ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ
ПРОБЛЕМ
УПРАВЛЕНИЯ

УПРАВЛЕНИЕ СЛОЖНЫМИ СИСТЕМАМИ

СБОРНИК ТРУДОВ

ВЫПУСК 4

МОСКВА 1974

Содержание

ОБ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ СЛОЖНОСТИ АЛГОРИТМОВ РЕШЕНИЯ ОБЩЕЙ И ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Диниц Е.А., Карзанов А.В.

С момента создания классических алгоритмов линейного программирования до последнего времени существовал большой разрыв между наблюдаемой трудоемкостью решения задач и оценкой трудоемкости сверху в общем случае. Первая-линейна, вторая - экспоненциальна относительно размерности задачи /числа ее переменных и ограничений/.

В 1972 г. в работе [1] и, независимо, В.А.Лифшицем[ж/] были построены примеры задач, требующие экспоненциального числа шагов при решении их с помощью известной модификации Данцига /прямого/ симплекс-метода.

В настоящей работе построены экспоненциальные примеры для двух других модификаций симплекс-метода /I - Е.А.Диниц/ и для метода сокращения невязок /прямо - двойственного/ и метода потенциалов в применении к транспортным задачам /II - А.В.Карзанов/.

I. Геометрически решение задачи линейного программирования /прямым/ симплекс-методом можно представлять себе как движение по ребрам /одномерным граням/ соответствующего задаче многогранника, так что значение целевой функции строго возрастает на каждом шаге /вдоль каждого ребра пути - следа движения/ или подчиняется более сильным локальным условиям.

ж/ Работа докладывалась на Пятой зимней школе по математическому программированию и смежным вопросам, г.Дрогобыч, 1972г.

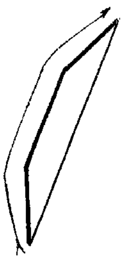
Примеры задач с n переменными и m ограничениями типа неравенства / n - примеры/ будут строиться для $\forall n$ как n-мерные многогранники с m гипергранями, в которых выделен направленный путь с экспоненциальным числом вершин и такими локальными свойствами, что рассматриваемая модификация симплекс-метода из любой вершины пути должна перейти в следующую его вершину.

При этом максимизируемую целевую функцию $C=(\bar{c},\bar{x})$ на евклидовом пространстве X, $dim X=n$ будем считать заданной. Вектор будем считать направленным "вертикально вверх". Соответственно будем употреблять понятия "выше" и "ниже".

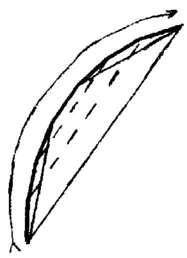
n - примеры будем рекуррентно строить а/ симметричными относительно некоторой гиперплоскости и б/ невырожденными в том смысле, что достаточно малые /д.м./ их шевеления допустимы, т.е. не нарушают используемых их свойств /для этого, кроме общего положения ограничивающих гиперплоскостей, достаточно строгости всех встречающихся неравенств/. Отметим, что любые /параллельные/ сдвиги допустимы.

I. Рассмотрим модификацию, выбирающую ребро по принципу максимальной $\frac{(\bar{c},\bar{p})}{|p|}$ - скорости роста целевой функции в расчете на единицу длины ребра p, иначе, по минимальному $\angle(\bar{c},\bar{p})$ - углу p с вертикалью. Ниже для нее будут построены n -примеры с $2n$ гипергранями и 2^n вершинами, так что выделенный путь /далее "путь"/ содержит все вершины многогранника.

I-пример - отрезок; 2-пример - трапеция /см.рис.I,а/; 3-пример иллюстрируется рис. I,б.



а)



б)

Рис.I.

