

# Системы разделенных множеств и их геометрические модели \*

В.И. Данилов (ЦЭМИ РАН, email: danilov@cemi.rssi.ru)

А.В. Карзанов (ИСА РАН, email: sasha@cs.isa.ru)

Г.А. Кошевой (ЦЭМИ РАН, email: koshevoy@cemi.rssi.ru)

## Аннотация

В работе рассказывается о сильно и слабо разделенных системах множеств, а также о ромбических тайлингах и проволочных диаграммах, которые служат средством порождения таких систем. В частности, доказываются гипотезы Леклерка и Зелевинского относительно слабо разделенных систем.

Библиография: 58 названий.

## Содержание

### Введение

#### Глава 1. Стандартный Плюккеров базис

- 1.1. Плюккерovy функции и базисы
- 1.2. Стандартный базис
- 1.3. Поточковая модель
- 1.4. Доказательство сюръективности
- 1.5. Феномен Лорана
- 1.6. Комбинаторная лемма

#### Глава 2. Ромбические тайлинги

- 2.1. Флипы и базисы
- 2.2. Ромбические тайлинги
- 2.3. Ромбические тайлинги и строгие базисы
- 2.4. Сильная разделенность и ромбические тайлинги
- 2.5. Теорема о сильной разделенности
- 2.6. Перестановки и ромбические тайлинги
- 2.7. Строгие вайринги

#### Глава 3. Вайринги

- 3.1. Проволочные диаграммы
- 3.2. Вайринги
- 3.3. Геометрические флипы и редукция вайрингов
- 3.4. Элементарные свойства вайрингов
- 3.5. Структура нециклических камер
- 3.6. Редукция и анти-редукция вайрингов
- 3.7. Обобщенные ромбические тайлинги

---

\*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ-НЦНИЛ 10-01-93111.

## Глава 4. Гипотеза Леклерка-Зелевинского

- 4.1. Слабая разделенность
- 4.2. Отношение  $\preceq$
- 4.3. Доказательство теоремы 4.2
- 4.4. Оргграф  $\Gamma(W)$
- 4.5. Существование флипов
- 4.6. Доказательство теоремы 4.1
- 4.7. Доказательство теоремы 4.5

## Глава 5. Обобщения

- 5.1.  $(\sigma, \tau)$ -вайринги
- 5.2. Композиция вайрингов
- 5.3. Плюккерovy функции на идеалах и ящиках
- 5.4. Усеченные идеалы и грассмановы системы

## Глава 6. Применения

- 6.1. Слабый порядок Брюа
- 6.2. Парадокс голосования
- 6.3. Тотально положительные матрицы
- 6.4. Кристаллы

## Литература

# Введение

В работе рассказывается о сильно и слабо разделенных системах множеств, введенных Леклерком и Зелевинским в [44]. Прежде чем объяснять, что это такое, введем некоторые обозначения, которые будем использовать на протяжении всей статьи.

Для натурального числа  $n$  символ  $[n]$  обозначает множество  $\{1, \dots, n\}$ , упорядоченное естественным способом ( $1 < 2 < \dots < n$ ) (или любое линейно упорядоченное множество из  $n$  элементов). Элементы  $[n]$  обозначаются строчными буквами типа  $i, j, k$  (и для выразительности называются цветами). Подмножества в  $[n]$  (то есть элементы  $2^{[n]}$ ) обычно обозначаются заглавными буквами типа  $A, B, X$ . Подмножества в  $2^{[n]}$  называются *системами множеств* в  $[n]$  и обозначаются рукописными буквами  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{X}$  и т.п..

Наличие естественного порядка на множестве  $[n]$  позволяет сравнивать подмножества в  $[n]$  не только теоретико-множественно, но и используя этот порядок. Есть два интересных способа сделать это. При первом способе мы пишем  $A \leq B$ , если существует инъективное отображение  $\varphi : B \rightarrow A$ , при котором  $\varphi(b) \leq b$  для любого  $b \in B$ . Такое отношение  $\leq$  называется *стохастическим доминированием*; оно ведет к полустандартным таблицам Юнга и сильному порядку Брюа (см. очерк [43] и наш раздел 6.1). Мы будем больше иметь дело со вторым способом, инициированным Леклерком и Зелевинским (и менее известным, несмотря на свою естественность). Мы пишем  $A \ll B$ , если  $a < b$  для любых  $a \in A - B$  и  $b \in B - A$ . Отношение  $\ll$ , в отличие от  $\leq$ , уже не является транзитивным. Тем не менее оно позволяет построить два интересных симметричных рефлексивных отношения на булевом кубе  $2^{[n]}$ .

Первое (оно называется *сильной разделенностью* и обозначается  $\textcircled{S}$ ) означает просто сравнимость по отношению  $\ll$ :  $A \textcircled{S} B$ , если  $A \ll B$  или  $B \ll A$ . Система множеств  $\mathcal{X} \subset 2^{[n]}$  называется *сильно разделенной*, если любые два элемента в ней сильно разделены. Так как подсистема сильно разделенной системы снова сильно разделена, главный интерес представляют максимальные по включению сильно разделенные системы.

Примером такой системы является система  $Int$  всех интервалов в  $[n]$ . Легко понять, что имеется  $n(n+1)/2 + 1$  интервал (включая пустой).

**Теорема S1.** *Любая максимальная сильно разделенная система имеет такое же число элементов.*

Эту теорему можно понимать как утверждение о чистоте графа  $(2^{[n]}, \textcircled{S})$ : все клики в нем имеют один и тот же размер.

От одной клики к другой можно переходить с помощью т.н. *строгих флипов*. А именно, представим, что для некоторого  $X \subset [n]$  и трех элементов  $i < j < k$  вне  $X$  семь множеств  $X, Xi, Xj, Xk, Xij, Xjk$  и  $Xijk$  принадлежат одной клике  $\mathcal{C}$ . (Здесь и далее мы для краткости пишем  $Xi\dots k$  и т.п. вместо  $X \cup \{i\dots k\}$ .) Уберем из  $\mathcal{C}$  множество  $Xj$  и добавим вместо него  $Xik$ , то есть образуем новую систему  $\mathcal{C}' = \mathcal{C} \cup \{Xik\} - \{Xj\}$ . Оказывается, что  $\mathcal{C}'$  тоже будет кликой. Такая операция перехода от  $\mathcal{C}$  к  $\mathcal{C}'$  называется (повышающим) строгим флипом. Если проводить стрелки от  $\mathcal{C}$  к  $\mathcal{C}'$ , мы снабжаем множество  $\mathbf{S}$  клик графа  $(2^{[n]}, \textcircled{S})$  структурой ориентированного графа. Легко понять, что этот орграф ацикличен, что позволяет рассматривать  $\mathbf{S}$  как частично упорядоченное множество (посет).

**Теорема S2.** *Клика  $Int$  интервалов является единственным минимальным элементом этого посета  $\mathbf{S}$ .*

Иначе говоря, любая клика соединяется с  $Int$  серией понижающих флипов. Посет  $\mathbf{S}$  обладает и единственным максимальным элементом. Для  $n = 2, 3, 4, 5$  (и только для таких  $n$ ) этот посет является решеткой.

Эти и другие факты про сильную разделенность наиболее простым способом получаются с помощью специальных плоских картинок, называемых ромбическими тайлингами. Рассмотрим центрально симметричный выпуклый  $2n$ -угольник  $Z_n$  (зоногон) на плоскости со сторонами единичной длины. *Ромбическим тайлингом* (или паркетом) называется ‘правильное’ разбиение  $Z_n$  на ромбы со сторонами единичной длины. (Такие объекты широко используются как в комбинаторной геометрии, так и в физике при изучении квази-кристаллов.) С каждым тайлингом  $T$  можно связать некоторую систему множеств  $Sp(T)$  в  $[n]$ .

**Теорема S3.** *Система множеств  $Sp(T)$  является элементом  $\mathbf{S}$ ; обратно, каждый элемент из  $\mathbf{S}$  имеет такой вид для некоторого (единственного) тайлинга  $T$ .*

Этот результат, установленный Леклерком и Зелевинским (они, правда, работали с дуальными объектами, с проволочными диаграммами), позволяет использовать при изучении сильно разделенных систем технику работы с плоскими фигурами. В частности, для тайлингов давно была известна операция флипа (когда три ромба, образующие шестиугольник, располагаются в другом порядке). И еще в 1993 г. Кенион [39] показал, что любые тайлинги связываются цепочкой флипов. Это основа теоремы S2. Теорема S1 следует из того простого факта, что число ромбов в любом тайлинге одно и то же.

Однако Леклерк и Зелевинский, занимаясь задачей о квази-коммутировании квантовых миноров, ввели в рассмотрение и другое, более сильное отношение  $\textcircled{W}$  на  $2^{[n]}$ , которое называли слабой разделенностью. Множества  $A$  и  $B$  *слабо разделены*, если нестрогое меньшее по размеру множество (например,  $A$ ) можно разбить на две (возможно пустые) части  $A'$  и  $A''$  так, что  $A' \ll B \ll A''$ . Снова можно образовать граф  $(2^{[n]}, \textcircled{W})$  и

рассматривать клики (или максимальные слабо разделенные системы) в нем. Оказывается, получаемая теория почти полностью параллельна случаю сильной разделенности. Снова имеет место утверждение о чистоте графа  $(2^{[n]}, \mathbb{W})$ :

**Теорема W1.** *Любая клика графа  $(2^{[n]}, \mathbb{W})$  имеет размер  $n(n+1)/2 + 1$ .*

Как и ранее, клики можно перестраивать с помощью т.н. *слабых флипов*  $X_j \rightsquigarrow X_{ik}$ , происходящих теперь уже в присутствии четырех ‘свидетелей’  $X_i, X_k, X_{ij}, X_{jk}$ .

**Теорема W2.** *Множество  $\mathbf{W}$  таких клик (то есть максимальных слабо разделенных систем множеств) является посетом с единственным минимальным элементом - той же самой системой интервалов  $Int$ .*

Эти две теоремы были высказаны как гипотезы в [44] и доказываются в настоящей работе (см. также [17, 18]). Как и в строгом случае, основу их доказательства составляет связь слабой разделенности с некоторыми плоскими проволочными диаграммами, называемыми далее *вайрингами*. Снова с каждым вайрингом  $W$  можно связать систему множеств  $Sp(W)$  в  $[n]$ . Центральным утверждением настоящей работы (см. также [18]) является

**Теорема W3.** *Для любого вайринга  $W$  система  $Sp(W)$  является элементом  $\mathbf{W}$ ; обратно, каждый элемент из  $\mathbf{W}$  имеет вид  $Sp(W)$  для некоторого (единственного с точностью до изотопии) вайринга  $W$ .*

Флипы (сильные или слабые) наводят на мысль использовать их для распространения функций на булевом кубе  $2^{[n]}$ . Пусть  $\mathcal{X}$  - некоторая клика в графе  $(2^{[n]}, \mathbb{W})$ . И пусть каждой вершине  $S$  из  $\mathcal{X}$  сопоставлен некий символ  $x_S$  (например, из некоторого кольца). Представим, что имеется некоторое правило (например, алгебраическое соотношение), которое позволяет по этим данным определить новый символ  $x_Y$ , когда  $Y$  получается с помощью некоторого флипа (например, флипа  $X_j \rightsquigarrow Y = X_{ik}$  в присутствии свидетелей  $X_i, X_k, X_{ij}, X_{jk}$ ). Тогда мы могли бы попытаться распространить эти символы с  $\mathcal{X}$  на весь куб  $2^{[n]}$ . Получится это или нет - зависит в первую очередь от правила пересчета, потому что в одну и ту же вершину  $X \subset [n]$  мы можем прийти разными цепочками флипов. (Можно поступить как в кластерах - совсем не заботиться о том, куда мы придем. Несомненно, все это связано с кластерными алгебрами, но подробно говорить об этом не входит в наши планы.) Например, правило Плюккера для пересчета флаговых миноров работает хорошо. Но можно взглянуть на эту задачу с другой стороны.

Можно сразу считать, что числа  $x_S$  заданы для любого  $S \subset [n]$  и удовлетворяют соотношениям Плюккерского типа. Пусть даны множество  $X \subset [n]$  и три цвета  $i < j < k$  не из  $X$ . *Тропическим соотношением Плюккера* называется соотношение вида

$$f(X_{ik}) + f(X_j) = \max(f(X_{ij}) + f(X_k), f(X_{jk}) + f(X_i)).$$

*алгебраическим* –

$$\Delta_{X_{ik}} \Delta_{X_j} = \Delta_{X_{ij}} \Delta_{X_k} + \Delta_{X_{jk}} \Delta_{X_i}.$$

В алгебраическом случае это действительно одно из соотношений Плюккера для миноров матрицы (или для координат флага подпространств; подробнее см. [27]). Тропический вариант – это тропикализация алгебраического соотношения.

Теперь нам не нужно ничего пропагировать, но возникает вопрос – а как задавать такие функции? Замечательный факт состоит в том, что если  $\mathcal{X}$  - система из  $\mathbf{W}$ , то

Плюккерова функция определяется своими значениями на  $\mathcal{X}$ . Более того, эти значения на  $\mathcal{X}$  можно задавать произвольно и затем проагировать в остальные точки куба, пользуясь указанной выше многомерной октаэдральной рекурсией. (Вариант с кубической рекурсией рассмотрен в [31].) Иначе говоря, системы из  $\mathbf{W}$  можно рассматривать как базисы для Плюккерových функций (аналогично базисам векторных пространств и линейных отображений между ними).

Стоит сказать, что область применения указанных выше понятий и конструкций не ограничивается булевым кубом (и подмножествами в  $[n]$ ). Без особых изменений все переносится на случай ящика (так называется произведение  $\times_{i \in [n]} I_i$ , где  $I_i$  – интервалы (конечные или бесконечные) в  $\mathbb{Z}$ ), а также на усеченные ящики. Важным примером последнего служит гиперсимплекс  $\binom{[n]}{k}$ , состоящий из  $k$ -элементных подмножеств в  $[n]$ . Если постановки с булевым кубом имеют отношение к многообразию полных флагов, то постановки с гиперсимплексом – к многообразию Грассмана. Плюккерovy функции на таких множествах встречаются во многих задачах (см. [21, 24, 30, 53, 54]).

