На правах рукописи

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ЦЕНТРАЛЬНЫЙ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

КАРЗАНОВ Александр Викторович

АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ, СВОДЯЩИХСЯ К ПОТОКОВЫМ, И ОЦЕНКИ ИХ ТРУДОЕМКОСТИ

(специальность 01.009 - "Теоретическая кибернетика")

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва - 1973 г.

Работа выполнена в Институте проблем управления (автоматики и телемеханики).

Научный руководитель - кандидат физико-математических наук
Адельсон-Вельский Г.М.

Официальные оппоненты:

- доктор физико-математических наук, профессор Журавлев Ю.И.
- кандидат физико-математических наук Ким К.В.

Ведущее предприятие - отделение математики механико-математического факультета МГУ.

Автореферат разослан "   " __________ 1973 года
Защита диссертации состоится "   " __________ 1973 г.
в "   " часов на заседании Ученого совета Центрального экономико-математического института АН СССР.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института.

Ученый секретарь Совета ЦЭМИ АН СССР
кандидат экономических наук

(Н.В.Махров)

Диссертация посвящена алгоритмам решения ряда задач и исследованию их трудоемкости. Большинство результатов связано с решением одной из наиболее распространенных задач линейного программирования транспортного типа - задачи о максимальном потоке в сети. В рассматриваемых задачах, для которых были известны конечные методы решения, предлагаемые алгоритмы имеют заметно меньшие оценки трудоемкости.

Под оценкой трудоемкости алгоритма понимается ассимптотическая (относительно размерности задачи) оценка сверху числа действий. Алгоритмы, для которых установлена степенная оценка трудоемкости, называются эффективными.

Задача о максимальном потоке, с точки зрения оценок, выделяется среди задач линейного программирования.

Для методов решения общей задачи линейного программирования с m ограничениями существует оценка числа итераций 2^m. Как показали V Klee, G Minty, В.А.Лифшиц, Е.А.Диниц, для основных модификаций прямого симплекс-метода оценка не может быть ниже $2^{c \cdot n}$.

Для решения задач транспортного типа выработано большое число специальных методов. Эти методы, как правило, относительно легко реализуются и довольно быстро сходятся для практически возникающих задач. Однако их сходимость в общем случае была изучена слабо. Для всех известных методов решения транспортной задачи не было доказано оценки, сколько-нибудь лучшей, чем $O(2^{c \cdot \min\{n_1, n_2\}})$, где n_1 - число пунктов производства, n_2 - потребления. Существовало мнение, что эта оценка может быть понижена. Однако автором найдены примеры транспортных задач порядка n, для которых число итераций в распространенных методах: венгерском, методе потенциалов - составляет $2^{c \cdot n}$.

Для задачи о максимальном потоке в сети в последние годы были построены эффективные алгоритмы решения (J Edmonds, R.M. Karp - с оценкой $O(np^2)$, Е.А.Диниц - $O(n^2 p)$. Здесь n - число вершин, p - дуг сети).

Обилие приложений делает актуальным поиск новых, более эффективных методов решения этой задачи, а также установление оценок для сетей специального вида. Этому предмету исследования посвящена значительная часть диссертации.

В диссертации три главы и два приложения.

В главе I предлагается алгоритм решения задачи о максимальном потоке в сети общего вида*), имеющий оценку трудоемкости – $O(n^3)$. Это при $p = O(n^2)$ всего на порядок выше нижней оценки задачи – числа начальных данных $O(n+p) = O(n^2)$.

Рассматривается ориентированная сеть $G = [V(G), U(G)]$, с множеством вершин $V(G), |V(G)| = n$, множеством дуг $U(G), |U(G)| = p$, источником s, стоком t и функцией "пропускной способности дуги" $c(u) > 0,\ u \in U(G)$.

В классическом алгоритме Л.Форда и Д.Фалкерсона (АФФ) решения этой задачи на каждой итерации отыскивается некоторый увеличивающий поток путь (сокращенно, ув.путь), вдоль которого имеющийся поток наращивается на максимально возможную величину. Поиск пути в АФФ требует, вообще говоря, $O(p)$ действий. АФФ конечен для целочисленных сетей, в этом случае число действий ограничено по порядку величиной $p \cdot \bar{c}$, где $\bar{c} = \sum_{u \in U(G)} c(u)$.

Для сетей общего вида АФФ может не давать сходимости к максимальному потоку даже в пределе.

J. Edmonds, R.M. Karp, а также Е.А.Диниц предложили эффективные модификации АФФ, пригодные для сетей общего вида. В них на каждой итерации выбирается не произвольный, а кратчайший (по числу дуг) ув.путь. Доказывается, что длина кратчайшего ув.пути не убывает и что число итераций с путями фиксированной длины не больше p, откуда общее число итераций – $O(np)$.