Идея построения состоит в следующем. Будем строить примеры вытянутыми вдоль своей оси, так что путь мало отличается от движения вдоль отрезка. Тогда n -пример $G(n\geq 2)$ строится как "равнобедренная трапеция", "боковые ребра" которой - взаимно-симметричные /n-I/-примеры G' и G''. Проследим путь модификации по G. Находясь в нижнем "ребре" G', невыгодно идти параллельно оси /"основанию"/ G, так как она составляет больший угол с вертикалью, чем ребра пути в G'. Движение по

G', как $/n-1/$-примеру, есть обход всех его вершин. Из его верхней вершины переходим в нижнюю вершину G'' и, симметрично первой половине пути, обходим вершины G'', что и требуется.

Отметим, что ввиду симметричности $/n-1/$-примера, G'' получается из G' сдвигом и поворотом, причем для успеха построения нужно, чтобы поворот был достаточно большим по сравнению с "отличием G' от отрезка" и при этом допустимым.

Пусть N' - гиперплоскость /гип./ симметрии $G' \subset X$, $\dim X \geqslant n$; $\bar{n}'$, $(\bar{n}', \bar{c}) > 0$, - нормаль к N' /и ось G'/. Под "поворотом" далее будем понимать поворот относительно $/n-2/$-мерной плоскости - ортогонального дополнения к $\bar{c}$ и $\bar{n}$ - в направлении от $\bar{c}$ к $\bar{n}'$.

Введем <u>рекуррентное предположение</u>: существуют α' и γ': γ'/α' - д.м., такие, что для G' допустимы повороты на углы, меньшие α', и $\gamma' > \angle(p, \bar{n}')$, где p - любое ребро G'. Очевидно, для $n = 2$ / G' - отрезка/ оно выполняется.

<u>Построение</u>. Расположим G' в вертикальной гип. $M \subset X$. Повернем N' на γ'; д.м. пошевелим ее так, чтобы нормаль к ней вышла из M, и сдвинем так, чтобы G' оказался ниже ее. Получим гип. N с нормалью n. Положим G'' образом G' при отражении от N, а $G = \overline{G' \cup G''}$ */.

<u>Обоснование</u>. 1. $G' \cap G'' = \varnothing$. 2. G' и G'' не лежат в одной $/n-1/$-мерной плоскости. 3. G'' получен из G' совокупностью допустимых поворота, шевеления и сдвига, т.е. является $/n-1/$-примером. 4. Ребра G, не лежащие в $G' \cup G''$, параллельны оси $\bar{n}$, т.е. по построению $\bar{n}$ и определению γ' имеют больший угол с вертикалью, чем ребра G'.

Следовательно, по изложенным выше качественным соображениям, G - n-пример.

<u>Проверим</u> рекуррентное предположение. 1. $\forall\, p$ - ребра G', имеем $\angle(\bar{p}, \bar{n}) \leq \angle(\bar{p}, \bar{n}') + \angle(\bar{n}', \bar{n}) \leq 2\gamma'$. То же верно для ребер G'' по симметрии. 2. Если бы при построении G вместо G' исходить из образа G' при повороте на угол, меньший $\alpha' - 2\gamma'$, то, как легко видеть, получился бы тоже n-пример, являющийся образом G при таком же повороте. 3. То, что при д.м. γ'/α' также д.м. $2\gamma'/\alpha' - 2\gamma'$, очевидно.

Таким образом, рекуррентное построение корректно.

2. Рассмотрим модификацию Δ, выбирающую ребро с максимальным $(\bar{c}, \bar{p})$ - <u>приращением</u> целевой функции на ребре p.

---

*/ $\bar{D}$ - выпуклое замыкание D.

/Путь этой модификации не зависит от эквивалентных преобразований координат и ограничений/. Ниже для нее будут построены n-примеры с $\approx 6n$ гипергранями и $\sim(\sqrt{5}+1)^n$ вершинами, так что выделенный путь содержит $\sim 2^n$ вершин.

I-пример - отрезок; 2-пример - подсеченная трапеция /см. рис.2/; 3-пример иллюстрируется рис. 3, по которому удобно следить за построением.

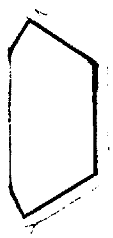


Рис.2.