Кратко о расположении материала. В первой главе вводится понятие Плюккеровой функции и  $\Pi$ -базиса. Основное содержание уделяется доказательству того, что система интервалов  $Int$  образует  $\Pi$ -базис. Здесь используется т.н. потоковая модель, позволяющая строить все Плюккерovy функции. Ключевое место – комбинаторная лемма о перестройке потоков, заменяющая в определенном смысле теорему Линдстрема.

Вторая глава посвящена ромбическим тайлингам, с помощью которых строятся (тоже все) сильно разделенные системы. Для построения слабо разделенных систем мы переходим на дуальный язык специальных проволочных диаграмм, т.н. вайрингов. Изложение теории вайрингов занимает главу 3. Четвертая (и самая сложная) глава посвящена доказательству гипотез Леклерка и Зелевинского (см. также [17, 18], где даны альтернативные доказательства, использующие технику обобщенных ромбических тайлингов).

В главе 5 обсуждаются обобщения предыдущих понятий и результатов на случай, когда булев куб заменяется более общим ящиком или даже усеченным ящиком. Здесь же приводятся применения к грассманиану и доказываются гипотезы Скотта [55]. Но главное обобщение относится к тому случаю, когда естественное упорядочение множества  $[n]$  (обозначаемое  $id$ ) и противоположное упорядочение (обозначаемое  $di$ ) заменяются парой перестановок общего вида.

В последней главе 6 мы уже более эскизно рассказываем о некоторых применениях полученных результатов. О представлении слабого порядка Брюа ромбическими тайлингами. О применении ромбических тайлингов к построению областей Кондорсе, встречающихся в задачах голосования. О порождении тотально положительных матриц и тестировании тотальной положительности. Наконец, о реализации кристаллов с помощью целочисленных тропических Плюккерových функций.

## 1 Стандартный Плюккеров базис

### 1.1 Плюккерovy функции и базисы

*Полукольцом* называется множество  $R$  с двумя коммутативными ассоциативными операциями  $\oplus$  и  $\odot$ , связанными дистрибутивным законом:  $a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c)$ . Три следующие примера полуколец основные для нас.

**Пример 1.** Любое коммутативное кольцо.

**Пример 2.** Множество  $\mathbb{R}_{>0}$  строго положительных чисел с обычными сложением и умножением.

**Пример 3.**  $\mathbb{R}$  или  $\mathbb{Z}$  с операциями  $\oplus = \max$  и  $\odot = +$  (тропические полукольца  $\mathbb{R}_{\max}$  и  $\mathbb{Z}_{\max}$ ).

**Определение.** Отображение  $f$  булева куба  $2^{[n]}$  в полукольцо  $R$  называется *Плюккеровой функцией*, если для любого  $X \subset [n]$  и  $i < j < k$  из  $[n] - X$  выполняется (короткое, или специальное) соотношение Плюккера ПЗ

$$f(Xj) \odot f(Xik) = (f(Xi) \odot f(Xjk)) \oplus (f(Xk) \odot f(Xij)). \quad (1.1)$$

Множество Плюккерových функций обозначается  $\mathcal{P}_n(R)$  (в [7] примерно это называется многообразием Люстига).

**Пример 4.** Пусть  $A$  – некоторая  $n \times n$ -матрица с коэффициентами из коммутативного кольца. Для  $I \subset [n]$  обозначим через  $\Delta_I$  минор этой матрицы, образованный первыми  $|I|$  строками и столбцами с номерами из  $I$ . Классические соотношения Плюккера (см. [27]) дают, в частности, что  $I \mapsto \Delta_I$  является (алгебраической) Плюккеровой функцией. Этот пример оправдывает терминологию.

**Пример 5.** В случае тропического полукольца  $\mathbb{R}_{\max}$  мы получаем т.н. *тропические Плюккерovy* (ТП) функции (см. [16]), удовлетворяющие соотношениям

$$f(Xj) + f(Xik) = \max(f(Xi) + f(Xjk), f(Xk) + f(Xij)). \quad (1.2)$$

По большей части, говоря о Плюккерových функциях, мы будем иметь в виду ТП-функции; обобщения на общий случай делаются бесхитростно.

**Пример 6** – *квазисепарабельные функции*. Выделим цвет  $i$  и два элемента  $a$  и  $b$  из полукольца  $R$ . Зададим функцию  $f$  правилом:

$$f(X) = \begin{cases} a, & \text{если } X \text{ не содержит } i, \\ b, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Очевидно, что это Плюккерова функция. Плюккеровой будет также любая функция, зависящая только от размера  $|X|$  множества  $X$ . Как легко понять, произведение (в смысле  $\odot$ ) любой П-функции на приведенные выше функции остается П-функцией. В тропическом случае это приводит к квази-сепарабельным функциям, образующим  $2n$ -мерный линеал конического полиэдрального комплекса  $\mathcal{P}_n(\mathbb{R}_{\max})$ .

**Замечание.** Назовем П4-соотношением равенство

$$f(Xik) \odot f(Xjl) = (f(Xij) \odot f(Xkl)) \oplus (f(Xjk) \odot f(Xil)), \quad (1.3)$$

где  $i < j < k < l$  взяты вне  $X$ . Можно было бы включить выполнение П4-соотношений в определение П-функции. Но это ничего не изменило бы, потому что (см. [16, Предложение 1]) они являются следствиями ПЗ-соотношений.

Рассмотрим простейший случай  $n = 3$ . Здесь имеется одно ПЗ-соотношение, выражающее  $f(2) \odot f(13)$  через значение  $f$  в остальных точках куба  $2^{[3]}$ . *Всюду далее мы*

будем предполагать, что операция  $\odot$  обратима, то есть что  $R$  с операцией  $\odot$  является (абелевой) группой. Это так в примерах 2 и 3, но не в примере 1. В этом случае мы можем произвольно задать значения  $f$  во всех точках куба, кроме 13, и найти  $f(13)$  с помощью ПЗ-соотношения. Оказывается, что при любом  $n$  имеются ‘малые’ системы множеств  $\mathcal{B}$ , в которых можно свободно задавать значения П-функций и которые однозначно определяют значения во всех остальных точках куба  $2^{[n]}$ .

**Определение.** Система множеств  $\mathcal{B} \subset 2^{[n]}$  называется *П-базисом* (или просто *базисом*), если отображение ограничения  $\mathcal{P}_n(R) \rightarrow R^{\mathcal{B}}$  является биекцией.

Мы увидим далее, что любая максимальная слабо разделенная система (то есть система из  $\mathbf{W}$ ) является П-базисом. Но пока перед нами стоит более скромная цель – проверить, что система  $Int$  интервалов является П-базисом.

## 1.2 Стандартный базис

Напомним, что *интервалом* в  $[n]$  считается подмножество  $I \subset [n]$ , которое с каждыми двумя точками содержит и все промежуточные, т.е., подмножество вида  $\{i, i+1, \dots, j-1, j\}$ ; для такого интервала мы будем также применять обозначение  $[i..j]$ . Пустое множество  $\emptyset$  также считается интервалом. Множество (систему) всех интервалов обозначим  $Int = Int_n$ ; оно содержит  $\frac{n(n+1)}{2} + 1$  элементов (1 элемент за счет пустого интервала), что гораздо меньше, чем общее число  $2^n$  подмножеств в  $[n]$ .

**Теорема 1.1** *Предположим, что  $R$  – полукольцо с делением. Тогда система  $Int$  образует П-базис (называемый стандартным базисом).*

Мы проверим сейчас, что отображение ограничения  $\mathcal{P}_n(R) \rightarrow R^{Int}$  инъективно; сюръективность будет установлена в следующих двух разделах.

Пусть  $S$  – произвольное подмножество в  $[n]$ . Мы хотим показать, что значение П-функции в точке  $S \in 2^{[n]}$  выражается (с помощью ПЗ-соотношений) через значения в более ‘простых’ точках и, в конечном счете, через значения на интервалах. Выделим в  $S$  два крайних элемента:  $i = \min S$  и  $k = \max S$ , и обозначим через  $I$  интервал  $[i..k]$ , содержащий  $S$ . Пусть  $S$  не является интервалом. Тогда существует цвет  $j \in I - S$ ; очевидно,  $i < j < k$ .

Положим  $X = S - \{i, k\}$ . Тогда  $S = Xik$ , и  $f(S)$  выражается через значения  $f$  в точках  $Xj$ ,  $Xij$ ,  $Xk$ ,  $Xjk$  и  $Xi$ . А эти точки устроены проще, чем  $S$ , в том смысле, что расстояние от максимума до минимума у них меньше, чем у  $S$ . По индукции эти значения выражаются через значения  $f$  в интервалах. Инъективность доказана.

Из доказательства инъективности видно, что произвольные значения  $f$ , заданные на интервалах, можно продолжить на весь куб. Неясно, однако, почему продолжение не зависит от способа продолжения. Можно фиксировать способ продолжения, но тогда неясно, почему продолженная функция удовлетворяет соотношениям Плюккера.

Для доказательства сюръективности используется другая стратегия. Мы сначала предъявим некий метод построения П-функций, так называемую *потокковую модель*. После этого уже сравнительно несложно показать, что потокковая модель генерирует П-функцию по любым ‘начальным данным’ на стандартном базисе  $Int_n$ .

### 1.3 Потокосая модель

Обозначим через  $\Gamma = \Gamma_n$  плоский орграф (ориентированный граф)  $(V, E)$  с множеством вершин  $V(\Gamma)$ , образованным точками  $(p, q)$  на плоскости, где  $p, q \in [n]$  и  $q \leq p$ , и множеством ребер-стрелок  $E(\Gamma)$ , идущих вертикально вверх или справа-налево, как показано на рисунке 1 для случая  $n = 5$ .

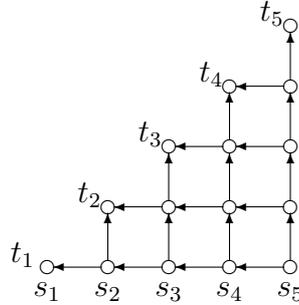


Рис. 1

Вершины вида  $s_p = (p, 1)$ ,  $p = 1, \dots, n$ , называются *источниками*, вершины  $t_p = (p, p)$  называются *стоками*. Под (ориентированным) *путем* в  $\Gamma$  понимается последовательность вершин и ребер  $(v_0, e_1, v_1, \dots, e_r, v_r)$ , где каждое  $e_i$  – ребро, идущее из вершины  $v_{i-1}$  в вершину  $v_i$ .

**Определение.** (Допустимым) *потокосом* назовем набор  $F = (P_1, \dots, P_k)$  вершинно непересекающихся путей в  $\Gamma$ , где каждый путь  $P_i$  начинается в некотором источнике и заканчивается в стоке  $t_i$ .

Зафиксируем теперь некоторое полукольцо  $(R, \oplus, \odot)$  (мы не предполагаем здесь, что операция  $\odot$  обратима). *Весовой функцией* на графе  $\Gamma$  называется отображение  $w : V(\Gamma) \rightarrow R$ . *Вес*  $w(P)$  пути  $P = (v_1, \dots, v_r)$  определяется как “произведение” весов вершин этого пути,  $w(P) = w(v_1) \odot \dots \odot w(v_r)$ . *Вес* потока  $F$ ,  $w(F)$ , определяется как “произведение” весов составляющих его путей. Наконец, для подмножества  $S \subset [n]$  положим

$$f_w(S) = \oplus_F w(F), \quad (1.4)$$

где  $F$  пробегает множество  $\mathcal{F}(S)$  допустимых потоков, начинающихся в  $S$  (более точно, начинающихся в источниках  $s_p$ ,  $p \in S$ ) и кончающихся в стоках  $t_1, \dots, t_{|S|}$ .

**Теорема 1.2** *Для любой весовой функции  $w : V(\Gamma) \rightarrow R$  функция  $f_w$ , заданная формулой (1.4), является П-функцией.*

Это утверждение является частным случаем теоремы 2.6.4 из [7], однако приводимое там рассуждение довольно окольное. Мы приведем более прямое доказательство, основанное на перекомбинировании потоков.

Прежде всего слегка преобразуем орграф  $\Gamma$ . Для этого расцепим каждую вершину  $v$  на две вершины  $v'$  и  $v''$ , связанные *особым* ребром  $e_v$ , идущим из  $v'$  в  $v''$ . Каждое старое ребро  $(u, v)$  превращается в новое ребро  $(u'', v')$ . Получается новый орграф  $\tilde{\Gamma}$ ; источниками в нем считаются вершины  $s'_i$ , стоками –  $t''_j$ . Каждый путь в  $\Gamma$  из  $s_i$  в  $t_j$  очевидным способом превращается в путь в  $\tilde{\Gamma}$  из  $s'_i$  в  $t''_j$ , так что потоки в  $\Gamma$  и  $\tilde{\Gamma}$  – это фактически одно и то же. Весовая функция на  $\Gamma$  естественно превращается в веса

стрелок графа  $\tilde{\Gamma}$ . Вес особых ребер  $e_v$  полагается равным  $w(v)$ , веса остальных ребер полагаются равными мультипликативной единице в полукольце  $R$ .

Поток  $F$  (в  $\tilde{\Gamma}$ ) будем понимать также как характеристическую функцию составляющих его ребер. Зафиксируем теперь множество  $X \subset [n]$  и  $i < j < k$  не из  $X$ . *Спаренным потоком типа  $(i|jk)$*  назовем функцию  $\pi : E(\tilde{\Gamma}) \rightarrow \{0, 1, 2\}$  на ребрах графа  $\tilde{\Gamma}$ , представимую в виде суммы  $F + F'$  некоторого потока  $F$  из  $Xi$  и некоторого потока  $F'$  из  $Xjk$ . Спаренный поток  $\pi$  типа  $(i|jk)$  может многими способами представляться в виде суммы  $F + F'$ . Число таких разложений обозначим  $N_\pi(i|jk)$ . Аналогично понимаются спаренные потоки типов  $(j|ik)$  и  $(k|ij)$  и числа  $N_\pi(j|ik)$  и  $N_\pi(k|ij)$ .