В алгоритме Е.А.Диница (АД) предложен способ понижения трудоемкости одной итерации с $O(p)$ до $O(n)$ (откуда оценка АД – $O(n^2p)$**)). Это достигается за счет того, что для поиска ув.путей используется единая информационная база – текущая справочная – подсеть, вершины и дуги которой те и т.те, которые принадлежат в данный момент кратчайшим ув.путям.

*) Т.е. с положительными действительными пропускными способностями дуг.

**) Эта оценка точна.

Справочная строится заново только при увеличении длины кратчайшего ув.пути, в остальные же моменты она лишь подправляется. На построение каждой "новой" справочной требуется "всего" $O(p)$ действий, т.е. на все справочные вместе – $O(np)$.

Предлагаемый в гл.I алгоритм нахождения максимального потока в сети (общего вида) методом тупиковых потоков (сокращенно АТП) отличается от упомянутых алгоритмов отказом от использования ув.путей.

АТП состоит из этапов, соответствующих различным длинам кратчайших ув.путей. В начале каждого этапа, аналогично АД, строится справочная S_k (k – длина кратчайшего ув.пути). В отличие от АД справочная строится не как информационная основа быстрого поиска ув.путей, а в качестве подсети сети G для однократного построения т.н. тупикового потока. Поток в справочной S_k называется тупиковым, если он не допускает ув.путей в S_k длины k *). Тупиковый поток используется для наращивания ранее полученного потока в сети G, подобно тому, как это делается для ув.путей в АФФ. Показывается, что в сети G с новым (наращенным) потоком длина кратчайшего ув.пути больше k, откуда число этапов не свыше $n-1$.

Построение тупикового потока производится средствами более крупного масштаба, чем поиск путей, благодаря чему удается понизить среднее число изменений строящейся функции в отдельной дуге и, как следствие этого, понизить число действий на этапе до $O(n^2)$ (вместо $O(np)$ в АД). Тупиковый поток получается в результате построения несбалансированной допустимой функции на дугах справочной, называемой предпотоком и исправления ее до тех пор, пока не будет достигнут потоковый баланс во всех промежуточных вершинах. Окончательная функция будет тупиковым потоком.

Теоретическое обоснование корректности АТП не является в той же степени наглядным, как в упомянутых выше методах решения задачи о максимальном потоке. Указанная в гл.I

*) Заметим, что работа АД с текущей справочной может быть интерпретирована как построение в начальной на этапе справочной тупикового потока частного вида.

реализация АТП тем не менее достаточно проста. Повсеместное использование списочного задания текущей информации, с одной стороны, сводит АТП к итеративному выполнению небольшого числа стереотипных процедур, с другой стороны, полностью исключает элемент "слепого" поиска нужного объекта действия.

Точность оценки $O(n^3)$ для АТП подтверждается экстремальным примером. Приводятся эвристически выгодные способы выполнения отдельных процедур.

Задача о максимальном потоке в сети имеет разнообразные приложения (им, например, посвящена гл.II книги Л.Форда и Д.Фалкерсона "Потоки в сетях"). Многие задачи комбинаторного характера допускают потоковую интерпретацию или решаются при помощи задачи о максимальном потоке.

В главе II диссертации оцениваются трудоемкости алгоритмов со справочными[ж)] (АС) для <u>целочисленных</u> сетей в зависимости от особенностей их конструкции или числовых параметров. Выделяется несколько классов сетей. В эти классы попадают сети, используемые при решении ряда известных задач. Для рассматриваемых классов устанавливаются оценки АС заметно меньшие, чем $O(n^3)$. В результате для упомянутых задач АС оказываются более эффективным средством решения, чем методы, применявшиеся ранее.

Первый класс образуют т.н. <u>простые</u> сети. Каждая вершина такой сети, кроме s и t, имеет не более одной входящей, либо одной исходящей дуги, причем пропускные способности этих дуг равны I. К нахождению максимального потока в простой сети сводятся, например, следующие задачи: а) о представителях множеств Ф.Холла; б) о различных общих представителях 2-х систем множеств; в) о нахождении в графе минимального множества вершин, разделяющего две данные вершины и, как следствие, - о нахождении вершинной связности графа; и др.

Можно показать, что оценка трудоемкости АФФ в случае простых сетей - $O(np)$. Лучшие оценки решения задач а)-в) ранее известны не были. В диссертации доказывается точная

ж) Имеются в виду АД и АТП.

оценка АС для простых сетей - $O(p\sqrt{n})$.