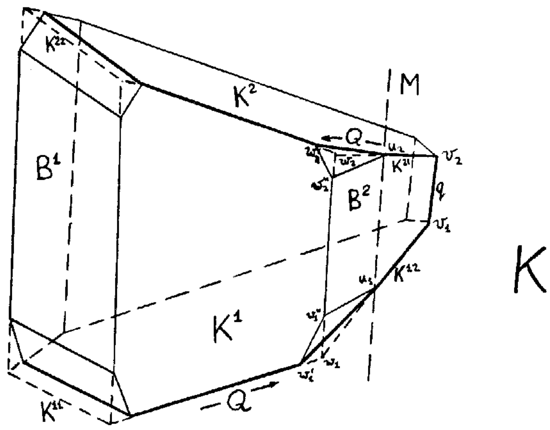


Рис.3.

Идея построения, качественно говоря, состоит в том, чтобы, имея многогранник с достаточно "длинным" возрастающим путем*/, заключить этот путь в "канавку" с достаточно низкими склонами, заставляющую модификацию Δ двигаться по пути. Трудность заключается в том, чтобы обойтись для такого построения малым /линейным от n / количеством добавочных ограничений. /Ниже построение исходного многогранника и "канавки" совмещено/.

Рекуррентное предположение к построению n -примера $K(n>2)$ с путем Q состоит в существовании $(n-1)$-примера K^1 с путем Q^1, обладающего свойствами, описанными выше, и удовлетворяющего условиям: /а/ путь $-Q^1$ (Q^1 с противоположной ориентацией) определяет пример для целевой функции $-C$, /б/ в K^1 выделены две гиперграни /основания/ K^{11} и K^{12} такие, что $Q^1 \subset K^{11} \cup K^{12}$ и /в/ первое и последнее ребра пути имеют приращение функции C не менее чем втрое большее, нежели конкурирующие с ними ребра.

Построение с параллельным обоснованием. А. Расположим K^1 в невертикальной гиперплоскости /гип./, в полупространстве $C<0$. Пусть K^2 -образ K^1 при отражении φ относительно гип.$C=0$.

---

*/ Например, многогранник, построенный в п.I.

$K^1 \cap K^2 = \emptyset$; K^2 с путем $\mathfrak{a}^2 = \varphi(-\mathfrak{a}^1)$ и основаниями $K^{21} = \varphi(K^{12})$ и $K^{22} = \varphi(K^{11})$ - / n -I/-пример. Положим $K = \overline{K^1 \cup K^2}$ и $\tilde{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}^1 q \mathfrak{a}^2$, где $q = (v_1, v_2)$, v_1 - верхняя вершина K^1, а v_2 - нижняя в K^2. Ребра $\bar{K}$, не лежащие в $K^1 \cup K^2$, - образующие - вертикальны.

Если бы модификации Δ было запрещено идти по образующим, исходящим из вершин пути $\mathfrak{a}^1$, кроме q, то путь $\tilde{\mathfrak{a}}$ удовлетворял бы нужным условиям. Поэтому дальнейшие построения будут преследовать цель сымитировать такое запрещение для всех таких /"мешающих"/ образующих, не входя в противоречие с условиями рекуррентного построения. Договоримся, что далее все построения, описанные для полупространства $C<0$ /для K^1 с окрестностью/, дублируются симметрично гип. $C=0$.