**Лемма 1.3**  $N_\pi(j|ik) = N_\pi(i|jk) + N_\pi(k|ij)$ .

Мы докажем эту лемму в разделе 1.6, а пока выведем с ее помощью теорему. То есть проверим ПЗ-соотношение (при данных  $X$  и  $i < j < k$ ) для функции  $f_w$ . Оно получается с помощью следующей выкладки:

$$\begin{aligned} f_w(Xj) \odot f_w(Xik) &= \left( \bigoplus_{F \in \mathcal{F}(Xj)} w(F) \right) \odot \left( \bigoplus_{F' \in \mathcal{F}(Xik)} w(F') \right) = \bigoplus_{\pi} N_\pi(j|ik) w(\pi) \\ &= \bigoplus_{\pi} [N_\pi(i|jk) + N_\pi(k|ij)] w(\pi) \\ &= \left( \left( \bigoplus_{F \in \mathcal{F}(Xi)} w(F) \right) \odot \left( \bigoplus_{F' \in \mathcal{F}(Xjk)} w(F') \right) \right) \oplus \left( \left( \bigoplus_{F \in \mathcal{F}(Xk)} w(F) \right) \odot \left( \bigoplus_{F' \in \mathcal{F}(Xij)} w(F') \right) \right) \\ &= (f_w(Xi) \odot f_w(Xjk)) \oplus (f_w(Xk) \odot f_w(Xij)), \end{aligned}$$

где  $\pi$  пробегает спаренные потоки любого типа, а  $w(\pi) = \odot_{e \in E(\tilde{\Gamma})} w(e)^{\odot \pi(e)}$ .  $\square$

## 1.4 Доказательство сюръективности

Выше мы показали, что потоковая модель порождает П-функции. Предполагая снова, что умножение  $\odot$  обратимо, покажем, что она генерирует все П-функции. Точнее, функции, равные 1 в  $\emptyset$  (этого достаточно для доказательства сюръективности).

Итак, пусть на множестве  $Int$  интервалов задана функция  $f_0$  со значениями в полуполе  $R$  (равная 1 на пустом интервале). Покажем, что она продолжается до П-функции на весь куб  $2^{[n]}$ . Это продолжение мы будем строить с помощью потоковой модели. Нужно только правильно подобрать весовую функцию  $w$ , чтобы генерируемая функция  $f_w$  совпадала с  $f_0$  на всех (непустых) интервалах.

Заметим, что для интервала  $I = [a..b]$  существует единственный допустимый поток, выходящий из  $I$ ; он покрывает все вершины  $\Gamma$ , попадающие в прямоугольник  $[b] \times [b - a + 1]$ . См. рисунок 2 для  $n = 5$  и интервала  $\{3, 4\}$ .

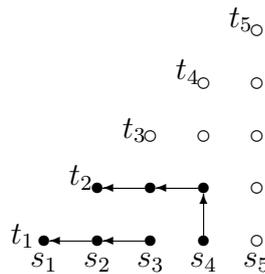


Рис. 2

Это дает систему уравнений на  $w$ :

$$f_0([a..b]) = \bigodot_{q \leq p \leq b, 1 \leq q \leq b-a+1} w(p, q), \quad (1.5)$$

которая решается явными формулами:

$$w(p, q) = \begin{cases} (f_0(I_{p,q}) \odot f_0(I_{p-1,q-1})) / (f_0(I_{p-1,q}) \odot f_0(I_{p,q-1})) & \text{при } q < p, \\ f(I_{p,q}) / f(I_{p,q-1}) & \text{при } q = p, \end{cases} \quad (1.6)$$

где  $/$  обозначает деление для  $\odot$ ,  $I_{p,q}$  обозначает интервал  $[p - q + 1..p]$ , и где полагается  $f_0(I_{p',q'}) = 1$  при  $q' = 0$  или  $p' < q'$ .

Это доказывает сюръективность и завершает доказательство теоремы 1.1.

Приведенные выше конструкции и утверждения можно подытожить коммутативной диаграммой (где  $\mathcal{P}_n^0(R)$  обозначает множество П-функций, равных 1 в точке  $\emptyset \in 2^{[n]}$ )

$$\begin{array}{ccc} R^{V(\Gamma)} & \xrightarrow{(1.4)} & \mathcal{P}_n^0(R) \\ & \searrow (1.6) & \swarrow \text{res} \\ & & R^{\text{Int}-\{\emptyset\}} \end{array}$$

**Замечание.** В случае полукольца  $\mathbb{R}_{>0}$  мы получаем строго положительные алгебраические Плюккеровы функции. Этот результат можно слегка обобщить, введя условия на знаки. А именно, введем знаковую функцию  $\sigma : [n] \rightarrow \{\pm 1\}$ , и будем рассматривать П-функции (со значениями в  $\mathbb{R} - \{0\}$ ), удовлетворяющие условию: знак  $f(S)$  равен  $\sigma(|S|)$ . В этом случае снова можно задавать П-функцию ее значениями на интервалах (подчиненных тому же условию на знаки). Для доказательства надо просто перейти к функции  $f'(S) = \sigma(|S|)f(S)$ , которая уже П-функция со значениями в  $\mathbb{R}_{>0}$ . См. также Пример 6 про квази-сепарабельные функции.

## 1.5 Феномен Лорана

Конструкции из двух последних разделов могут быть использованы для демонстрации феномена Лорана, проявляющегося в октаэдральной и кубической рекурсиях, см. [25, 31, 57]. Здесь мы ограничимся алгебраическим и тропическим случаями.

Рассмотрим П-функцию  $f$  на булевом кубе  $2^{[n]}$  и зафиксируем  $S \subset [n]$ . Уже из доказательства инъективности мы знаем, что значение  $f(S)$  может быть вычислено (с использованием операций ‘сложения’, ‘умножения’ и ‘деления’) через значения  $f(I)$ , где  $I$  пробегает интервалы в  $[n]$ . Тем самым на  $f(S)$  можно смотреть как на ‘рациональную’ функцию от переменных  $f(I)$ ,  $I \in \text{Int}$ . Замечательное свойство (феномен Лорана) состоит в том, что эта функция является ‘многочленом Лорана’, то есть делить приходится только на мономы.

В алгебраическом случае все почти очевидно из того, что  $f(S)$  выражается как сумма произведений весов  $w(p, q)$ , а последние выражаются через  $f(I)$  с помощью умножения и деления (см. (1.6)). Можно еще добавить, что коэффициенты этого многочлена

Лорана целые неотрицательные. Более внимательный анализ потоков в графе  $\Gamma$  позволяет показать (см. [16]), что показатели степеней принадлежат  $\{-1, 0, 1, 2\}$  (в случае октаэдральной рекурсии аналогичное утверждение доказал Шпеер [57]).

Тропическим многочленом Лорана (от переменных  $\xi_e$ ) называется выражение

$$P(\xi) = \max_j \left( \sum_e a_{j,e} \xi_e \right),$$

где коэффициенты  $a_{j,e}$  являются целыми числами. Как функция от  $\xi_e$  она является максимумом от (целочисленных) линейных форм, то есть выпуклой кусочно линейной функцией.

**Предложение 1.4** Пусть  $f$  – ТП-функция на  $2^{[n]}$  и  $S \subset [n]$ . Существует тропический многочлен Лорана  $P_S(\xi)$  от переменных  $\xi_I$  ( $I \in \text{Int}$ ), такой что

$$f(S) = P_S(f(I), I \in \text{Int}).$$

*Доказательство.* Мы знаем из предыдущего раздела, что каждая ТП-функция  $f$  генерируется весовой функцией  $w$ , заданной на множестве  $V$  вершин орграфа  $\Gamma$ . Более точно,

$$f(S) = \max\{w(F) : F \in \mathcal{F}(S)\}, \quad (1.7)$$

где  $\mathcal{F}(S)$  обозначает множество допустимых потоков, выходящих из  $S$ . Тем самым мы получаем представление  $f(S)$  как тропического многочлена, но от переменных  $w(v)$ ,  $v \in V$ . Мономы этого многочлена соответствуют потокам из  $\mathcal{F}(S)$ . Остается вспомнить, что согласно (1.6) значения  $w(v)$  линейно выражаются через  $f(I)$ :

$$w(v) = \sum_{I \in \text{Int}} h_v(I) f(I), \quad (1.8)$$

и что каждый коэффициент  $h_v(I)$  равен 0, 1 или  $-1$ . Взяв сумму весов  $w(v)$  по вершинам  $v \in F$  и подставив ее в (1.7), мы получим требуемый многочлен Лорана:

$$f(S) = \max_{F \in \mathcal{F}(S)} \left( \sum_{I \in \text{Int}} h_F(I) f(I) \right), \quad (1.9)$$

где  $h_F(I) = \sum_{v \in F} h_v(I)$ . □

Как и в алгебраическом случае можно показать (см. [16, Предложение 5]), что коэффициенты  $h_F(I)$  линейных форм, входящих в  $P_S$ , принадлежат  $\{-1, 0, 1, 2\}$ .

## 1.6 Комбинаторная лемма

Здесь мы доказываем комбинаторную Лемму 1.3 о перестройке потоков в плоских орграфах. Похожая техника используется в работе [42] для нахождения числа совершенных паросочетаний.

Напомним, что в Лемме 1.3 речь идет о плоском ациклическом орграфе  $\tilde{\Gamma}$  с  $n$  источниками  $s_i$  и  $n$  стоками  $t_j$  на его границе. Для подмножества  $S \subset [n]$  мы обозначаем через  $\mathcal{F}(S)$  множество допустимых потоков из  $S$  в первые  $|S|$  стоков. Поток удобно рассматривать как множество составляющих его ребер-стрелок, а также как соответствующую характеристическую функцию на множестве всех ребер  $\tilde{E} = E(\tilde{\Gamma})$  орграфа  $\tilde{\Gamma}$ .

Зафиксируем теперь некоторое подмножество  $X \subset [n]$  и тройку  $i < j < k$  в  $[n] - X$ . Под *спаренным потоком* типа  $(i'|j'k')$ , где  $\{i', j', k'\} = \{i, j, k\}$ , будем понимать функцию  $\pi : \tilde{E} \rightarrow \{0, 1, 2\}$ , представимую как сумму  $\pi = F + F'$  некоторого потока  $F$  из  $Xi'$  и некоторого потока  $F'$  из  $Xj'k'$  (рассматриваемых как 0,1 функции на  $\tilde{E}$ ). Множество всех таких функций  $\pi$  будем обозначать  $\Pi(i'|j'k')$ . Спаренный поток  $\pi$  может раскладываться в сумму потоков  $F + F'$  (из  $Xi'$  и  $Xj'k'$ ) многими способами. Число таких разложений обозначается  $N_\pi(i'|j'k')$ . Лемма 1.3 утверждает, что

$$N_\pi(j|ik) = N_\pi(i|jk) + N_\pi(k|ij). \quad (1.10)$$

Доказательство сводится к нескольким простым леммам.

Зафиксируем потоки  $F \in \mathcal{F}(Xi')$  и  $F' \in \mathcal{F}(Xj'k')$ . Положим  $q = |X| + 2$  (тогда поток  $F$  оканчивается в стоках  $\{t_1, \dots, t_{q-1}\}$ , а  $F'$  – в стоках  $\{t_1, \dots, t_q\}$ ). Рассматривая  $F, F'$  как множества ребер, мы обозначаем  $F \Delta F'$  их симметрическую разность  $(F \cup F') - (F \cap F')$  (которая, в силу соглашения выше, может далее отождествляться с соответствующим подграфом в  $\tilde{\Gamma}$  или 0,1 функцией на  $\tilde{E}$ ). Далее мы будем иметь дело с путями и циклами орграфа, которые могут не быть ориентированными, т.е., могут иметь ребра в обоих направлениях. Путь/цикл считается *простым*, если все его вершины различны.

**Лемма 1.5**  *$F \Delta F'$  (как подграф) представляется в виде объединения попарно непересекающихся простых циклов  $C_1, \dots, C_d$  и простых путей  $P, P'$ , где путь  $P$  соединяет два источника среди  $s_i, s_j, s_k$ , а  $P'$  соединяет оставшийся источник и сток  $t_q$ . В каждом из  $C_1, \dots, C_d, P, P'$  ребра потока  $F$  идут в одном направлении, а ребра потока  $F'$  – в другом направлении относительно ориентации цикла/пути.*

*Доказательство.* Каждый из потоков  $F, F'$  составлен из попарно непересекающихся ориентированных путей, и в каждом пути особые и неособые ребра чередуются. Если  $u$  – общая вершина для этих потоков, то, очевидно, особое ребро в  $\tilde{\Gamma}$ , инцидентное  $u$ , также принадлежит обоим потокам, и, следовательно, оно не содержится в  $F \Delta F'$ . Кроме того, если  $u$  не является источником или стоком, то  $F$  и  $F'$  содержат ровно по одному неособому ребру, инцидентному  $u$ . Если эти ребра различные, то они содержатся в  $F \Delta F'$  и либо оба входят в  $u$ , либо оба выходят из  $u$  (и, следовательно, идут в разных направлениях в порождаемом ими пути). Можно видеть, что для каждой вершины в  $\tilde{\Gamma}$  число инцидентных ей ребер в  $F \Delta F'$  равно 0, 1 или 2, и это число равно 1 для  $s_i, s_j, s_k, t_q$  и только для этих вершин. Из перечисленных свойств легко следуют утверждения леммы.  $\square$

**Следствие 1.6** *Путь  $P$  как в Лемме 1.5 соединяет либо  $s_i$  и  $s_j$ , либо  $s_i$  и  $s_k$ . Кроме того,  $P$  не может соединять  $s_i$  и  $s_k$ .*

Действительно, если бы путь  $P$  соединял  $s_j$  и  $s_k$ , то первое и последнее ребро в  $P$  принадлежали бы  $F'$ . Однако оба эти ребра выходят из концевых вершин пути, поэтому они имеют разные направления вдоль  $P$  и, в силу леммы, не могут принадлежать одному и тому же потоку из  $F, F'$ . Если бы  $P$  соединял  $s_i$  и  $s_k$ , то из  $i < j < k$  и планарности  $\tilde{\Gamma}$  следовало бы, что  $P$  пересекает путь  $P'$  (который соединяет  $s_j$  и  $t_q$ ), вопреки лемме.

