ (индекс k в дальнейшем будем опускать) l-ым слоем, $l=0, 1, \ldots, k$, называется множество $O_l=\{x\colon\ x\in V,\ x$ находится на расстоянии l от $s\}$. Согласно определению $O_0=\{s\}$, $O_k=\{t\}$.

Пусть $\rho(u)$, $u\in U$, — допустимая функция, т. е. $0\leqslant\rho(u)\leqslant c(u)$. Пусть ξ называется ρ-заблокированным, если найдется насыщенная дуга $u\in\xi$, т. е. $\rho(u)=c(u)$. Дуга $u=(x, y)$ (соответственно, вершина x') называется ρ-заблокированной, если любой путь ξ вида $x, u, y, \ldots, t$ (соответственно путь ξ' вида $x', \ldots, t$) является ρ-заблокированным. Таким образом, тупиковый поток — это такой поток f, для которого источник s f-заблокирован.

Будем пользоваться следующими обозначениями: $\alpha(x)$, $x\in V$, — множество дуг, исходящих из x, $\beta(x)$-входящих в x;

$$\bar V\rightleftharpoons V\diagdown\{s,t\};\quad \rho(U')\rightleftharpoons\rho(u)|_{U'},\quad |\rho(U'(x))|\rightleftharpoons\sum_{u\in U'}\rho(u),\quad U'\subseteq U$$

(знак $\rightleftharpoons$ означает равенство по определению).

Функцию $g(u)$, $u\in U$, назовем **предпотоком**, если выполняются следующие свойства:

$P1.$ $0\leqslant g(u)\leqslant c(u)$;

$P2.$ $|g(\beta(x))|\geqslant|g(\alpha(x))|\quad \forall x\in\bar V$;

$P3$. Если $|g(\beta(x))|>|g(\alpha(x))|$, $x\in\overline{V}$ (x называется дефицитной вершиной), то вершина x g-заблокирована;

$P4$. Вершина s g-заблокирована.

Если предпоток g не содержит дефицитных вершин, то g — тупиковый поток.

3. Описание алгоритма. Тупиковый поток в S строится итеративно. i-я итерация, $i=1, 2, \ldots$, состоит из двух частей: а) достройки до предпотока, б) балансирования дефицитных вершин. Функцию, полученную на i-й итерации в результате достройки, будем обозначать g_i, в результате балансирования — $g_i^{\text{испр}}$.

Каждая дуга имеет текущую пометку: открытая, либо закрытая. Если дуга становится закрытой, то она остается такой до конца работы алгоритма. Вначале все дуги открытые.

Будем считать, что множество $M=\{m_1, m_2, \ldots, m_q\}$ задано в виде списка, если фиксировано некоторое упорядочение $m_{p_1}, m_{p_2}, \ldots, m_{p_q}$ посредством указания начального элемента ($m_{\text{нач}}=m_{p_1}$); конечного ($m_{\text{кон}}=m_{p_q}$) и для каждого элемента m_{p_j} $j=1, 2, \ldots, q$, — предыдущего ($m_{p_{j-1}}$ и последующего ($m_{p_{j-1}}$) (полагаем $m_{p_0}=\phi$, $m_{p_{q+1}}=\phi$).

В виде списков задаются следующие текущие множества:

а) $\bar{\alpha}(x)$ $\forall x\in V$ — множество открытых ненасыщенных дуг;

б) $\beta_\Delta(x)$ $\forall x\in\overline{V}$ — множество, смысл которого уточняется далее. Для каждого $z\in\beta_\Delta(x)$ определено действительное число $\Delta(z)>0$, называемое добавкой. Вначале $\bar{\alpha}(x)=\alpha(x)$ $\forall x\in V$; $\beta_\Delta(x)=\phi$ $\forall x\in\overline{V}$.

Достройка до предпотока. Пусть уже произведено $i-1$ итераций, $i\geqslant 2$, определена функция $g_{i-1}^{\text{испр}}$ и справедливы утверждения (при $r=i-1$):

1°. Для $g_r^{\text{испр}}$ выполняются свойства $P1$, $P2$, $P4$ и определен слой $O_{s(r)}$ такой, что для $\forall x\in \bigcup\limits_{l=1}^{s(r)-1} O_l$ выполняется $P3$ и в слоях $O_{s(r)+1}$, $O_{s(r)+2}, \ldots$ $\ldots, O_{k-1}$ нет дефицитных вершин.

2°. Все закрытые дуги $g_r^{\text{испр}}$ заблокированы.

3°. Для каждой дуги $u\in\bar{\alpha}(x)$ $\forall x\in V$, кроме, быть может, начальной, $g_r^{\text{испр}}(u)=0$.