Б. Рассмотрим "боковые" гиперграни B^i /здесь и далее индекс i пробегает $\{1,2\}$ /, натянутые на $\bar{C}$ и K^{1i}. Они содержат, в силу /δ /, все мешающие образующие /основной факт для преодоления указанной выше трудности/. Рассмотрим какие-либо опорные для $\tilde{K}$ гип. M_{1i} : $M_{1i} \cap \tilde{K} = K^{1i}$. Д.м. сдвинем их вовнутрь $\tilde{K}$ и отсечем ими от $\tilde{K}$ малые части вместе с K^{1i}/фактически, добавим новые ограничения/. /На рис. 3 см. только отсечение K^{11} и K^{22} /. Сдвиг выберем д.м. для того, чтобы соответствующее отсечению шевеление K^1 было допустимым /пошевеленным объектам оставляем те же обозначения/. При этом преобразовании - подсечении $\tilde{K}$ - каждая вершина v из K^{1i} /в частности, $v \in \mathfrak{a}^1$ / . "раздваивается" на $v' \in K^1$ и $v'' \in B^i$, соединенные д.м. длины ребром p_v. Это ребро - единственное, исходящее из v' вовне K^1.

Теперь в каждой вершине $v \in \mathfrak{a}^1$, $v \neq v_1$, модификация Δ "с большим запасом" предпочтет ребро пути $\mathfrak{a}^1(\tilde{\mathfrak{a}})$ ребру p_v, в силу д.м. / $\bar{C}$, $\bar{p}_v$ /, то есть нужное запрещение сымитировано. /Фактически, каждая из мешающих образующих "сломается" в двух местах близко к краям, аналогично рис. 2/.

При подсечении $\tilde{K}$ количество гиперграней увеличилось на четыре, т.е. стало на шесть больше, чем у K^1. Количество вершин V_n удовлетворяет рекуррентному уравнению $V_n = 2V_{n-1} + 4V_{n-2}$, откуда $V_n \sim (\sqrt{5}+1)^n$ /дальнейшее исправление построения не изменит V_n существенно/. Единственное возникшее противоречие - появление на пути $\mathfrak{a}$ двух новых вершин - точек излома ребра q, - не лежащих в основаниях /ср. с (δ) /.

В. Для того чтобы избежать этого нарушения, построение проведем несколько иначе. Пусть, для определенности, $v_1 \in K^{12} \subset B^2$. На каждом из n -2 ребер, инцидентных v_1 в K^{12}, выберем по внутренней точке, причем на ребре (ω_1, v_1) возьмем точку u_1, делящую его в отношении α : /1- α /, где $\frac{1}{3}<\alpha<\frac{2}{3}$. Множество U_1 составим из этих точек. Однозначно определяется $(n-2)$ - мерная плоскость M, содержащая U_1 и $\bar{c}$.

<u>Исправим</u> построение в том, что вместо сдвига M_{12} произведем ее поворот относительно M на д.м. угол в таком направлении, чтобы отсекались все вершины K^{12}, кроме v_1. Положим, что полученный многогранник и есть K.

Так как все вершины Q^1, кроме v_1, отсекаются, то нужное запрещение и здесь сымитировано. Осталось рассмотреть "окрестность" ребра q, где преобразование оснований не сводится к шевелению ограничений, так как остаются "старые" ограничения. Далее речь будет идти о K^2 отдельно от K^1. Введем, по симметрии, обозначения ω_2, u_2, U_2.

Путь Q в K положим отличающимся от $\tilde{Q}$ на "отрезке" от ω_1' до ω_2', где естественно определим его как $/\omega_1', u_1/$, $/u_1, v_1/$, q, $/v_2, u_2/$, $/u_2, \omega_2'/$. Докажем, что путь Q не перестал соответствовать модификации Δ в результате исправления построения. Во-первых, отметим, что ребра пути, исходящие из любой вершины, кроме ω_1', u_1, v_2, u_2, не изменились /с точностью до шевеления/, а остальные инцидентные этой вершине ребра при сохранении направления могли лишь уменьшить длину. Так что для этих вершин все хорошо.

Во-вторых, аналогичные соображения проходят для вершин ω_1' и v_2 с той разницей, что исходящие из них ребра пути "сломались" и приращение функции C на них уменьшилось не более чем втрое. В силу условия /в/ это несущественно.

В-третьих, отдельно рассмотрим новые вершины u_1 и u_2.