**Лемма 1.7** (i) Пусть  $C_1, \dots, C_d$  – циклы в разложении  $F \Delta F'$  как в предыдущей лемме. Пусть  $J \subseteq \{1, \dots, d\}$  – произвольное подмножество индексов, и  $\mathcal{C} = \cup(C_r : r \in J)$ . Тогда  $\phi = F \Delta \mathcal{C}$  является потоком в  $\mathcal{F}(Xi')$ , и  $\phi' = F' \Delta \mathcal{C}$  является потоком в  $\mathcal{F}(Xj'k')$ . Более того, справедливо  $\phi + \phi' = F + F'$  (рассматривая потоки как функции на  $\tilde{E}$ ), т.е.  $\phi, \phi'$  дают тот же спаренный поток, что и  $F, F'$ .

(ii) Обратное, каждая пара потоков  $\phi \in \mathcal{F}(Xi')$  и  $\phi' \in \mathcal{F}(Xj'k')$ , такая что  $\phi + \phi' = F + F'$ , получается этим способом из  $F, F'$  при выборе подходящего  $J$ .

*Доказательство.* Каждое ребро  $e \in \mathcal{C}$  принадлежит в точности одному из потоков  $F, F'$ . Поэтому при взятии указанных симметрических разностей  $e$  оказывается ровно в одном из  $\phi, \phi'$ . Отсюда следует  $\phi + \phi' = F + F'$ . Рассмотрим произвольный цикл  $C_r$ ,  $r \in J$ . Он содержит только внутренние вершины (не источники и не стоки) и представляется как последовательное соединение ориентированных путей  $P_1, P'_1, \dots, P_p, P'_p$ , где  $P_1, \dots, P_p$  – подпути в потоке  $F$ ,  $P'_1, \dots, P'_p$  – подпути в потоке  $F'$ . При переходе от  $F$  к  $\phi$  части  $P_1, \dots, P_p$  в нем заменяются на  $P'_1, \dots, P'_p$ , а при переходе от  $F'$  к  $\phi'$  – наоборот. Заметим, что, ввиду разнонаправленности ребер из  $F$  и из  $F'$  в цикле  $C_r$ , каждая пара путей  $P_\ell, P'_\ell$  ведет себя “одинаково” в их общей вершине  $v$ : либо оба пути входят в  $v$ , либо оба выходят из  $v$ , и аналогично для соседних путей  $P'_\ell, P_{\ell+1}$  (полагая  $P_{p+1} = P_1$ ). Из этого можно заключить (при рассмотрении всех циклов  $C_r$ ), что все пути в каждом из  $\phi, \phi'$  – ориентированные. Отсюда легко следует, что  $\phi$  – поток из  $Xi'$ , и  $\phi'$  – поток из  $Xj'k'$ .

Теперь пусть  $\phi, \phi'$  заданы как в (ii). Из  $\phi + \phi' = F + F'$  следует, что  $\phi \Delta \phi' = F \Delta F'$ . Поэтому  $\phi \Delta \phi'$  состоит из того же самого набора циклов  $C_1, \dots, C_d$ . Требуемое  $J$  состоит из всех тех индексов  $p$ , для которых в цикле  $C_p$  участки (ориентированные пути), относящиеся к  $F$ , принадлежат  $\phi'$ .  $\square$

Таким образом, каждое  $\pi \in \Pi(i'|j'k')$  является спаренным потоком для  $2^{d(\pi)}$  пар потоков, один берется из  $\mathcal{F}(Xi')$  и другой – из  $\mathcal{F}(Xj'k')$ , где  $d(\pi)$  – число циклов в графе  $G(\pi)$ , порожденном ребрами  $e$  с  $\pi(e) = 1$ .

Применим полученные утверждения к случаю, когда  $i' = j$  и  $\{j', k'\} = \{i, k\}$  (при  $i < j < k$ ). Рассмотрим спаренный поток  $\pi \in \Pi(j|ik)$ . Пусть граф  $G(\pi)$  состоит из циклов  $C_1, \dots, C_{d(\pi)}$  и путей  $P, P'$  как указаны выше. Следствие 1.6 показывает, что  $P$  соединяет либо  $s_i$  и  $s_j$ , либо  $s_j$  и  $s_k$ .

**Лемма 1.8** Пусть  $\pi = F + F'$ , где  $F \in \mathcal{F}(Xj)$  и  $F' \in \mathcal{F}(Xik)$ . Пусть  $J \subset \{1, \dots, d(\pi)\}$  и  $\mathcal{C} = \cup(C_r : r \in J)$ . Положим  $\phi = F \Delta (\mathcal{C} \cup P)$  и  $\phi' = F' \Delta (\mathcal{C} \cup P)$ . Тогда  $\phi + \phi' = \pi$ . Кроме того: (a) если  $P$  соединяет  $s_i$  и  $s_j$ , то  $\phi \in \mathcal{F}(Xi)$  и  $\phi' \in \mathcal{F}(Xjk)$ , и (b) если  $P$  соединяет  $s_j$  и  $s_k$ , то  $\phi \in \mathcal{F}(Xk)$  и  $\phi' \in \mathcal{F}(Xij)$ .

*Доказательство.* То, что  $\phi$  и  $\phi'$  – потоки и  $\phi + \phi' = \pi$ , показывается так же, как в доказательстве Леммы 1.7. Концевые вершины пути  $P$  принадлежат разным потокам из  $F, F'$ , и при взятии указанных симметрических разностей каждый конец переходит к “другому” потоку. Отсюда следуют утверждения в (a) и (b).  $\square$

Верно и обратное свойство.

**Лемма 1.9** Пусть  $\pi = F + F'$ , где либо  $F \in \mathcal{F}(Xi)$  и  $F' \in \mathcal{F}(Xjk)$ , либо  $F \in \mathcal{F}(Xk)$  и  $F' \in \mathcal{F}(Xij)$ . Пусть  $J \subseteq \{1, \dots, d(\pi)\}$  и  $\mathcal{C} = \cup(C_r : r \in J)$ , где  $C_1, \dots, C_{d(\pi)}, P, P'$  – циклы и пути в разложении  $G(\pi)$  как выше. Положим  $\phi = F \Delta (\mathcal{C} \cup P)$  и  $\phi' = F' \Delta (\mathcal{C} \cup P)$ . Тогда  $\phi + \phi' = \pi$ ,  $\phi \in \mathcal{F}(Xj)$  и  $\phi' \in \mathcal{F}(Xik)$ .

*Доказательство.* Достаточно заметить, что (ввиду Следствия 1.6) путь  $P$  соединяет  $s_i$  и  $s_j$  в первом случае (когда  $F \in \mathcal{F}(Xi)$ ) и соединяет  $s_k$  и  $s_j$  во втором случае (когда  $F \in \mathcal{F}(Xk)$ ).  $\square$

Леммы 1.8 и 1.9 позволяют сделать следующий вывод. Мы имеем одно из двух: либо (а)  $N_\pi(j|ik) = N_\pi(i|jk) = 2^{d(\pi)}$  и  $N_\pi(k|ij) = 0$ , либо (б)  $N_\pi(j|ik) = N_\pi(k|ij) = 2^{d(\pi)}$  и  $N_\pi(i|jk) = 0$ . Отсюда очевидно следует требуемое равенство (1.10).

## 2 Ромбические тайлинги

### 2.1 Флипы и базисы

Имеется естественный способ “размножать”  $\Pi$ -базисы при помощи флипов. Представим, что  $\mathcal{B}$  – базис, и что он содержит пять множеств вида  $Xi, Xk, Xij, Xik$  и  $Xjk$ , где, как обычно,  $i < j < k$  и  $X$  не пересекается с  $ijk$ . Из ПЗ-соотношения для  $(X, i, j, k)$  следует, что множество  $Xj$  не может принадлежать базису  $\mathcal{B}$ , а также то, что если в  $\mathcal{B}$  заменить  $Xik$  на  $Xj$ , то мы снова получим базис. Такое преобразование базиса называется (системным) *понижающим флипом*. Обратная замена  $Xj \rightsquigarrow Xik$  (в присутствии 4-х свидетелей  $Xi, Xk, Xij, Xjk$ , содержащихся в  $\mathcal{B}$ ) называется *повышающим флипом*.

Заметим, что если от шестерки множеств в ПЗ-соотношении перейти к их дополнениям, мы получим шестерку множеств, тоже вовлеченную в ПЗ-соотношение, причем схожим образом. Поэтому для  $\Pi$ -функции  $f$  функция  $f'$  на  $2^{[n]}$ , определяемая как  $f'(S) = f(\bar{S})$ ,  $S \subset [n]$ , также является  $\Pi$ -функцией; здесь и далее  $\bar{S}$  обозначает дополнительное к  $S$  множество  $[n] - S$ . Отсюда можно заключить, что для любого базиса  $\mathcal{B}$  система множеств  $\{\bar{S} : S \in \mathcal{B}\}$  – это тоже базис; он называется *дополнительным* к  $\mathcal{B}$  и обозначается  $\text{co-}\mathcal{B}$ . Базис дополнительный к стандартному мы называем *ко-стандартным*.

Отправляясь от стандартного базиса  $Int$  и делая серию флипов, мы снова получаем базис. Базисы такого вида мы называем *ручными*; множество их обозначается  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_n$ . (Открытым остается вопрос – существуют ли неручные, или “дикие” базисы? Довольно легко проверить, что при  $n = 3$  все базисы ручные. Далее мы работаем исключительно с ручными базисами, часто даже не оговаривая этого.) Позднее мы дадим более полное представление как о  $\mathbf{B}$ , так и структуре любого ручного базиса. А пока займемся более ограниченной задачей.

Флип (понижающий или повышающий)  $Xj \rightsquigarrow Xik$  называется *строгим*, если он происходит в присутствии 6-ти свидетелей:  $X, Xi, Xk, Xij, Xjk$  и  $Xijk$ . Соответственно базис называется *строгим*, если он получается из стандартного базиса с помощью последовательности строгих флипов; множество таких базисов обозначим  $\mathbf{S} = \mathbf{S}_n$ . Это достаточно большое (хотя, в общем случае, собственное) подмножество в  $\mathbf{B}_n$ .

Чтобы лучше представить все это, скажем подробнее про случаи  $n = 3$  и 4. Прежде всего сделаем одно замечание, которое сокращает выкладки: все (ручные) базисы содержат некую общую часть, которую мы назовем *ожерельем* и обозначим  $\mathcal{N} = \mathcal{N}_n$ . Оно состоит из  $2n$  множеств  $[0], [1], [2], \dots, [n-1], [n], [\bar{1}], [\bar{2}], \dots, [\bar{n-1}] = \{n\}$ . Это интервалы в  $[n]$ , прижатые влево (первые  $n+1$ ) или вправо (последние  $n$ ). Ожерелье содержится в стандартном базисе; никакой флип не меняет элементы из ожерелья, поэтому ожерелье содержится в любом (ручном) базисе. Таким образом, указывая базис, достаточно указывать только неожерельную часть.

Множество  $\mathbf{B}_3$  совпадает с  $\mathbf{S}_3$  и состоит из двух элементов:  $\mathcal{N}_3 \cup \{2\} = \text{Int}_3$  и  $\mathcal{N}_3 \cup \{13\} = \text{co-Int}_3$ . Множество  $\mathbf{B}_4$  устроено чуть сложнее.  $\mathbf{S}_4$  содержит 8 элементов: стандартный базис  $\text{Int}_4$ , ко-стандартный базис  $\text{co-Int}_4 = \mathcal{N}_4 \cup \{14, 124, 134\}$  и еще шесть базисов:  $\mathcal{N}_4 \cup \{2, 23, 24\}$ ,  $\mathcal{N}_4 \cup \{3, 13, 23\}$ ,  $\mathcal{N}_4 \cup \{2, 24, 124\}$ ,  $\mathcal{N}_4 \cup \{3, 13, 134\}$ ,  $\mathcal{N}_4 \cup \{14, 24, 134\}$  и  $\mathcal{N}_4 \cup \{13, 14, 134\}$ . Множество  $\mathbf{B}_4$  больше на два базиса:  $\mathcal{N}_4 \cup \{14, 23, 24\}$  и  $\mathcal{N}_4 \cup \{13, 14, 23\}$ . Почему это так, мы увидим позже, а пока нарисуем соответствующие диаграммы для  $\mathbf{B}_3$  и  $\mathbf{B}_4$ :

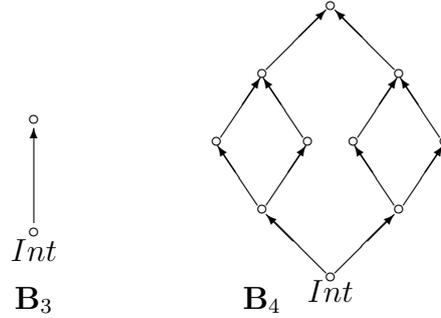


Рис. 3

## 2.2 Ромбические тайлинги

С каждым строгим базисом можно связать ромбический тайлинг (паркет) некоторого специального  $2n$ -угольника – зоногона; верно и обратное. Это позволяет более наглядно представить строгие базисы и взаимодействие между ними. Начнем с точных определений.

