АКАДЕМИЯ НАУК СССР
НАУЧНЫЙ СОВЕТ ПО КОМПЛЕКСНОЙ ПРОБЛЕМЕ
„КИБЕРНЕТИКА"

ВОПРОСЫ КИБЕРНЕТИКИ

ТРУДЫ СЕМИНАРА ПО КОМБИНАТОРНОЙ МАТЕМАТИКЕ

МОСКВА · 1973

Введение

Настоящий выпуск сборника содержит ряд докладов и сообщений, сделанных на расширенном семинаре по комбинаторной математике, который был проведен 27—29 января 1971 года в Московском государственном университете. В этих работах, относящихся к таким разделам комбинаторной математики, как комбинаторный анализ, теория графов и теория тестов, освещаются следующие вопросы: изучение симметрий графа и определение изоморфизмов графов, задачи перечислительного характера, исследования случайных графов и их характеристик, комбинаторные задачи выбора, изучение комбинаторных планов и их применений, исследование свойств тестов бинарных таблиц и др.

СОДЕРЖАНИЕ

В нашем случае

$$I_r = \binom{n}{r} P\{X_1=1,\dots,X_r=1\} = \binom{n}{r}\left(\sum_{m=2}^{n} p_m \frac{\binom{n-r}{m}}{\binom{n}{m}}\right)^{N_x} =$$

$$= \binom{n}{r}\left(E\left(1-\frac{\xi}{n}\right)^r + O\left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)\right)^{N_x} = \binom{n}{r} e^{-rx}\frac{1+o(1)}{n^r} \to \frac{e^{-rx}}{r!},$$

что и требовалось.

Из леммы 2 следует, что вероятность связности графа $\Gamma(n, \xi, N_x)$ совпадает в пределе с вероятностью отсутствия в нем изолированных вершин, последняя же в силу леммы 3 асимптотически равна $\exp\{-e^{-x}\}$, что и доказывает теорему 1.

Для доказательства теоремы 2 достаточно заметить, что событие $\left\{\nu_n > \frac{u(\varphi(n))\ln n + x}{\varphi(n)}\right\}$ эквивалентно утверждению, что граф $\Gamma\left(n, \xi, \left[\frac{u(\varphi(n))\ln n + x}{\varphi(n)}\right]\right)$ не связан, вероятность чего по теореме 1 в пределе равна $1 - e^{-e^x}$.

В заключение выражаем благодарность В. П. Козыреву за внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа, ч. 1. М., 1963.
2. Erdös P., Renyi A. On the evolution of random graphs. MTA Mat. Kut. Int. Közl., 1960, v. 5, p. 17—61.

ТОЧНАЯ ОЦЕНКА АЛГОРИТМА НАХОЖДЕНИЯ МАКСИМАЛЬНОГО ПОТОКА, ПРИМЕНЕННОГО К ЗАДАЧЕ «О ПРЕДСТАВИТЕЛЯХ»

А. В. КАРЗАНОВ

Как известно, решение задачи «о представителях» сводится к отысканию максимального потока в сети Q специального вида, а именно: имеются вершины A_i, $i=1, \dots, n$, 1-го ранга, которые соответствуют строкам матрицы и соединены входящими дугами с источником S, и имеются вершины 2-го ранга B_j, $j=1, \dots, m$, соответствующие столбцам матрицы и соединенные выходящими дугами со стоком T. Из вершины 1-го ранга в вершину 2-го ранга ведет ориентированная дуга тогда и только тогда, когда на соответствующем месте матрицы стоит единица. Все дуги — единичной пропускной способности.

В случае обобщенной задачи «о представителях» дуги $\vec{SA_i}$, $i=1, \dots, n$, имеют целочисленную пропускную способность a_i и дуги $\vec{B_jT}$ $j=1, \dots, m$, пропускную способность b_j.

Алгоритм отыскания максимального потока дает решение задачи либо указывает максимальную по величине выборку, удовлетворяющую ограничениям a_i и b_j сверху, в случае отсутствия решения.

В настоящей работе будет показано, что алгоритм нахождения максимального потока [1], принадлежащий Е. Диницу, дает для задачи о представителях точную оценку числа действий $Cp\sqrt{\min(n, m)}$, где p — число единиц в матрице; C — общая константа. Старая оценка имеет вид $Cp \min(n, m)$.

Для обобщенной задачи о представителях соответственно получается $Cp\sqrt{N}$, где $N = \sum_1^n a_i = \sum_1^m b_j$. Старая оценка — $Cp(n+m)$ (см. доклад Е. Диница в настоящем сборнике). В случае $N \sim (n+m)^2$ оценки совпадают.

В алгоритме нахождения максимального потока итеративно строятся справочные увеличивающейся длины (т. е. расстояния от S до T). Мы будем рассматривать справочные C_k кратчайших путей из S (а не двухсторонние) и длиной называть также расстояние от S до T.