1/ в u_1 с ребром в v_1 конкурируют ребра в новые вершины $u \in U_1 \setminus u_1$, но $C(u) < C(v_1)$ по определению u и v_1, и ребро в ω_1'', но оно д.м. отличается от "убывающего" ребра $(u_1, \omega_1') \in -Q$;

2/ в u_2 с ребром в ω_2' конкурируют ребра в вершины $u \in U_2 \setminus u_2$, но $C(u) < C(u_2)$ в силу выбора ребра (v_2, u_2) в вершине v_2, и ребро в ω_2'', но ребро (ω_2', ω_2'') можно сделать убывающим, если M_{21} взять достаточно близкой к B^2, отчего (ω_2', ω_2'') по направлению почти сольется со "старой" образующей / ω_2, ω_1 /, направленной, как $-\bar{c}$.

Нужные свойства n -примера обоснованы. Рекуррентные условия, аналогичные /а/ и /б/, выполняются по построению; для /в/ достаточно указать на то, что добавленные конкурирующие ребра типа p_v имеют д.м. приращение функции C, а в остальном ситуация "около" рассматриваемых ребер в процессе построения не менялась /с точностью до шевеления/.

II. Дана сеть $G=\langle V;U;s,t;c,a\rangle$ с множеством вершин V, множеством /ориентированных/ дуг U, источником s, стоком t и целочисленными функциями: $c(u)\geqslant 0, u\in U$, – пропускной способности дуги и $a(u)\geqslant 0, u\in U$ – стоимости перевозки единицы продукта. Требуется найти поток $f(u)$, $u\in U$, имеющий максимальную мощность $v(f)$ и при этом минимальную "стоимость" $\sum_{u\in U} a(u)f(u)$ /задача МПМС/.

В п. I излагается пример сети G^k, $|V^k|=2k$, для которой число итераций алгоритма Л.Форда и Д.Фалкерсона /АФФ/ /см.[2], Ш, § 3/ равно 2^{k-1}. В п.2 на этой основе строятся примеры транспортных задач для обобщенного венгерского метода Л.Форда и Д.Фалкерсона /см. [2], Ш, § I/ и некоторых других той же группы, а также метода потенциалов /см. [3], гл.4/ с оценками того же порядка.

I. На каждой итерации АФФ некоторым образом строится увеличивающий путь ξ из s в t, имеющий минимальную стоимость $a(\xi)=\sum_{u'\in U'(\xi)} a(u')-\sum_{u''\in U''(\xi)} a(u'')$, где $U'(\xi)$ множество прямых дуг пути ξ, $U''(\xi)$ – обратных, вдоль которого уже найденный поток f увеличивается на величину $c(\xi)=\min_{u'\in U';\, u''\in U''}\{c(u')-f(u'), f(u'')\}$ /"пропускную способность" пути ξ/ в прямых дугах и уменьшается на $c(\xi)$ в обратных.

Допустим, в сети G не существует ориентированного пути из t в s /предположение I/. Пусть АФФ последовательно строил увеличивающие пути $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$, причем сеть G такова, что каждый раз существовал единственный увеличивающий путь минимальной стоимости /т.е., в частности, $a(\xi_{i+1})>a(\xi_i)$, $\forall i=1,\ldots,N-1$) /предположение 2/.

Построим сеть $G^2=\langle V^2;U^2;s^2,t^2;a^2,c^2\rangle$ /рис. 4/.

$$V^2=V\cup\{s^2,t^2\};\ U^2=U\cup\{u_0,u_1,u_2,u_3\};\ c^2(u)=c(u),\ a^2(u)=a(u);$$
$$\forall u\in U;\ c^2(u_0)=c^2(u_3)=v(f),\ c^2(u_1)=c^2(u_2)\geqslant$$
$$\geqslant v(f);\ a^2(u_0)=a^2(u_3)=0,\ a^2(u_1)=a^2(u_2)>a(\xi_N).$$

Предположение I для G^2 верно.