В верхней полуплоскости  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$  зафиксируем  $n$  векторов  $\xi_1, \dots, \xi_n$  со следующими свойствами: (i) вектора  $\xi_i$  следуют по часовой стрелке вокруг нуля; (ii) целочисленные комбинации этих векторов различны. Множество

$$Z_n = \{\alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_n \xi_n : 0 \leq \alpha_i \leq 1, i = 1, \dots, n\}$$

является *зононом* (с  $2n$  сторонами), будучи суммой  $n$  отрезков  $[0, \xi_i]$ . Конечно, это просто подходящая проекция единичного куба  $[0, 1]^n$  на плоскость. Более точно, мы рассматриваем отображение  $\xi : [0, 1]^n \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum x_i \xi_i$ . Для подмножества  $S \subset [n]$  будем обозначать соответствующую точку  $\sum_{i \in S} \xi_i$  как  $\xi(S)$ . Отображение  $\xi$  в пределах булева куба инъективно в силу свойства (ii), что позволяет работать с подмножествами в  $[n]$  как точками в зононе  $Z_n$ . (Это укладывается в рамки нашего сквозного подхода – сводить сложные объекты типа систем множеств к более наглядным геометрическим (и даже двумерным) образованиям, в данном случае ромбическим тайлингам.) Точки  $0 = \xi(\emptyset)$  и  $\xi([n]) = \xi_1 + \dots + \xi_n$  являются минимальной (самой низкой) и максимальной (самой высокой) вершинами зонона, соответственно. В силу свойства (i), левая граница зонона составлена отрезками, конгруэнтными векторам  $\xi_1, \dots, \xi_n$ , а правая граница – отрезками, конгруэнтными  $\xi_n, \dots, \xi_1$ .

На время удобно считать, что длины всех векторов  $\xi_i$  равны 1. В этом случае *ромбическим тайлингом* называется подразбиение нашего зонона  $Z_n$  на ромбы со сторонами единичной длины. Легко понять, что стороны любого ромба параллельны одному из  $\xi_i$ . Это очевидно, если сторона ромба лежит на границе зонона. В общем случае, переходя от одного ромба к соседнему, мы доберемся до границы зонона. Когда длины  $\xi_i$

произвольны, мы по-прежнему называем ромбическим тайлингом (или просто тайлингом) разбиение зоногона на параллелограммы (плитки) со сторонами, конгруэнтными векторам  $\xi_i$ , а сами плитки - ромбами.

Каждый тайлинг  $T$  можно рассматривать также как орграф с множеством вершин  $V(T)$ , образованным вершинами ромбов, и множеством ребер  $E(T)$ , образованным сторонами ромбов, направленными снизу вверх (как и вектора  $\xi_i$ ). Если ребро  $e$  конгруэнтно вектору  $\xi_i$ , мы говорим, что  $e$  имеет цвет  $i$ , или является  $i$ -ребром. Ясно, что через каждую вершину тайлинга проходит ориентированный путь  $P$  в графе  $T$ , начинающийся в минимальной и оканчивающийся в максимальной вершине зоногона. Такие пути называются далее змейками. Из целочисленной независимости векторов  $\xi_i$  (свойство (ii) выше) следует, что змейка  $P$  содержит по одному ребру каждого цвета. В силу этого, каждая вершина тайлинга имеет вид  $\xi(S)$  для некоторого подмножества  $S \subset [n]$ , обозначаемого далее как  $sp(v)$ . Система таких подмножеств  $sp(v)$ , когда  $v$  пробегает  $V(T)$ , называется спектром тайлинга  $T$  и обозначается  $Sp(T)$ .

Удобно считать, что вторая координата ("высота") каждого вектора  $\xi_i$  равна 1. В этом случае высота каждой вершины  $v$  тайлинга равна  $|sp(v)|$ ; множества одного размера представлены вершинами одного уровня. У каждого тайлинга есть одна нижняя вершина  $b(T)$  на уровне 0 и одна верхняя вершина  $t(T)$  на уровне  $n$ .

При работе с тайлингами важную роль играет понятие дорожки (или линии де Брийна). Пусть  $i \in [n]$  - некоторый цвет. Набор всех  $i$ -ромбов образует  $i$ -дорожку, идущую от  $i$ -ребра на левой границе зоногона до  $i$ -ребра на правой границе зоногона. Такие дорожки названы в [40] трэйн-треками, так как параллельные  $i$ -ребра напоминают 'шпалы', а с двух сторон идут 'рельсы'. (Если мы соединим отрезками середины  $i$ -ребер в каждом  $i$ -ромбе, то получим кусочно-линейную кривую, идущую от левой границы зоногона до правой. Эту кривую мы будем называть проволокой  $i$ -го цвета и обозначать  $w_i$ . Легко понять, что проволока является связной кривой.) Каждая дорожка или проволока делит вершины тайлинга на две части - те, что расположены нестрого левее дорожки (или строго левее проволоки), и те, что правее (если двигаться в соответствии с ориентацией дорожки/проволоки). И легко понять, что имеет место

**Предложение 2.1** Для вершины  $v$  тайлинга множество  $sp(v)$  состоит из тех цветов  $i \in [n]$ , для которых  $v$  лежит левее проволоки  $w_i$ .

В частности это показывает, что тайлинг восстанавливается по своему орграфу.

Дорожки (или проволоки) обладают одним важным свойством (которое на самом деле характеризует графы тайлингов). А именно, разные дорожки пересекаются однократно. В самом деле, пересечение  $i$ -ой дорожки с  $j$ -ой ( $i < j$ ) происходит в  $ij$ -ромбе, и, как легко понять, глядя на такой ромб,  $i$ -ая дорожка пересекает  $j$ -ю снизу вверх (или справа налево). Поэтому они пересекаются не более одного раза. А так как концы дорожек или проволок меняют свой порядок, они обязательно пересекаются. В частности мы получаем

**Следствие 2.2** Ромбы тайлинга находятся в естественной биекции с множеством пар  $(i, j)$ ,  $i < j$ .

Отсюда видно, что любой тайлинг содержит  $n(n - 1)/2$  ромбов и  $n(n + 1)/2 + 1$  вершину.

Еще одно следствие однократности пересечения дорожек. Рассмотрим  $i$ -дорожку и какой-нибудь ее ‘рельс’, правый или левый. Этот рельс составлен из ребер тайлинга, со-направленных или противоположно-направленных с рельсом. Тогда цвета этих ребер все различны и образуют множество  $[n] - \{i\}$ .

А теперь приведем менее очевидное свойство тайлингов. Забудем временно про ориентацию ребер тайлинга и будем смотреть на тайлинг как на (плоский) граф. В частности, определено ‘графовое’ расстояние  $d_T$  между вершинами тайлинга. С другой стороны мы можем рассмотреть ‘теоретико-множественное’ расстояние Хэмминга  $d_H$  между вершинами  $p$  и  $q$ , равное размеру симметрической разности между  $sp(p)$  и  $sp(q)$ ,  $d_H(p, q) = |sp(p) \Delta sp(q)|$ . Мы утверждаем, что эти два расстояния совпадают.

**Предложение 2.3**  $d_T = d_H$ .

*Доказательство.* Почти очевидно, что  $d_H \leq d_T$ . Покажем, что  $d_H \geq d_T$ . Пусть  $p$  и  $q$  – две вершины тайлинга, и пусть  $P$  – путь в  $T$  минимальной длины. Мы утверждаем, что цвета ребер этого пути различны; очевидно, это доказывает нужное неравенство.

В самом деле, предположим, что цвет  $i$  по крайней мере дважды встречается на пути  $P$ . Будем идти из точки  $p$ . Пусть  $(p', p'')$  – первое ребро цвета  $i$  на этом пути, а  $(q', q'')$  – второе.

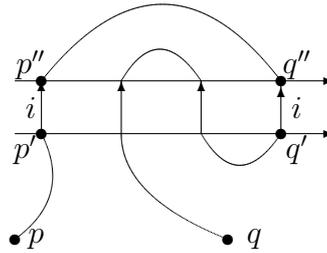


Рис. 4

Разобьем путь  $P$  на три участка: первый от  $p$  до  $p'$ , второй (обозначим его  $\tilde{P}$ ) – от  $p'$  до  $q'$ , и третий – от  $q'$  до  $q$ . Ребра  $(p', p'')$  и  $(q', q'')$ , как  $i$ -ребра, образуют шпалы  $i$ -дорожки. Обозначим через  $R$  кусок рельса этой дорожки, идущий из  $p'$  в  $q'$ . Мы утверждаем, что новый путь, составленный из первого участка пути  $P$ , рельса  $R$ , и третьего участка пути  $P$ , короче, чем  $P$ . Иначе говоря, ломаная  $R$  короче, чем ломаная  $\tilde{P}$ . В самом деле, как уже отмечалось выше, цвета всех ребер рельса  $R$  различны. С другой стороны, для любого ребра цвета  $j$  пути  $R$  существует ребро того же цвета  $j$  на пути  $\tilde{P}$ . Наконец, путь  $\tilde{P}$  по крайней мере дважды содержит ребро цвета  $i$ .  $\square$

**Следствие 2.4** Пусть  $p$  и  $q$  – вершины тайлинга. Если  $sp(p) \subset sp(q)$ , то существует ориентированный путь в тайлинге, ведущий из  $p$  в  $q$ .

### 2.3 Ромбические тайлинги и строгие базисы

Ромбические тайлинги интересны тем, что они дают П-базисы. Более точно, для любого тайлинга  $T$  его спектр  $Sp(T)$  является строгим базисом. Более того, ромбические тайлинги дают все строгие базисы.

Чтобы убедиться в этом, начнем с т.н. *стандартного тайлинга*  $ST$ . Он строится по индукции. Предположим, мы уже построили стандартный тайлинг для зоногона  $Z_{n-1}$  (с векторами  $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}$ ). Зоногон  $Z_n$  есть сумма  $Z_{n-1}$  и отрезка  $[0, \xi_n]$ . Если  $R$  – правая граница  $Z_{n-1}$ , то  $Z_n$  есть объединение  $Z_{n-1}$  и полоски  $R + [0, \xi_n]$ . Тогда стандартное разбиение  $Z_n$  строится из ромбов стандартного разбиения  $Z_{n-1}$  и ромбов вида  $e + [0, \xi_n]$ , где  $e$  пробегает ребра в  $R$ ; см. рис. 5:

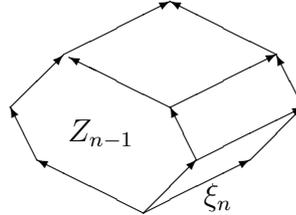


Рис. 5

Из этого описания видно, что спектр стандартного тайлинга состоит из всех интервалов. В самом деле, он состоит из интервалов в  $[n - 1]$  (индуктивная часть) плюс множества вида  $An$ , где  $A$  пробегает вершины в  $R$ , т.е. интервалы вида  $[i..(n - 1)]$ , которые, будучи дополнены элементом  $n$ , превращаются в интервалы вида  $[i..n]$ .

Теперь проследим за действием строгих флипов. Они были определены для базисов, сделаем это теперь для ромбических тайлингов. Из конструкции будет видно, что флипы действуют согласованно на тайлингах и базисах, и желаемый результат будет следовать из того факта, что любой ромбический тайлинг можно соединить со стандартным тайлингом  $ST$  цепочкой строгих флипов.

Флипы для тайлинга  $T$  определяются очень просто. Пусть  $T$  содержит три ромба, объединение которых образует шестиугольник (*гексагон*)  $H$ , как изображено слева на рисунке 6:

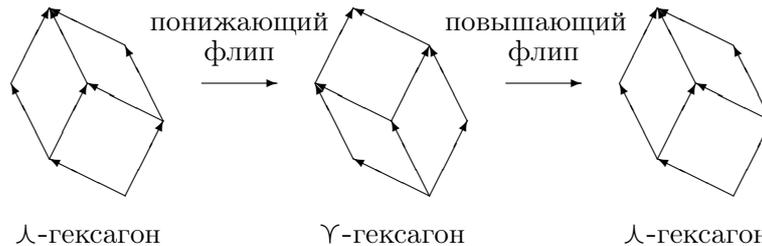


Рис. 6

Если заменить это подразбиение  $H$  на нарисованное в центре, мы получим новый тайлинг  $T'$ . При этом, если гексагон имел вид  $H = \xi(X) + [0, \xi_i] + [0, \xi_j] + [0, \xi_k]$  ( $i < j < k$ ), то при такой перестройке происходит замена вершины  $\xi(Xik)$  внутри гексагона на  $\xi(Xj)$  в присутствии шести свидетелей, соответствующих вершинам на границе гексагона. Эта перестройка и называется (понижающим) флипом тайлинга. Обратная перестройка – повышающий флип – заменяет внутреннюю вершину  $\xi(Xj)$  на  $\xi(Xik)$ . Верно и то, что если  $V(T)$  содержит шесть вершин вида  $X, Xi, Xk, Xij, Xjk, Xijk$  ( $i < j < k$ ), то они соединены ребрами в  $E(T)$ , образующими гексагон, и этот гексагон подразбит на три ромба (это следует из того, что любые две вершины вида  $X'$  и  $X'i'$  соединены ребром,

см. Следствие 2.4). Поэтому флип в терминах тайлингов соответствует строгому флипу в терминах систем множеств.

**Теорема 2.5** *Любой ромбический тайлинг можно соединить со стандартным тайлингом цепочкой понижающих флипов.*

*Доказательство.* Если в тайлинге есть гексагон вида  $\lambda$ , сделаем понижающий флип. Действуя таким образом, мы не можем заиклиться, потому что при каждом понижающем флипе уменьшается общий вес тайлинга, который определяется как суммарный вес всех вершин, а вес вершины  $\xi(S)$  считается равным  $|S|$ . Поэтому в конце концов мы придем к тайлингу без  $\lambda$ -гексагонов. Остается проверить следующий факт.