Достройка на i-й итерации заключается в построении предпотока g_i из $g_{i-1}^{\text{испр}}$. Скажем, что в дуге $u\in U$ произведено активное назначение, если $g_i(u)>g_{i-1}^{\text{испр}}(u)$. Будем говорить, что во всех остальных дугах производится пассивное назначение; для каждой такой дуги u $g_i(u)=g_{i-1}^{\text{испр}}(u)$.

Для всех дуг, инцидентных вершинам слоев $O_0, O_1, \ldots, O_{s(i-1)-1}$, полагаем $g_i=g_{i-1}^{\text{испр}}$ (пассивное назначение).

Производится послойный обход вершин слоев $O_{s(i-1)}, O_{s((i-1)+1}, \ldots$ $\ldots, O_{k-1}$: сначала перебираются вершины слоя $O_{s(i-1)}$, затем $O_{s(i-1)+1}$ и т. д. до O_{k-1} включительно. Пусть при послойном обходе уже обойдены вершины $x_1, x_2, \ldots, x_N$ и $x_{N+1}\in O_j$ — следующая вершина. $g_i(\beta(x))$ уже определено для любой вершины $x\in O_j$ и

$$|g_i(\beta(x_{N+1}))|\geqslant|g_{i-1}^{\text{испр}}(\alpha(x_{N+1}))|.$$

а) Если $|g_i(\beta(x_{N+1}))|=|g_{i-1}^{\text{испр}}(\alpha(x_{N+1}))|$, то полагаем $g_i(\alpha(x_{N+1}))=g_{i-1}^{\text{испр}}(\alpha(x_{N+1}))$ (пассивное назначение).

б) Если $|g_i(\beta(x_{N+1}))|>|g_{i-1}^{\text{испр}}(\alpha(x_{N+1}))|$ и $\bar{\alpha}(x_{N+1})=\phi$, то полагаем $g_i(\alpha(x_{N+1}))=g_{i-1}^{\text{испр}}(\alpha(x_{N+1}))$ (пассивное назначение).

в) Пусть $|g_i(\beta(x_{N+1}))|>|g_{i-1}^{\text{испр}}(\alpha(x_{N+1}))|$ и $\bar{\alpha}(x_{N+1})\neq\phi$. Пусть $\bar{\alpha}(x)=\{u_1, u_2, \ldots, u_q\}$.

Полагаем $g_i(\alpha(x_{N+1})\setminus\bar{\alpha}(x_{N+1}))=g_{i-1}^{\text{испр}}(\alpha(x_{N+1})\setminus\bar{\alpha}(x_{N+1}))$ (пассивное назначение). Пусть для дуг $u_0=\phi$, u_1, $u_2, \ldots, u_l$, $0\leqslant l<q$, g_i уже определено и $|g_i(\hat{\alpha}(x_{N+1}))|<|g_i(\beta(x_{N+1}))|$, где $\hat{\alpha}(x_{N+1})=\alpha(x_{N-1})\setminus\bar{\alpha}(x_{N+1})\cup$ $\cup\{u_0, u_1, \ldots, u_l\}$ — множество дуг с уже заданным g_i. Для очередной дуги u_{l+1} списка $\bar{\alpha}(x_{N+1})$ полагаем $g_i(u_{l+1})=\min\{c(u_{l+1}), |g_i(\beta(x_{N+1}))|-$ $-|g_i(\hat{\alpha}(x_{N+1}))|\}$ (активное назначение). Производим активные назначения до дуги u_m (включительно), для которой либо: 1) $|g_i(\alpha(x_{N+1})\setminus$ $\setminus\bar{\alpha}(x_{N+1})\cup\{u_1, u_2, \ldots, u_m\})|=|g_i(\beta(x_{N+1}))|$, либо 2) $m=q$. Для дуг $u_{m+1}, u_{m+2}, \ldots, u_q$ (в случае 1) полагаем $g_i=g_{i-1}^{\text{испр}}=0$ (пассивное назначение). Новый список $\bar{\alpha}(x_{N+1})$ имеет вид $\{u_m, u_{m+1}, \ldots, u_q\}$, если $g_i(u_m)<$ $<c(u_m)$, и имеет вид $\{u_{m+1}, u_{m+2}, \ldots, u_q\}$, если $m<q$ и $g_i(u_m)=c(u_m)$.

Если в дуге $u=(x_{N+1}, y)$ производится активное назначение, то u добавляется в конец списка $\beta_\Delta(y)$ (даже если дуга u уже содержится в $\beta_\Delta(y)$) и $\Delta(u)$ определяем равной $g_i(u)-g_{i-1}^{\text{испр}}(u)$.

При построении g_1 полагаем $g_0^{\text{испр}}\equiv 0$, $s(0)=0$, $g_1(\alpha(s))=c(\alpha(s))$ (активное назначение) и далее действуем в соответствии с алгоритмом достройки.