Будет доказано в п.2, что для G^2 верно предположение 2 и последовательность увеличивающих путей минимальной стоимости есть $\xi_1^2=s^2,u_0,\xi_1,u_3,t^2;\ \xi_2^2=s^2,u_0,\xi_2,u_3,t^2;\ldots,\xi_N^2=s^2,u_0,\xi_N,u_3,t^2;$

$$\xi_{N+1}^2=s_2,u_1,-\xi_N,u_2,t^2;\ldots,\xi_{N+j}^2=s^2,u_1,-\xi_{N-j+1},u_2,t^2;\ldots;$$
$$\xi_{2N}^2=s^2,u_1,-\xi_1,u_2,t^2,$$

где $-\xi_j$ - путь ξ_j с противоположной ориентацией. Из предположения I для G следует, что найденный в результате $2N$ итераций поток $v^2(f)$ максимален /$\{u_0, u_3\}$ образуют разрез/.

Аналогично по сети G^2 строится сеть G^3 /добавляются вершины s^3, t^3 и дуги $u_0^3=(s^3,s^2)$, $u_1^3=(s^3,t^2)$, $u_2^3=(s^2,t^3)$, $u_3^3=(t^2,t^3)$ с соответствующими c и a / и т.д.

Пусть теперь сеть G состоит из вершин s, t и одной дуги $u=(s,t)$, $c(u)=1$, $a(u)=1$. Тогда в G^k число вершин $|V^k|=2k$, число итераций - 2^{k-1} /рис.5/. Первые числа на дугах - пропускные способности, вторые - стоимости.

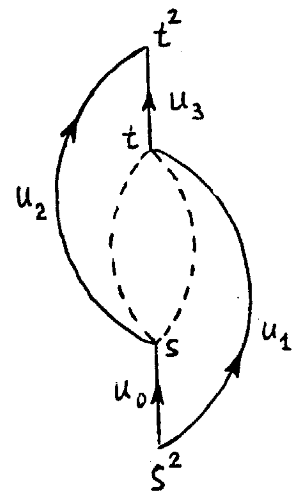


Рис.4.

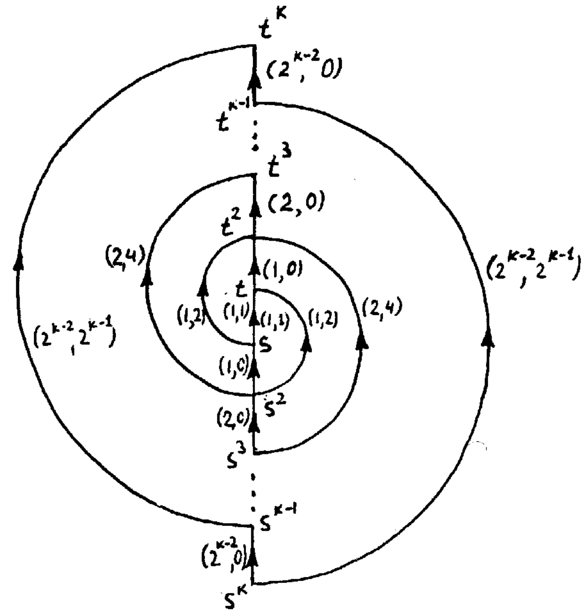


Рис.5.

<u>Обоснование</u>. Пусть в сети G задан поток f. Путь $\bar\xi$ из t в s назовем <u>уменьшающим</u>, если для каждой прямой дуги u' этого пути выполняется $f(u)<c(u)$, а для каждой обратной дуги u'': $f(u'')>0$. Стоимость $a(\bar\xi)$ и пропускная способность $c(\bar\xi)$ определяются как и для увеличивающего пути.

<u>Лемма I</u>. Пусть ξ - увеличивающий путь в G для потока f и $\Delta f(\xi)$ - приращение потока вдоль ξ $(v(\Delta f(\xi))=c(\xi))$. Тогда путь $-\xi$ является уменьшающим для потока $f+\Delta f(\xi)$, $a(-\xi)=-a(\xi)$ и если $-\xi$ не является уменьшающим путем для f, то $c(\xi)$ для f равно $c(-\xi)$ для $f+\Delta f(\xi)$.