В справочной находится такой поток, что при вычеркивании соответствующих ему дуг источник и сток становятся несоединимыми. Оценка стандартного метода нахождения такого потока в справочной, как и вообще в любой комбинаторной сети, равна Cp (см. ту же работу Е. Диница), и эта оценка не улучшается.

Оценим число самих справочных в случае обыкновенной задачи о представителях.

Справочная C_0 — сама сеть Q. Пусть к моменту построения справочной C_k уже получен поток величины M_{k-1}. Справочная C_k по алгоритму строится в сети Q_{k-1}, отличающейся от Q тем, что дуги, вошедшие в поток, заменяются на противоположные (при этом дуги вида $\overrightarrow{SA_i}$ и $\overrightarrow{B_jT}$ вообще стираются). Обозначим число таких «обращенных» дуг через $q_k \cdot q_k = M_{k-1}$, так как каждой обращенной дуге $\overrightarrow{A_iB_j}$ соответствует путь SA_iB_iT, включенный в поток (такие пути пересекаются только в S и T).

Назовем слоем O_k^r множество вершин, находящихся на расстоянии r от $S^k (Q_k^0 \equiv S)$.

Пусть в сети Q максимальный поток равен M (M естественно $\leqslant \min(n, m)$).

Рассмотрим дугу l из слоя O_k^{2t} в слой O_k^{2t+1}, где $t=1, \dots, d$ (длина справочной C_k равна $2k+3$). Из соображений четности видно, что l является как раз «обращенной» дугой сети Q_{k-1}. Обозначим число дуг из слоя O_k^r в слой O_k^{r+1} через γ_k^r. Имеем $\sum\limits_{t=1}^{d} \gamma_k^{2t} \leqslant q_k = M_{k-1}$.

С другой стороны, так как по построению справочной следует, что любое ребро из Q_{k-1}, не вошедшее в C_k, концы которого лежат в C_k, не может быть направлено из слоя с меньшим номером в слой с большим, то ребра из O_k^{2t} в O_k^{2t+1} образуют разрез в сети Q_{k-1}. Используя тот факт, что максимальный поток в Q_{k-1} равен $M - M_{k-1}$ и поток не превышает разрез [2], получаем $\gamma_k^{2t} \geqslant M - M_{k-1}$, $t = 1, \ldots, k$.

Отсюда $M_{k-1} \geqslant \sum\limits_{t=1}^{k} \gamma_k^{2t} \geqslant (M - M_k)\cdot k$ и окончательно $k\cdot(M - M_{k-1}) \leqslant M$.

Очевидно $(M - M_{k-1})$ — строго убывающая функция. Пока $k \leqslant \sqrt{M}$, число справочных также $\leqslant \sqrt{M}$. Как только $k > \sqrt{M}$ то $(M - M_{k-1}) < \sqrt{M}$ и таких справочных также $< \sqrt{M}$. Следовательно, всего справочных $\leqslant 2\sqrt{M} \leqslant 2\sqrt{\min(n, m)}$, откуда получается требуемая оценка $Cp\sqrt{\min(n, m)}$.

В случае обобщенной задачи о представителях, если $\bar{N}$ — максимальный поток в Q $(\bar{N} \leqslant N)$ и N_{k-1} — поток, полученный к моменту построения справочной C_k, то получаем аналогичное неравенство $N_{k-1} \geqslant \sum\limits_{1}^{k} \gamma_k^{2t} \geqslant (\bar{N} - N_{k-1})\cdot k$ откуда число справочных $\leqslant 2\sqrt{\bar{N}}$ и оценка числа действий $Cp\sqrt{\bar{N}}$.

Построим пример сети для обыкновенной задачи о представителях, в которой максимальный поток находится за $C\cdot n^{2,5}$ действий (в общем случае строится аналогично).

Начнем с построения $C_1 = Q_1$. Пусть $O_1^0 = S$, $\bar{O}_1^{[\sqrt{n}]+1} = T$, $O_1^2, O_1^3, O_1^4, O_1^5$ содержат по n вершин, слои O_1^1 и $O_1^6, \ldots, O_1^{[\sqrt{n}]}$ — по $\sqrt{n}$ вершин. Пусть вершины слоев O_1^2 и O_1^4 соединены со слоями O_1^3 и O_1^5 соответственно дугами, устанавливающими некоторую взаимную однозначность.

Слои $O_1^0, O_1^1, O_1^3, O_1^5, O_1^{[\sqrt{n}]}$ соединены с соседними сверху слоями всеми возможными дугами (при этом между слоями O_1^3 и O_1^4 будет n^2 дуг).

Остальные слои соединяются с соседними только теми дугами, которые обозначены на рисунке.