Балансирование. Пусть $d(i)$ — максимальный номер слоя, в котором у g_i есть дефицитная вершина (x). В вершине x проводится операция балансирования, т. е. определение $g_i^{\text{испр}}(\beta(x))$ такого, что $|g_i^{\text{испр}}(\beta(x))|=|g_i(\alpha(x))|$ и $g_i^{\text{испр}}(u)\leqslant g_i(u)$ $\forall u\in\beta(x)$. Балансирование в вершине x производим в соответствии со списком $\beta_\Delta(x)$, идя с его конца и уменьшая g_i за счет «добавок». Пусть u_l — очередной элемент в $\beta_\Delta(x)$ и $|g_i^{\text{испр}}(\hat{\beta}(x))|+|g_i(\beta(x)\setminus\hat{\beta}(x))|>|g_i(\alpha(x))|$, где $\hat{\beta}(x)\subset\beta(x)$ — множество дуг, для которых $g_i^{\text{испр}}$ определено. Полагаем $g_i^{\text{испр}}(u_l)=\max\{g_i(u_l)-$ $-\Delta(u_l), |g_i(\alpha(x))|-g_i^{\text{испр}}(\hat{\beta}(x))|-|g_i(\beta(x)\setminus\hat{\beta}(x)\setminus u_l)|\}$ (активное назначение) и переходим к u_{l-1} и так до тех пор, пока не станет $g_i^{\text{испр}}(\beta(x))|+|g_i(\beta(x)\setminus\hat{\beta}(x))|=|g_i(\alpha(x))|$, где $\hat{\beta}(x)$ — (новое) множество с уже определенным $g_i^{\text{испр}}$. Для $\forall u\in\beta(x)\setminus\hat{\beta}(x)$ полагаем $g_i^{\text{испр}}(u)=$ $=g_i(u)$ (пассивное назначение). Каждая дуга $u=(y, x)\in\beta(x)$ объявляется «закрытой» и вычеркивается из списка $\bar{\alpha}(y)$ (если в нем присутствовала).

Если в слое $O_{d(i)}$ несколько дефицитных вершин, то производим балансирование независимо для каждой. Для всех дуг с еще не назначенным $g_i^{\text{испр}}$ полагаем $g_i^{\text{испр}}=g_i$ (пассивное назначение). Положим $s(i)=d(i)-1$.

Лемма 1. 1) *g_i — предпоток,* 2) *утверждения 1^0—3^0 верны при $r=i$.* 3) *Если вершина $x\in V$ $g_{i-1}^{\text{испр}}$-заблокирована, то она g_i-заблокирована и $g_i^{\text{испр}}$-заблокирована.*

Лемма доказывается индукцией по i (при $i=1$ доказательство непосредственное).

Каждой «добавке» Δ отнесем номер $e(\Delta)$ той итерации, на которой она возникла в результате достройки. Пусть $k_{i,j}$ — максимальный номер добавок по всем дугам, входящим в вершины слоя O_j, перед началом балансирования на i-й итерации.

Лемма 2. *При балансировании на i-й итерации активное назначение может производиться только для такой дуги $u\in\beta_\Delta(x)$, $x\in O_{d(i)}$, у которой $e(\Delta(u))=k_{i,d(i)}\cdot g_i^{\text{испр}}(u)\geqslant g_i(u)-\Delta(u)$.*

При помощи лемм 1, 2 доказывается

Теорема. *В каждой вершине $x\in\bar{V}$ балансирование проводится не более одного раза.*

Из теоремы следует, что число итераций не более n—2. Окончательная функция является потоком и поскольку s g_1-заблокирована, то из леммы 1 п. 3 следует, что этот поток тупиковый.

4. Оценка числа действий. При пассивном назначении действия не производятся. Благодаря использованию списков, число действий

на построение тупикового потока $\eta=O(n^2+\bar{\eta})$, где η — число активных назначений. Из теоремы следует, что $\bar{\eta}=O(p+\eta_д)$, где $\eta_д$ — число активных назначений при достройках. Скажем, что в результате активного назначения при достройке в дуге u произошло событие A, если дуга u насытилась, и событие B, если не насытилась.

Лемма 3. 1) *Общее число событий A не свыше p.*

2) *В течение одной итерации в $\alpha(x)$ $\forall x\in V$ происходит не более одного события B.*

Из леммы 3 следует, что $\eta_д\leqslant p+\eta'$ и $\eta'=O(n^2)$, где η' — общее число событий B, откуда следует, что $\eta=O(n^2-\eta')=O(n^2)$.

Имеется модификация изложенного метода нахождения тупикового потока, для которой $\eta=O(p+\eta')$. Удается построить экстремальные примеры сетей, подтверждающие точность оценки $O(n^3)$ для нахождения максимального потока с помощью изложенного и модифицированного методов.

Институт проблем управления
(автоматики и телемеханики)
Москва

Поступило
16 IV 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Л. Форд, Д. Фалкерсон*, Потоки в сетях, М., 1966. [2] *Е. А. Диниц*, ДАН, т. 194, № 4 (1970).