Пусть в G проведено i итераций АФФ, найден поток f_i и путь ξ_i имеет стоимость $a(\xi_i)=p$. Из [2], Ш, § 3 следует, что f_i максимизирует линейную форму $pv(f)-\sum_{u\in U}a(u)f(u)$

среди всех потоков $f(u)$. Пусть $\bar{\xi}$ – уменьшающий путь для f_i. Тогда $p v(f_i+\Delta f(\bar{\xi}))-\sum_{u\in U} a(u)(f+f(\bar{\xi})(u)=p v(f)+$
$+p v(\Delta f(\bar{\xi}))-\sum_{u\in U} a(u) f(u)-\sum_{u\in U} a(u)\cdot\Delta f(\bar{\xi})(u)$,
откуда $p v(\Delta f(\bar{\xi}))-\sum_{u\in U} a(u)\cdot\Delta f(\bar{\xi})(u)\leq 0$ **или** $p(-c(\bar{\xi}))-a(\bar{\xi})c(\bar{\xi})\leq 0$, т.е. $a(\bar{\xi})\geqslant -p$. Если $\bar{\xi}=-\xi_i$, то $a(\bar{\xi})=-a(\xi_i)=-p$. Допущение существования еще одного уменьшающего пути $\bar{\bar{\xi}}$ для f_i такого, что $a(\bar{\bar{\xi}})=-p$, ведет к противоречию с предположением I для G. Ввиду также леммы I имеет место

Лемма 2. Для G и f_i уменьшающим путем минимальной стоимости является $-\xi_i$, причем он единствен и $c(-\xi_i)=c(\xi_i)$.

Из леммы 2 следует

Теорема I. В сети G^2 на итерации $N+j$, $j=1,\ldots,N$, увеличивающим путем минимальной стоимости, является ξ^2_{N+j}, причем он единствен. Для сети G^2 верно предположение 2.

2. Рассмотрим транспортную задачу в форме транспортной сети T /см. [3], гл. 8/ с пунктами производства A_i^δ, пунктами потребления B_i^δ, $i=1,\ldots,k$; $\delta=0,1$. Пусть $f_{ij}^{\delta_1\delta_2}$ – объем перевозки из $A_i^{\delta_1}$ в $B_j^{\delta_2}$, $a_{ij}^{\delta_1\delta_2}$ – стоимость перевозки единицы продукта, c_i^δ (d_i^δ) – объем производства в A_i^δ /потребления в B_i^δ /. Требуется минимизировать $\sum\limits_{1\leq i,j\leq k;\,1\leq\delta_1,\delta_2\leq 2} a_{ij}^{\delta_1\delta_2} f_{ij}^{\delta_1\delta_2}$ при условии: $\sum\limits_{\substack{1\leq j\leq k\\ 1\leq\delta_2\leq 2}} f_{ij}^{\delta_1\delta_2}=c_i^{\delta_1}$, $\sum\limits_{\substack{1\leq i\leq k\\ 1\leq\delta_1\leq 2}} f_{ij}^{\delta_1\delta_2}=d_j^{\delta_2}$.

Зададим объемы: $c_1^1=d_1^2=1$, $c_1^2=d_1^1=2$; $c_i^1=d_i^2=1$, $c_i^2=d_i^1=2^{i-2}+1$, $i=2,\ldots,k$, и стоимости: $a_{ii}^{\delta\delta}=0$, $i=1,\ldots,k$, $\delta=1,2$; $a_{ij}^{1\delta}=a_{ji}^{\delta 2}=\infty$, кроме a_{ii}^{11}, a_{ii}^{22}; $a_{ij}^{21}=\begin{cases}2^{i-1}, & i>j\\ 2^{j-1}, & i<j\\ \infty, & i=j>1\end{cases}$ /см. рис. 6, необозначенные дуги имеют "бесконечную" стоимость/.