Легко убедиться, что существует такая задача о представителях, для которой Q_1 есть наша сеть. В этой сети $C\cdot n$ вершин. В Q_1 максимальный поток равен $[\sqrt{n}]$.

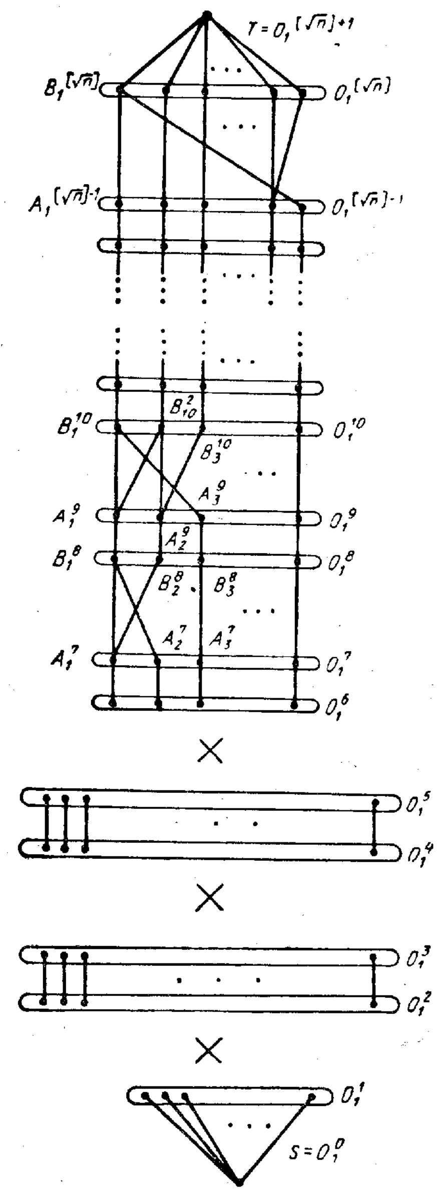

Рис. 1.

Выберем путь $\xi_1 = S \ldots \quad A_1^7 B_1^8 A_1^9 B_1^{10} \ldots A_1^{[\sqrt{n}]-1} B_1^{[\sqrt{n}]} T$. После выбрасывания этого пути S и T станут несоединимыми и мы перейдем к сети Q_2 и справочной C_2 длины $[\sqrt{n}]+3$. В ней возьмем путь $\xi_2 = S \ldots A_2^7 B_1^8 A_1^7 B_2^8 A_2^9 B_2^{10} \ldots A_2^{[\sqrt{n}]-1} B_2^{[\sqrt{n}]} T$, который делает S и T несвязными.

Мы получаем последовательно справочные $C_1, C_2, \ldots, C_{[\sqrt{n}]-1}$ в каждой из которых существует путь, обладающий указанными свойствами.

Отсюда оценка числа действий будет $Cn^2 \sqrt{n} = Cn^{2,5}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Диниц Е. А. Нахождение максимального потока в сети со степенной оценкой. Труды III Зимней школы-симпозиума по программированию в г. Дрогобыче, 1970.
2. Форд Д. Р., Фалкерсон Л. Р. Потоки в сетях. Изд-во «Мир», 1966.

ГРАФЫ С ОДИНАКОВЫМ ЧИСЛОМ ПУТЕЙ ДЛИНЫ ДВА МЕЖДУ СМЕЖНЫМИ И НЕСМЕЖНЫМИ ПАРАМИ ВЕРШИН

А. К. КЕЛЬМАНС

Рассматриваются неориентированные графы без петель и кратных ребер [1]. Граф G называется k, l-графом, если для каждой пары несмежных вершин число путей длины два, их соединяющих, равно k, а для каждой пары смежных вершин число путей длины два, их соединяющих, равно l. Изучению k, l-графов посвящена серия работ (см., например, [2—5]).

Приведем примеры таких графов.

1. Граф $g(sg^l)$, который получается, если все вершины s непересекающихся полных $(l+1)$-вершинных графов соединить с одной новой вершиной, является 1, l-графом при $s \geqslant 2$ и $l \geqslant 1$.

2. Рассмотрим граф $(sg)^r$, множество вершин которого разбито на r множество $A_1, A_2, \ldots, A_r$ по s вершин в каждом и две вершины смежны тогда и только тогда, когда они принадлежат разным множествам. Легко видеть, что это — k, l-граф с $k = s(r-1)$ и $l = s(r-2)$.

3. Рассмотрим граф S_r с вершинами x_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, r$, причем вершины x_{ij} и x_{pq} смежны, если $i = p$, $j \neq q$ или $i \neq p$, $j = q$. Граф S_r является k, l-графом с $k=2$, $l = r-2$.

4. Легко видеть, что любой 0, l-граф представляет собой граф $sg^{l+2} + rg$, который имеет $s+r$ компонент связности, причем каждая компонента есть $(l+2)$-вершинный полный граф или изолиро-