**Лемма 2.6** *Пусть  $T$  – ромбический тайлинг без гексагонов вида  $\lambda$ . Тогда  $T$  – стандартный тайлинг.*

Приведем доказательство этой леммы, следуя в основном [31] (другое доказательство дано в архивной версии работы [16]). Пусть в  $T$  имеется вершина  $v$ , в которую входят (снизу) по меньшей мере три ребра. Выберем одно из *средних* ребер (в порядке их следования слева направо), скажем,  $(u, v)$ , и спустимся в вершину  $u$ . Легко видеть, что  $(u, v)$  – единственное ребро в тайлинге, выходящее из  $u$  (вверх). Кроме того, очевидно,  $u$  не принадлежит границе зоногона. Поэтому в  $u$  входят как минимум два ребра. Если их ровно два – получаем в точности  $\lambda$ -конфигурацию. По условиям леммы это невозможно, поэтому в  $u$  входит не менее трех ребер. Повторяя процедуру для  $u$ , спускаемся на один уровень ниже, и так без конца – противоречие.

Обратимся теперь к верхней вершине  $t(T)$  зоногона  $Z_n$ . По доказанному в нее должно входить ровно два ребра. Ими являются граничные ребра с цветами 1 и  $n$ . Спустимся по ребру цвета 1, попадая в предыдущую вершину на правой границе зоногона. Легко видеть, что в эту вершину снова входят ровно два ребра, а именно, ребра с цветами 2 и  $n$ . Спустимся по ребру цвета 2, оставаясь на правой границе. Действуя таким образом, получим “полоску” из  $n - 1$  ромбов, примыкающую к правой границе. Остаток, т.е., зоногон  $Z_{n-1}$ , по индукции разбит стандартно. Следовательно,  $T$  – стандартный тайлинг.

Лемма 2.6 и Теорема 2.5 доказаны. □

**Следствие 2.7** *Спектр любого ромбического тайлинга дает строгий  $\Pi$ -базис; любой строгий  $\Pi$ -базис получается таким способом.*

## 2.4 Сильная разделенность и ромбические тайлинги

Зададимся теперь вопросом: какие системы множеств можно расширить до строгих базисов (или, что то же самое, до спектров тайлингов)? Ответ на него (в несколько иной форме) дали Леклерк и Зелевинский [44], используя понятие сильной разделенности множеств в  $[n]$ . Предварительно введем важное для всего дальнейшего бинарное отношение  $\ll$  на булевом кубе  $2^{[n]}$ , продолжающее естественный порядок с  $[n]$  на  $2^{[n]}$ .

Пусть  $A$  и  $B$  – подмножества в  $[n]$ . Будем писать  $A \ll B$ , если  $a < b$  для любых  $a \in A - B$  и  $b \in B - A$ .

Иначе говоря, после удаления общей части,  $A$  расположено левее  $B$  в  $[n]$ . Например, если  $A \subset B$ , то  $A \ll B$  и  $B \ll A$  (впрочем, верно и обратное - если  $A \ll B$  и  $B \ll A$ , то либо  $A \subset B$ , либо  $B \subset A$ ). Отсюда видно, что отношение  $\ll$  в общем случае не является ни транзитивным, ни антисимметричным.

**Определение.** Подмножества  $A$  и  $B$  в  $[n]$  называются *сильно разделенными*, если выполняется  $A \ll B$  или  $B \ll A$ . Система множеств  $\mathcal{X} \subset 2^{[n]}$  называется *сильно разделенной*, если любые два элемента в ней сильно разделены.

Например, система *Int* интервалов в  $[n]$  сильно разделена. На самом деле имеет место общий факт:

**Предложение 2.8** *Спектр любого тайлинга является сильно разделенной системой множеств.*

Иначе говоря, для любых двух его вершин  $v$  и  $w$  выполнено  $sp(v) \ll sp(w)$  или  $sp(w) \ll sp(v)$ . На самом деле можно точнее сказать, какое из этих соотношений (или оба) имеет место. Напомним, что *змейкой* тайлинга  $T$  называется ориентированный путь  $P$  (в тайлинге  $T$ , рассматриваемом как орграф), начинающийся в нижней вершине  $b(T)$  тайлинга и заканчивающийся в верхней вершине  $t(T)$ . Вершины  $(v_0, v_1, \dots, v_n)$  этого пути дают цепь подмножеств  $S_0 \subset S_1 \subset \dots \subset S_n$  в  $[n]$ ,  $S_k = sp(v_k)$ ; очевидно,  $|S_k| = k$ . Такой путь  $P$  делит зоногон  $Z_n$  на две половинки: левее  $P$  и правее  $P$ .

Скажем, что вершина  $v$  *лежит левее* вершины  $w$ , если  $v$  лежит (нестрого) левее некоторой змейки, проходящей через вершину  $w$ . Впрочем,  $v$  может лежать и левее, и правее  $w$ ; в этом случае, как легко понять, существует змейка, на которой лежат обе вершины.

**Лемма 2.9** *Если вершина  $v$  лежит левее вершины  $w$ , то  $sp(v) \ll sp(w)$ .*

*Доказательство.* Обозначим через  $Q$  змейку, проходящую через  $w$ . Соединим нижнюю вершину  $b(T)$  тайлинга направленным путем  $P$  с вершиной  $v$ . Можно считать, что некоторое время  $P$  идет по змейке  $Q$ , а потом сворачивает налево, как на рисунке 7. Спектр  $v$  состоит из цветов, встречающихся на пути  $P$ ; аналогично спектр  $w$  состоит из цветов, встречавшихся на пути  $Q$  от нижней вершины до вершины  $w$ . Пусть цвет  $a$  входит только в  $sp(v)$ , а цвет  $b$  — только в  $sp(w)$ . Обозначим той же буквой  $a$   $a$ -ребро пути  $P$ . Ясно, что это ребро лежит выше точки расхождения путей  $P$  и  $Q$ .

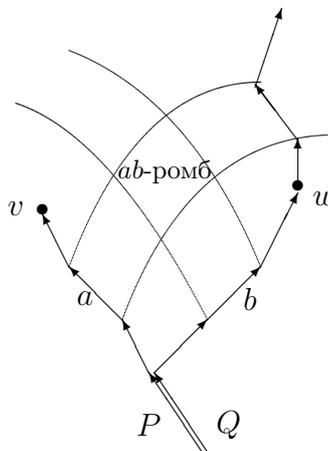


Рис. 7

Выпустим из этого ребра  $a$ -дорожку до правой стороны зоногона. Так как цвет  $a$  не входит в спектр  $w$ , эта дорожка проходит выше вершины  $w$ . Аналогично рассмотрим ребро цвета  $b$  на пути  $Q$  и проведем  $b$ -дорожку из левой стороны зоногона до  $b$ -ребра на пути  $Q$ . Она проходит выше вершины  $v$ . Из картинке видно, что  $a$ -дорожка снизу пересекает  $b$ -дорожку, откуда  $a < b$ .  $\square$

Так как для любых двух вершин тайлинга одна лежит левее другой, мы получаем предложение 2.8.

Если даны две змейки  $P$  и  $Q$  в одном тайлинге, можно образовать их левую огибающую  $P \wedge Q$  и правую огибающую  $P \vee Q$ . В частности, для любой вершины  $w$  тайлинга существует самая левая змейка, проходящая через  $w$ ; обозначим ее  $W_w$ .

**Лемма 2.10** Пусть  $v$  и  $w$  – вершины тайлинга, и  $sp(w) \ll sp(v)$ . Тогда вершина  $v$  лежит правее змейки  $W_w$ .

В самом деле, если  $v$  лежит левее змейки  $W_w$ , то выполнено  $sp(v) \ll sp(w)$ . Как уже говорилось, в этом случае спектры  $v$  и  $w$  сравнимы теоретико-множественным включением. Согласно Следствию 2.4, эти вершины лежат на одной змейке. А так как  $W_w$  – самая левая змейка, проходящая через  $w$ , то  $v$  лежит правее  $W_w$ .

## 2.5 Теорема о сильной разделенности

Установим теперь второй основной результат этой главы.

**Теорема 2.11** Пусть  $\mathcal{X}$  – сильно разделенная система множеств. Тогда существует ромбический тайлинг  $T$ , такой что  $\mathcal{X} \subset Sp(T)$ .

Вместе с Предложением 2.8 это доказывает Теорему **S3** из введения. А вместе с Теоремой 2.5 – и Теоремы **S1** и **S2**.

Главный рабочий прием при доказательстве теоремы – редукция (или удаление) цвета  $n$ . Редукцию можно делать и с тайлингами, и с системами множеств. Начнем с первого.

Пусть  $T$  – тайлинг зоногона  $Z_n$ . Сотрем в нем все  $n$ -ребра (а в зоногоне –  $n$ -дорожку). В результате зоногон без  $n$ -дорожки разобьется на два куска – правый (содержащий  $t(T)$ ) и левый (содержащий  $b(T)$ ). Передвинем правую часть посредством вектора  $-\xi_n$ . В результате обе части совместятся и образуют новый тайлинг  $T/n$  зоногона  $Z_{n-1}$ . Этапы этой конструкции изображены на рис. 8.

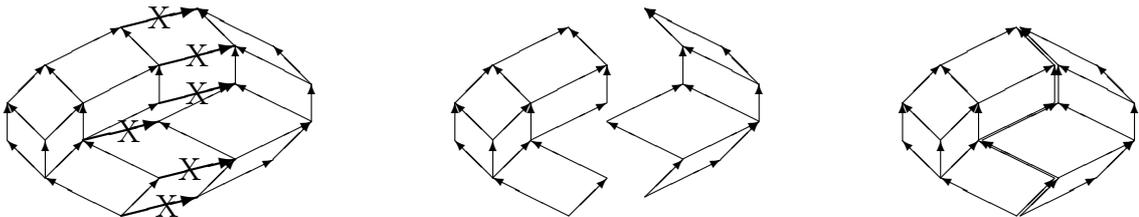


Рис. 8

В терминах систем множеств редукция цвета  $n$  выглядит еще проще. Заменяем в системе  $\mathcal{X}$  подмножеств  $[n]$  каждое множество  $X$  на  $X - n$ ; в результате мы получим систему (обозначаемую  $\mathcal{X}/n$ ) подмножеств множества  $[n - 1]$ . Эти две операции редукции согласованы в том смысле, что

$$Sp(T/n) = Sp(T)/n.$$

Заметим, что  $n$ -дорожка идет монотонно сверху вниз. И после редукции в тайлинге  $T/n$  остается ‘шов’ от сшивания двух половинок старого тайлинга (см. правую картинку на рис. 8); шов этот идет по ребрам (точнее, против стрелок) тайлинга  $T/n$  из вершины  $[n - 1]$  в вершину  $\emptyset$ . Такие пути (а точнее, противоположно направленные пути) из нижней вершины в верхнюю вершину мы называли змейками. Так что редукция цвета  $n$  в тайлинге  $T$  дает две вещи: редуцированный тайлинг  $T/n$  и змейку в нем.

Обратно, если у нас есть  $(n - 1)$ -тайлинг  $T'$  зоногона  $Z_{n-1}$  и змейка  $\mathcal{S}$  в нем, мы можем обратить операции и построить естественным способом  $n$ -тайлинг  $T$ . Для этого нужно разрезать зоногон  $Z_{n-1}$  вдоль змейки, сдвинуть правую половину на вектор  $\xi_n$  и заполнить образовавшуюся ‘щель’  $n$ -дорожкой. В результате мы получим  $n$ -зоногон  $Z_n$  и его тайлинг  $T$ . Редукция  $T$  по цвету  $n$  возвращает нас к  $T'$  и змейке  $\mathcal{S}$ . Так что эти конструкции устанавливают естественную биекцию множеств

$$\{\text{тайлинги зоногона } Z_n\} \rightleftharpoons \{\text{тайлинги зоногона } Z_{n-1} \text{ плюс змейки в них}\}.$$

Вооружившись этими конструкциями, приступим к доказательству теоремы 2.11. Пусть  $\mathcal{X}$  – сильно разделенная система множеств в  $[n]$ ; мы хотим построить тайлинг  $T$ , такой что  $\mathcal{X} \subset Sp(T)$ . Разобьем систему  $\mathcal{X}$  на две части:  $\mathcal{X}_0$ , состоящую из множеств, не содержащих  $n$ , и  $\mathcal{X}_1$ , состоящую из множеств, содержащих  $n$ . Подсистему  $\mathcal{X}_0$ , рассматриваемую как систему множеств в  $[n - 1]$ , обозначим как  $\mathcal{L}$ . Систему  $\mathcal{X}_1/n$  (состоящую из множеств  $X - n$ , где  $X \in \mathcal{X}_1$ ) обозначим как  $\mathcal{R}$ . Очевидно, что и  $\mathcal{L}$ , и  $\mathcal{R}$  являются сильно разделенными системами множеств в  $[n - 1]$ . Кроме того  $\mathcal{L} \ll \mathcal{R}$  в том смысле, что  $L \ll R$  для любых  $L \in \mathcal{L}$  и  $R \in \mathcal{R}$ . В самом деле множества  $L$  и  $Rn$  принадлежат  $\mathcal{X}$  и поэтому сильно разделены. Так как  $Rn$  не может быть  $\ll L$  (ибо содержит  $n$ , которого нет в  $L$ ), то  $L \ll Rn$ , откуда очевидно следует  $L \ll R$ .

Из этих простых замечаний видно, что  $\mathcal{L} \cup \mathcal{R}$  является сильно разделенной системой множеств в  $[n - 1]$ . По индукции мы можем реализовать эту систему некоторым  $(n - 1)$ -тайлингом  $T'$ . Предположим теперь, что нам удалось построить змейку  $\mathcal{S}$  в тайлинге  $T'$ , которая разделяет  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{R}$  в том смысле, что  $\mathcal{L}$  лежит (не строго) слева от  $\mathcal{S}$ , а  $\mathcal{R}$  – (не строго) справа от  $\mathcal{S}$ . Пусть теперь  $T$  –  $n$ -тайлинг, построенный как сказано выше по змейке  $\mathcal{S}$  в тайлинге  $T'$ . То, что слева, остается как было; каждый элемент  $R$  справа превращается в  $Rn$ . В результате исходная система  $\mathcal{X}$  реализуется тайлингом  $T$ .