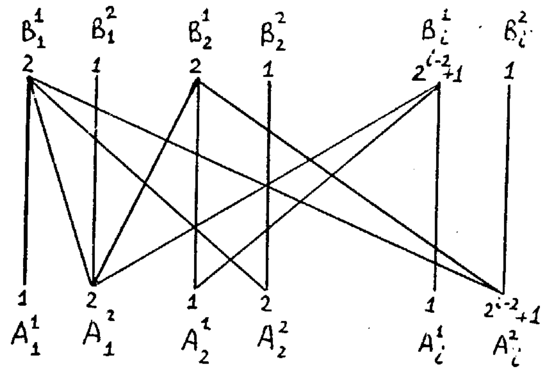


Рис.6.

Применим к задаче T обобщенный венгерский метод /ОВМ/ / [2], III, § I/. Предварительный этап дает $f_{ij}^{\delta_1\delta_2} = \begin{cases} 1, & i=j, \delta_1=\delta_2 \\ 0 \end{cases}$ в ост. случаях.

Каждому "центрально-симметричному" пути ξ в G^k, последовательно проходящему через вершины $s^k = s^{i_1^0}, \ldots, s^{i_1^1}$, $t^{j_1^0}, \ldots, s^{i_e^0}, \ldots, s^{i_e^0}, \ldots, s^{i_e^1}, t^{j_e^0}, \ldots, t^{j_e^1}, \ldots, s^{j_e^1}, \ldots, s^{j_e^0}, t^{i_e^1}, \ldots, t^{i_e^0}, \ldots, s^{j_1^1}, \ldots, s^{j_1^0}, t^{i_1^1}, \ldots, t^{i_1^0} = t^k$, сопоставим /сопряженный/ путь $\hat{\xi}$ в T, проходящий через вершины: $A_{i_1^1}^2, B_{j_1^1}^1, \ldots, A_{i_e^1}^2, B_{j_e^1}^1, \ldots, A_{j_e^1}^2, B_{i_e^1}^1, \ldots, A_{j_1^1}^2, B_{i_1^1}^1$. Очевидно, $a(\xi) = a(\hat{\xi})$.

<u>Теорема 2</u>. Пусть на i-й итерации АФФ в G^k строился увеличивающий путь ξ. Тогда для ОВМ в T на основном этапе i-м по счету увеличивающим путем, сокращающим суммарную невязку задачи, будет сопряженный путь $\hat{\xi}$, причем пропускные способности ξ и $\hat{\xi}$ совпадают.

Из теоремы 2 следует, что для задачи T число итераций ОВМ больше 2^{k-1}. Та же оценка для задачи верна и для тех модификаций ОВМ, которые отличаются только способом нахождения увеличивающего пути /см., например, [3], гл. 5, § 4/.

3. Построим транспортную сеть T', присоединив "фиктивные" пункт производства A_0 и пункт потребления B_0 и задав $a_{0i}^2 = a_{i0}^1 = \infty$, $a_{0i}^1 = a_{i0}^2 = M > 2^k$; $c_0 = d_0 = R > 2^{k-1}$. Применим к T' метод потенциалов /см. [3], гл. 4/, взяв в качестве исходного следующий план: $f_{ii}^{\delta\delta} = 1$, $f_{01}^1 = f_{10}^2 = 1$, $f_{0i}^1 = f_{i0}^2 = 2^{i-2}$, $i = 2, \ldots, k$, $f_{00} = R - 2^{k-1}$.

Число улучшений плана для задачи T' равно 2^{k-1}.

ЛИТЕРАТУРА

I. Klee V., Minty G.J. On maximal number of steps of the Simplex algorithm. Inequalities, v.III, Acad. Press, New York, London, 1972.

2. Форд Л.Р., Фалкерсон Д.Р. Потоки в сетях. М., "Мир", 1966.

3. Гольштейн Е.Г., Юдин Д.Б. Задачи линейного программирования транспортного типа. М., "Наука", 1969.