Оценка $O(p\sqrt{n})$ сначала была получена автором для АД в случае задачи "о представителях множеств". В том же году J. Hopcroft и R.M. Karp предложили другой алгоритм решения этой задачи, изложенный на языке паросочетаний в двудольном графе и получили оценку $O(n^{2,5})$.

Второй класс составляют <u>комбинаторные</u> сети. В такой сети все дуги, за исключением инцидентных источнику и стоку, имеют единичные пропускные способности. Примерами комбинаторных сетей могут служить а) сеть обобщенной задачи о представителях (одна из ее формулировок: в ориентированном графе выделить суграф с заданными для каждой вершины значениями локальных степеней входящих и исходящих дуг), б) сети, используемые для решения задач о реберной связности графа, о нахождении основ в графе; и др.

Трудоемкость АФФ для комбинаторных сетей оценивается как $O(p^2)$. Е.А.Диницу принадлежит оценка АД - $O(p^{3/2})$.

В диссертации доказывается оценка трудоемкости АС - $O(pn^{2/3})$.

Из класса комбинаторных сетей выделяется подкласс т.н. <u>однородных</u> сетей. Сеть G называется однородной, если длина любого ориентированного пути из s в t одна и та же и равна ℓ. Такие сети, например, используются для ряда задач о представителях множеств.

Оценка трудоемкости АТП для однородной сети -

- $O(p\cdot \min\{\sqrt{v\ell}, \frac{n^2}{\ell^2}, n^{2/3}\})$, где v - мощность максимального потока $(v < p)$. Так для экстремального случая "коротких" сетей (т.е. $\ell = O(1)$) оценка - $O(p\cdot \min\{\sqrt{v}, n^{2/3}\})$, для "длинных" сетей (т.е. $\ell = O(n)$) оценка - $O(p)$.

В алгоритмах со справочными для рассматриваемых классов сетей по сравнению с сетями общего вида наблюдается снижение как числа действий на этапе, так и самого числа этапов. Число действий на одном этапе для всех классов оценивается как $O(p)$. Более любопытно то, что число этапов АС оказывается по порядку меньшим, чем n. Выясняется, что длина кратчайшего ув.пути и мощность оставшегося потока связаны определенными (специфическими для каждого класса) алгебраическими зависимостями, в результате большая часть мощности потока набирается уже на начальных этапах, и для больших длин справочные сравнительно редки.

Техника оценки трудоемкости АС в случае простых сетей пригодна и для произвольных целочисленных сетей. Обозначим $c_{вх}(x)$ и $c_{исх}(x)$, $x \in V(G)$, суммы пропускных способностей входящих в x и исходящих из x дуг, соответственно, G – целочисленная сеть). Величина $\bar{c}(V) = \sum_{x \in V \setminus \{s,t\}} \bar{c}(x)$, где $\bar{c}(x) = \min\{c_{вх}(x), c_{исх}(x)\}$, называется <u>характеристикой</u> сети G. Доказывается, что трудоемкость АТП оценивается, как $O(\min\{n^2 p + \bar{c}(V)\} \cdot \min\{n, \sqrt{\bar{c}(V)}\})$. Так, например, для обобщенной задачи о представителях $\bar{c}(V) \leq N$, где N – суммарное число "представительств" по всем множествам $(N < p)$, и оценка АТП – $O(p\sqrt{N})$ *). Аналогичная оценка получается и для задачи об общих различных ограниченнчх представителях.

В главе Ш приводится алгоритм решения одной практически важной матричной задачи. В качестве подалгоритма здесь используется решение задачи о представителях множеатв.

Числовая терм-невырожденная**) матрица $\tilde{M}$ размером $n \times n$ называется <u>блочно-треугольной</u>, если она имеет вид

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} M_{11} & & & & \\ M_{21} & M_{22} & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \\ M_{i1} & M_{i2} & \cdots & M_{ii} & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ M_{r1} & M_{r2} & \cdots & M_{ri} & \cdots & M_{rr} \end{pmatrix}$$

*) Таким образом для обобщенной задачи "о представителях имеются 2 оценки – $O(p\sqrt{N})$ и $O(pn^{4/3})$.

**) Матрица называется терм-невырожденной, если для любого подмножества строк α, множество столбцов, каждый из которых содержит ненулевой элемент хотя бы в одной из строк в α, имеет мощность не менее $|\alpha|$, и аналогично для любого подмножества столбцов β.

где M_{ii} – <u>квадратная</u> подматрица, $r \geq 2$. Если к тому же $M_{ij} = 0$, $i \neq j$, $1 \leq i,j \leq r$, то $\tilde{M}$ называется блочно-диагональной. Естественно рассматривать такое представление матрицы $\tilde{M}$, при котором r максимально. Подматрица M_{ii} в таком представлении называется i-м блоком в $\tilde{M}$.