Итак, осталось построить змейку в  $T'$ , разделяющую  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{R}$ . В качестве такой змейки мы возьмем правую огибающую  $\mathcal{S} = \bigvee_{L \in \mathcal{L}} W_L$  змеек  $W_L$  по всем вершинам  $L$  из  $\mathcal{L}$  (здесь мы для краткости отождествляем вершину  $L$  и ее спектр). Очевидно, что  $\mathcal{L}$  лежит слева от  $\mathcal{S}$ . Мы утверждаем, что  $\mathcal{R}$  лежит справа от  $\mathcal{S}$ . В самом деле, пусть  $R \in \mathcal{R}$  и  $L \in \mathcal{L}$ . Так как  $L \ll R$ , то, согласно лемме 2.10,  $R$  находится правее змейки  $W_L$ , и это верно для любой вершины  $L$  из  $\mathcal{L}$ . Поэтому  $R$  находится правее змейки  $\mathcal{S}$ .

Теорема 2.11 доказана.

## 2.6 Перестановки и ромбические тайлинги

В качестве тривиального следствия Теоремы 2.11, получаем, что любое множество  $X \subset [n]$  может быть представлено как вершина некоторого ромбического тайлинга зоногона  $Z_n$ . (Вместе с Теоремой 2.5 это дает другое доказательство инъективности для стандартного базиса.) Аналогично любое ребро  $(X, Xi)$  (где  $i \notin X$ ) может быть представлено как ребро некоторого ромбического тайлинга. Точно так же любой “ромб”  $X, Xi, Xj, Xij$  можно реализовать как ромб некоторого тайлинга. Наконец, любой гексагон можно вписать в некоторый тайлинг.

Приведем другой интересный частный случай Теоремы 2.11. Пусть  $\mathcal{C}$  – цепь подмножеств в  $[n]$ , то есть система подмножеств, любые члены которой сравнимы относительно теоретико-множественного включения. Очевидно, что  $\mathcal{C}$  – сильно разделенная система множеств и поэтому вписывается в некоторый тайлинг. Особо интересен случай, когда цепь  $\mathcal{C}$  максимальна, т.е. состоит из подмножеств

$$\emptyset \subset \{i_1\} \subset \{i_1, i_2\} \subset \dots \subset \{i_1, \dots, i_{n-1}\} \subset \{i_1, \dots, i_n\} = [n],$$

где  $i_1, \dots, i_n$  – различные элементы  $[n]$ . Такая цепь соответствует перестановке  $\omega$  множества  $[n]$ , при которой  $i_k$  переходит в  $k$  (так что  $i_k = \omega^{-1}(k)$ ), а также новому (линейному) порядку  $<_\omega$  на  $[n]$ , при котором  $i_1 <_\omega i_2 <_\omega \dots <_\omega i_n$ . При этом (полная) цепь  $\mathcal{C}$  состоит из всех  $<_\omega$ -идеалов:  $\mathcal{C} = Id(\omega)$ .

Далее перестановку, соответствующую естественному порядку, мы обозначаем как  $id$ , а перестановку для противоположного порядка ( $i \mapsto n + 1 - i$ ) – как  $di$ .

Полную цепь как выше мы отождествляем с путем-змейкой  $(\emptyset, i_1, i_1 i_2, \dots, [n])$  в зононе, ведущим из нижней вершины  $\emptyset$  в верхнюю вершину  $[n]$ , который будем обозначать  $\mathcal{S}(\omega)$ , где  $\omega$  – перестановка  $i_k \mapsto k$ . Задавшись любой перестановкой  $\omega$ , можно явно построить некоторый ромбический тайлинг  $T$ , содержащий змейку  $\mathcal{S}(\omega)$ . Построение происходит отдельно слева и справа от змейки  $\mathcal{S}(\omega)$  и напоминает конструкцию стандартного тайлинга на всем зононе. Начинаем с верхней вершины  $[n]$ , берем два входящих в нее ребра, одно с левой границы зоногона (это ребро цвета  $n$ ), другое из змейки  $\mathcal{S}(\omega)$  (ребро цвета  $i_n$ ), и достраиваем их до ромба, если эти ребра различны. (Если же  $i_n = n$ , мы просто спускаемся по общему ребру.) Затем повторяем операцию в предыдущей вершине  $[n] - i_n$  на змейке  $\mathcal{S}(\omega)$ . И так далее, до тех пор, пока мы не дойдем до ребра на змейке, цвет которого равен  $n$ .

В результате получим полосу из  $n$ -ромбов, которую условно удаляем из левой части зоногона (до змейки). Далее повторяем процедуру с цветом  $n - 1$ , начиная с верхней вершины оставшейся левой части зоногона, и так далее. Можно также сказать, что в результате первой стадии мы переходим от перестановки  $(i_1, \dots, i_k = n, i_{k+1}, \dots, i_n)$  к перестановке  $(i_1, \dots, i_{k-1}, i_{k+1}, \dots, i_n, n)$  и применяем индукцию. В результате мы построим тайлинг части зоногона, расположенной слева от змейки  $\mathcal{S}(\omega)$ . Этот (частичный) тайлинг естественно назвать *стандартным  $(id, \omega)$ -тайлингом*. Аналогично расправляемся с правой половиной зоногона, получая стандартный  $(\omega, di)$ -тайлинг.

Ниже изображен результат этой процедуры применительно к случаю  $n = 5$  и перестановке  $\omega = (4, 1, 5, 3, 2)$ . Цифры на ромбах показывают порядок появления соответствующих ромбов.

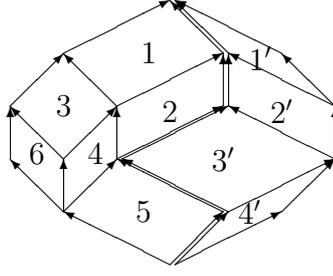


Рис. 9

Исследуем теперь более детально ромбические тайлинги части зоногона, расположенной слева от змейки  $\mathcal{S}(\omega)$ ; этот регион обозначим  $Z(id, \omega)$  (так как левая граница в  $Z_n$  – это  $\mathcal{S}(id)$ ), и тайлинги этого региона назовем  $(id, \omega)$ -тайлингами.

Начнем с вопроса – какие подмножества  $X$  могут встречаться как вершины некоторого  $(id, \omega)$ -тайлинга? Конечно, не любые; подмножество  $X$  как точка  $\xi(X)$  должна лежать в области  $Z(id, \omega)$ . Оказывается, этого мало. Чтобы дать полный ответ, введем следующее обозначение. Будем писать  $X \ll \omega$  (соответственно,  $\omega \ll X$ ), если  $X \ll I$  (соответственно,  $I \ll X$ ) для любого  $\omega$ -идеала  $I$ , то есть для любого множества  $\omega^{-1}([k])$ ,  $0 \leq k \leq n$ .

**Предложение 2.12** *Множество  $X$  может быть включено в  $(id, \omega)$ -тайлинг тогда и только тогда, когда  $X \ll \omega$ .*

*Доказательство.* Пусть  $X$  принадлежит  $(id, \omega)$ -тайлингу  $T$ . Для  $I = \omega^{-1}([k])$  ( $1 \leq k < n$ ) нужно проверить, что  $X \ll I$ . Пусть  $i \in I - X$  и  $j \in X - I$ ; нужно показать, что  $j < i$ . Предположим противное:  $i < j$ . Включение  $j \in X - I$  означает, что  $j$ -дорожка в  $T$  проходит ниже вершины  $X$ , но заканчивается выше  $k$ -го по счету ребра на  $\mathcal{S}(\omega)$ . В свою очередь,  $i$ -дорожка  $Q$  в  $T$  начинается ниже  $j$ -дорожки и заканчивается одним из первых  $k$  ребер в  $\mathcal{S}(\omega)$ . Поэтому  $Q$  не пересекается с  $j$ -дорожкой и проходит ниже нее. Следовательно,  $Q$  проходит ниже  $X$ , откуда  $i \in X$ , что противоречит  $i \in I - X$ .

Обратно, пусть  $X \ll \omega$ . Тогда система  $\{X\} \cup \mathcal{S}(\omega)$  сильно разделена и по Теореме 2.11 может быть включена в тайлинг  $T$  всего  $Z_n$ . Змейка  $\mathcal{S}(\omega)$  тоже вписана в этот тайлинг, поэтому можно рассмотреть часть  $T'$  в  $T$ , расположенную левее  $\mathcal{S}(\omega)$ . Остается заметить, что  $X$  как точка зоногона тоже лежит левее змейки, потому что она лежит левее точки  $\omega^{-1}([k])$ , где  $k = |X|$ .  $\square$

Аналогично, множество  $X$  может быть включено в тайлинг правой части  $Z(\omega, di)$  зоногона  $Z_n$  тогда и только тогда, когда  $\omega \ll X$ .

Полученному ответу можно придать чуть иную форму. Скажем, что множество  $X$  является  $id \cap \omega$ -идеалом (Леклерк и Зелевинский в [44] говорят об  $\omega$ -камерных множествах), если соотношения  $j \in X$ ,  $i < j$  и  $\omega(i) < \omega(j)$  влекут  $i \in X$ . Следующее утверждение близко к теореме 1.6 из [44].

**Предложение 2.13**  *$X \ll \omega$  тогда и только тогда, когда  $X$  является  $id \cap \omega$ -идеалом.*

*Доказательство.* Пусть  $X \ll \omega$ ,  $j \in X$ ,  $i < j$  и  $\omega(i) < \omega(j)$ . Рассмотрим  $\omega$ -идеал  $I$ , порожденный элементом  $i$ , т.е.,  $I = \{k: \omega(k) \leq \omega(i)\}$ . Тогда  $i \in I$  и  $j \in X - I$ . Ввиду  $X \ll I$  и  $i < j$ , получаем  $i \in X$ .

Обратно, пусть  $X$  является  $id \cap \omega$ -идеалом, а  $I - \omega$ -идеалом. Нужно проверить, что для  $j \in X - I$  и  $i \in I - X$  выполняется соотношение  $j < i$ . Предположим противное:  $i < j$ . Из идеальности  $X$  и  $i \notin X$  следует  $\omega(i) > \omega(j)$ . Теперь из  $i \in I$  и идеальности  $I$  получаем  $j \in I -$  противоречие.  $\square$

Ромбические тайлинги области  $Z(id, \omega)$  тесно связаны с редуцированными разложениями перестановки  $\omega$ , как было замечено в [23]. Пусть  $T - (id, \omega)$ -тайлинг; рассмотрим в нем дорожку из  $i$ -ромбов. Она соединяет ребро цвета  $i$  на левой стороне зоногона с ребром  $e$  того же цвета на змейке  $\mathcal{S}(\omega)$ . Ребро  $e$  стоит в змейке на  $\omega(i)$ -м месте. Пусть  $j > i$ . Если дорожки цветов  $i$  и  $j$  пересекаются (в  $ij$ -ромбе), то  $i$ -дорожка заканчивается выше, чем  $j$ -дорожка; следовательно,  $\omega(i) > \omega(j)$ , и мы имеем *инверсию*  $(i, j)$  перестановки  $\omega$ . Если же дорожки не пересекаются, то  $\omega(i) < \omega(j)$ , и  $(i, j)$  не является инверсией для  $\omega$ .

Таким образом, мы получаем естественную биекцию между ромбами тайлинга  $T$  и множеством  $Inv(\omega)$  инверсий перестановки  $\omega$ . Простое следствие этой биекции – что число ромбов любого  $(id, \omega)$ -тайлинга одно и то же и равно *длине*  $l(\omega)$  перестановки  $\omega$ , понимаемой как число инверсий.

Довольно легко понять, что для любого  $(id, \omega)$ -тайлинга существует ромб, двумя правыми ребрами примыкающий к змейке  $\mathcal{S}(\omega)$ . Если мы “отщипнем” этот ромб от нашего тайлинга, то получим новую перестановку  $\omega'$ , соответствующую измененной змейке. Очевидно,  $l(\omega') = l(\omega) - 1$ . Кроме того,  $\omega = \omega's$ , где  $s$  – транспозиция элементов  $i$  и  $j$ , стоящих рядом в перестановках  $\omega'$  и  $\omega$ . В результате мы получаем представление перестановки  $\omega$  как композиции (или произведения)  $l(\omega)$  соседних транспозиций. Это приводит к более традиционному определению длины перестановки как кратчайшего (или редуцированного) представления в виде произведения “соседних” транспозиций.

Обратно, любое редуцированное разложение перестановки  $\omega$  определяет некоторый  $(id, \omega)$ -тайлинг. Но кроме того оно определяет и некоторую ‘правильную’ нумерацию ромбов этого тайлинга. Нумерация называется *правильной*, если любой левый сосед данного ромба имеет меньший номер. Иначе говоря, на любой дорожке номера идут в возрастающем порядке. (Этим тайлинги с нумерацией напоминают стандартные таблицы Юнга.) Так что мы получаем естественную биекцию:

$$\{\text{редуцированные разложения } \omega\} \leftrightarrow \{\text{правильно нумерованные } (id, \omega)\text{-тайлинги}\}.$$

Если забыть нумерацию, мы приходим к биекции между  $(id, \omega)$ -тайлингами и т.н. *коммутационными* классами редуцированных разложений перестановки  $\omega$  (определения см., например, в [44]).

## 2.7 Строгие вайринги

Упомянем кратко, что ромбические тайлинги допускают двойственное описание в терминах проволочных диаграмм. Польза от этого дуального описания двоякая. Во-первых, техника проволочных диаграмм (называемых также аранжментами псевдо-прямых, см. [28]) достаточно привычна для тех, кто работает с перестановками и их разложением на транспозиции. Во-вторых, мы получаем здесь важный подкласс более общих проволочных диаграмм, которые будут позже использоваться при работе с общими ручными (а не только строгими) базисами.