Задача состоит в том, чтобы для произвольной терм-невырожденной матрицы M найти такую пару перестановок – строк (P_1) и столбцов (P_2), чтобы матрица $\tilde{M} = P_1 M P_2$ была блочно-треугольной (блочно-диагональной) с <u>максимальным</u> числом блоков, либо показать, что таких перестановок нет. В последнем случае матрица M называется неприводимой (неразложимой). Блоки в $\tilde{M}$ – самые "мелкие" для всех матриц, получающихся из M при всевозможных перестановках строк и столбцов.

Приведение к блочному виду*) соответствующих матриц может существенно понизить трудоемкость решения таких задач, как а) обращение невырожденной матрицы, б) решение систем алгебраических, логических и некоторых других видов уравнений путем предварительного приведения матрицы явных зависимостей к блочному виду; и др. Если соответствующая матрица разложима, то при практическом решении возможно параллельное использование нескольких решающих устройств.

Особенно целосообразным бывает приведение к блочному виду в практически часто встречающихся случаях слабозаполненных ненулевыми элементами матриц большого размера.

В работах Ф.Харари, Э.Б.Ершова задача решается для класса <u>согласованных</u> перестановок строк и столбцов (т.е. $P_1 = P_2^{-1}$). Решение связано с нахождением бикомпонент (либо компонент связности) некоторого графа.

В главе Ш задача решается при всевозможных перестановках строк и столбцов. Это позволяет часто достичь большего эффекта, чем при согласованных перестановках. Основные этапы в алгоритме: I) решение задачи о представителях множеств, определяемой ненулевыми элементами в M; 2) выделение бикомпонент (компонент связности) некоторого графа

*) Имеется в виду либо блочно-треугольный, либо блочно-диагональный вид.

и построение графа Герца.

Алгоритм распространяется на случай прямоугольных терм-вырожденных матриц (понятие "блочного вида" заменяется более общим понятием). Оценка трудоемкости алгоритма - $O(p\sqrt{n})$, где p - число ненулевых элементов в M.

В приложении I предлагаются алгоритмы решения следующих задач:

I) выделение бикомпонент ориентированного графа и построение графа Герца;

2) выделение циклических компонент неориентированного графа и построение по ним факторграфа.

Оба алгоритма схожи, оценка трудоемкости каждого -$O(p)$, где p - число дуг, что совпадает с нижними оценками в этих задачах.

Решение первой задачи применяется в алгоритме гл.Ш (оценка трудоемкости $O(p\sqrt{n})$ тем самым обоснована). Она встречается и во многих других приложениях.

В основе обоих алгоритмов лежит обход графа - маршрут, проходящий через все вершины и дуги (ребра). В процессе обхода распознаются все дуги (ребра), не принадлежащие циклам.

В Приложении П рассматривается задача о максимальном потоке минимальной стоимости в сети. Алгоритм Л.Форда и Д.Фалкерсона решения этой задачи состоит в наращивании на каждой итерации имеющегося потока вдоль ув.пути минимальной удельной стоимости. При наличии нескольких подходящих ув. путей выбор очередного ув.пути произволен.

В Приложении П приводится пример целочисленной сети с $2k$ вершинами и $4k - 3$ дугами, для которой число итераций алгоритма Л.Форда и Д.Фалкерсона равно 2^{k-1}, причем на каждой итерации существует единственный ув.путь минимальной удельной стоимости. На базе этого примера можно построить примеры транспортных задач, для которых венгерский метод и метод потенциалов имеют экспоненциальную (от размерности задачи) трудоемкость.

Основные результаты диссертации докладывались на 3-ей зимней школе по математическому программированию и смежным вопросам (г.Дрогобыч, 1970 г.); на I и П Всесоюзных семинарах по комбинаторной математике (г.Москва, 1971 г., 1973г); на XIX конференции молодых ученых ИПУ АН СССР.

Результаты опубликованы в следующих работах.

I. Экономный алгоритм нахождения бикомпонент графа. Сб. "Труды третьей зимней школы по математическому программированию и смежным вопросам", вып.П, М., 1970.
2. Точная оценка алгоритма нахождения максимального потока, примененного к задаче о "представителях". Сб. "Вопросы кибернетики" (Труды семинара по комбинаторной математике), М., "Советское радио", 1973.
3. О нахождении максимального потока в сетях специального вида и некоторых приложениях. Сб. "Математические вопросы управления производством", вып.5, М., МГУ, 1973.

Заказ № I53 А-09750 II/XII-73г. Объем 0,8п.л. Тираж I70экз.

Ротапринт ЦЭМИ АН СССР.