Пусть  $T$  – ромбический тайлинг зоногона  $Z = Z_n$ . Напомним, что рассматривая в  $T$  дорожку цвета  $i$  (в разделе 2.2), мы проводили в ней среднюю линию  $w_i$ , называя ее  $i$ -ой проволокой. Каждая проволока идет от левой границы зоногона к правой. Полученная система  $W = (w_1, \dots, w_n)$  проволок обладает двумя важными свойствами.

- 1) Проволоки разных цветов пересекаются трансверсально.
- 2) Проволоки разных цветов пересекаются не более одного раза.

Важно заметить, что исходный тайлинг  $T$  (или, эквивалентно, множество его вершин) однозначно восстанавливается по  $W$ . В самом деле, согласно Предложению 2.1, точка  $\xi(X)$  является вершиной  $T$  тогда и только тогда, когда

$$X = \{i \in [n], \text{ проволока } w_i \text{ проходит ниже } v\}. \quad (2.1)$$

Две вершины соединяются ребром цвета  $i$  тогда и только тогда, когда они разделяются только одной проволокой  $w_i$ . Так что тайлинг  $T$  восстанавливается по вайрингу  $W$ .

Можно сказать чуть иначе. Выбросим из зоногона все проволоки и назовем *камерой* замыкание связной компоненты остатка  $Z - \bigcup_i w_i$  (иначе говоря, внутреннюю грань соответствующего плоского графа для  $W$ ). Тогда каждая вершина тайлинга лежит в некоторой камере, и в каждой камере есть ровно одна вершина, так что множество вершин  $T$  отождествляется с множеством камер. Камеры соседствуют по стороне тогда и только тогда, когда соответствующие вершины принадлежат одному ребру. Ромбы тайлинга соответствуют пересечениям проволок. Одним словом, как плоские графы, тайлинги и проволочные диаграммы дуальны друг другу.

Все это подсказывает определение абстрактного строгого вайринга. Удобно проводить проволоки не в самом зоногоне  $Z$ , а во вспомогательной вертикальной полосе  $\Pi$  с левой границей  $L_\Pi$  и правой границей  $R_\Pi$ .

Назовем *проволокой* кусочно-гладкую кривую  $w$  без самопересечений в полосе  $\Pi$ , идущую из некоторой точки-источника на левом краю  $L_\Pi$  в точку-сток на правом краю  $R_\Pi$ . *Проволочной диаграммой* называется набор  $W = (w_1, \dots, w_n)$  проволок, находящихся в общем положении.

**Определение.** Проволочная диаграмма  $W$  называется *строгим вайрингом*, если выполнено следующее условие (аксиома):

(SW) *любые две проволоки пересекаются не более одного раза.*

(Условие (SW) указано как необходимое и достаточное в [40] при описании двойственных соответствий между проволочными диаграммами и ромбическими разбиениями в более общей ситуации.)

Обозначим через  $\mathbf{SW}_n$  множество (изотопических классов) строгих вайрингов с  $n$  проволоками, где порядок следования концов проволок противоположен начальному (или, что то же самое, где любые две проволоки пересекаются ровно по разу). Выше было построено отображение из множества  $\mathbf{T}_n$  ромбических тайлингов в  $\mathbf{SW}_n$  и фактически показано, что это отображение биективно (переход от полосы  $\Pi$  к зоногону  $Z_n$  очевиден).

С каждой камерой  $C$  вайринга  $W$  свяжем подмножество  $sp(C)$  в  $[n]$  по правилу:  $sp(C)$  состоит из тех цветов  $i \in [n]$ , для которых проволока  $w_i$  проходит ниже, чем  $C$ . Соответственно, с вайрингом  $W$  свяжем систему  $Sp(W)$ , называемую *спектром*  $W$ , которая состоит из всех множеств  $sp(C)$ , где  $C$  пробегает камеры вайринга. Тогда  $Sp(W)$

совпадает со спектром соответствующего тайлинга  $T$ . С другой стороны, как в теореме 2.11, спектры строгих вайрингов – это в точности максимальные по включению сильно разделенные системы.

Подводя итог этой главы, можно сказать, что следующие четыре понятия: (i) строгий  $\Pi$ -базис; (ii) спектр ромбического тайлинга; (iii) спектр строгого вайринга; (iv) максимальная по включению сильно разделенная система множеств – приводят к одному и тому же классу объектов.

## 3 Вайринги

В предыдущей главе мы занимались строгими базисами. В этой главе мы начнем реализовывать аналогичную программу для общих (ручных, других мы не знаем)  $\Pi$ -базисов. По определению, ручные базисы связаны со стандартным базисом флипами. Стандартный базис реализуется простой проволочной диаграммой. Флипы тоже довольно просто представляются в терминах проволочных диаграмм (аналогичная реализация обобщенными ромбическими тайлингами возможна, но выглядит более тяжеловесно; см. раздел 3.7). Однако в общем случае после флипа условие SW нарушается. Поэтому нужно рассмотреть некое ослабление условия SW. Мы называем это ослабление аксиомой цикла, а соответствующие проволочные диаграммы – вайрингами. Мы увидим, что флипы переводят вайринги в вайринги. Важный факт состоит в том, что любые вайринги соединяются цепочкой флипов. Это доказывает основной результат этой главы, что вайринги дают в точности все ручные  $\Pi$ -базисы.

Связь вайрингов со слабо разделенными системами множеств будет рассмотрена в следующей главе.

### 3.1 Проволочные диаграммы

Начнем с напоминания, что такое проволочная диаграмма.

Как и ранее, мы рисуем вертикальную полосу  $\Pi$ , ограниченную левой вертикальной прямой  $L_\Pi$  и правой  $R_\Pi$ . *Проволокой* (в полосе  $\Pi$ ) мы называем гладкое инъективное (и с ненулевым дифференциалом) отображение  $w : [0, 1] \rightarrow \Pi$ , такое что  $w(0) \in L_\Pi$ ,  $w(1) \in R_\Pi$  и  $w(t)$  лежит строго внутри полосы при  $0 < t < 1$ . (В принципе, гладкость  $w$  особенно и не нужна. Достаточно было бы непрерывности или кусочной гладкости. А вот условие инъективности существенно, ибо исключает самопересечения. Параметризация же нужна для того, чтобы ввести направление на проволоке как на плоской кривой (которую мы тоже обозначаем  $w$ ); любая другая гладкая параметризация пойдет с тем же успехом.) По теореме Жордана проволока делит полосу  $\Pi$  на две части: левее  $w$  и правее  $w$  относительно ее ориентации.

*Проволочной диаграммой* называется система из  $n$  проволок  $w_1, \dots, w_n$ , находящихся в общем положении. Это означает, что

- а) проволоки пересекаются в конечном числе точек (называемых *кроссингами*), лежащих строго внутри  $\Pi$ ;
- б) в каждом кроссинге пересекаются ровно две проволоки и они имеют различные касательные (то есть скрещиваются, а не касаются).

Индекс  $i \in [n]$  проволоки  $w_i$  называется ее *цветом*. Начало проволоки  $i$ , то есть  $w_i(0)$ , обозначается как  $s_i$ ; конец – как  $t_i$ . В силу предположения а) точки  $s_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) на прямой  $L_\Pi$  различны и поэтому могут быть пронумерованы снизу вверх. Сопоставляя цвету  $i$  номер начальной точки  $s_i$ , мы получаем перестановку  $[n]$ , которую обозначим как  $\sigma$ . Аналогично поступая с концами проволок, мы получаем перестановку  $\tau$ . Поясним сказанное рисунком 10 проволочной диаграммы с 4 проволоками.

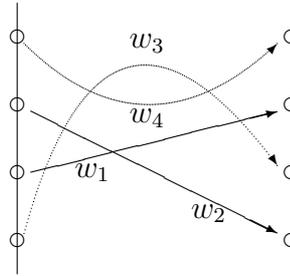


Рис. 10

Здесь начальная перестановка имеет вид  $\sigma = (2, 3, 1, 4)$ , а конечная  $\tau = (3, 1, 2, 4)$ .

Наиболее важен случай, когда перестановка  $\sigma = id$  тождественная, а  $\tau = di$  – т.н. обратная перестановка (когда  $i$  переходит в  $n-i+1$ ). Иными словами, проволока цвета 1 начинается в самой нижней точке, а заканчивается в самой верхней точке, и так далее. В этой и следующей главах мы будем заниматься только таким случаем. К общему случаю мы обратимся в главе 5.

Открытой камерой проволочной диаграммы  $W = (w_1, \dots, w_n)$  называется связная компонента дополнения к проволокам, то есть компонента  $\Pi - \bigcup_i w_i$ . *Камерой* называется замыкание открытой камеры. По теореме Жордана-Шенфлиса каждая камера гомеоморфна диску. Граница камеры состоит из кусков проволок (и возможно кусков левой или правой границы полосы  $\Pi$ ; камеры такого типа мы называем *граничными*), которые мы называем *ребрами* камеры. Кроме ориентации, ребра имеют цвета; цвет ребра – это цвет той проволоки, куском которого оно является. Довольно ясно, что две камеры могут иметь не более одного общего ребра.

Каждая точка  $x$ , не лежащая на проволоках, получает набор цветов, называемым *спектром* точки. Точнее,

$$sp(x) = \{i \in [n], x \text{ расположена левее проволоки } w_i\}.$$

Все точки внутри одной камеры  $C$  имеют один и тот же спектр, называемый *спектром камеры* и обозначаемый  $sp(C)$ . Например, самая нижняя камера имеет пустой спектр; самая верхняя –  $[n]$ . Камеры, примыкающие к левой границе полосы  $\Pi$ , в качестве спектра имеют начальные интервалы  $[p]$ ,  $0 \leq p \leq n$ ; для примыкающих к правой границе камер спектры имеют вид дополнений к  $[p]$  (вспомним про ожерелье). Одним словом,  $sp$  задает отображение из множества камер проволочной диаграммы в  $2^{[n]}$ .

В дальнейшем мы всюду рассматриваем диаграммы с точностью до изотопии.

Вернемся к камерам. Граница (внутренней) камеры состоит из (ориентированных) ребер. Если все ребра камеры ориентированы по часовой стрелке, мы называем камеру (почасово) *циклической*; если против часовой стрелки – то (противочасово) *циклической*. Остальные камеры (включая граничные) объявляются *нециклическими*. Множе-

ства вида  $sp(C)$ , где  $C$  пробегает нециклические камеры диаграммы  $W$ , образуют систему множеств, обозначаемую  $Sp(W)$  и называемую *спектром* проволочной диаграммы  $W$ . Такие системы множеств будут играть в дальнейшем главную роль. При этом надо наложить одно требование, которое выделяет интересующий нас подкласс проволочных диаграмм, именуемых далее вайрингами.

### 3.2 Вайринги

Обратимся к кроссингам, то есть точкам пересечения двух проволок  $w_i$  и  $w_k$ . В силу отсутствия самопересечений цвета  $i$  и  $k$  различны, и можно считать, что  $i < k$ . Пусть  $e_i$  и  $e_k$  – касательные вектора к  $w_i$  и  $w_k$  в этом кроссинге. Если вектор  $e_k$  повернут относительно  $e_i$  по часовой стрелке, мы называем кроссинг *нормальным*; в противном случае мы называем кроссинг *анти-нормальным* и на рисунках отмечаем его черным ромбом. Такая терминология объясняется тем, что легко представить проволочную диаграмму с нормальными кроссингами (таковы все строгие вайринги), но нельзя представить диаграмму без нормальных кроссингов. Ниже нарисованы (локальные) картины нормального (а) и анти-нормального (б) кроссинга (где, как обычно,  $i < k$ )

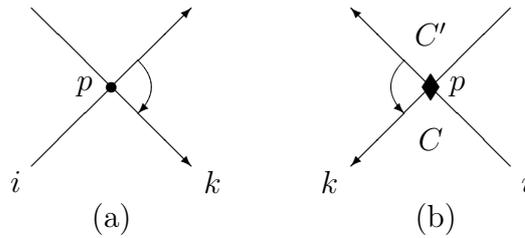


Рис. 11

Рассмотрим анти-нормальный кроссинг  $p$ , как на рисунке 11(b). К нему примыкают четыре камеры, в том числе “нижняя” камера  $C$  (в спектр которой входят цвета  $i$  и  $k$ ) и “верхняя” камера  $C'$ , в спектр которой цвета  $i$  и  $k$  не входят. В принципе эти камеры могли бы быть циклическими. Первая часть следующей *аксиомы циклов* утверждает, что они должны быть таковыми.

**Аксиома (СУС).** Для каждого анти-нормального кроссинга

- а) камеры  $C$  и  $C'$  циклические;
- б) если ребро камеры  $C$  или  $C'$  не смежно кроссингу  $p$ , то его цвет расположен строго между  $i$  и  $k$ .

Ясно, что “верхняя” камера  $C'$  почасовая, тогда как “нижняя”  $C$  – противочасовая. Легко понять, что  $sp(C) = sp(C') \cup \{i, k\}$ . Мы будем говорить, что эти две циклические камеры  $C$  и  $C'$  находятся в *тандеме*, причем нижняя камера  $C$  – противочасовая часть, а верхняя  $C'$  – почасовая часть этого тандема.

**Определение.** *Вайрингом* называется проволочная диаграмма (начинающаяся с тождественной перестановки и заканчивающаяся обратной перестановкой), удовлетворяющая аксиоме циклов СУС.

Например, строгий вайринг удовлетворяет аксиоме циклов потому, что в нем нет анти-нормальных кроссингов.

Вайринг называется *собственным*, если в нем отсутствуют циклы длины 2. Если в нем есть цикл длины 2, образованный проволоками  $i$  и  $k$ , то их можно “развести”. Легко понять, что “разведенная” диаграмма снова является вайрингом, причем имеющим тот же спектр. Продолжая этот процесс, можно избавиться от циклов длины 2. В дальнейшем мы будем заниматься главным образом собственными вайрингами.  $\mathbf{W}$  обозначает множество (изотопических классов) собственных вайрингов.

Приведем для иллюстрации несколько примеров.

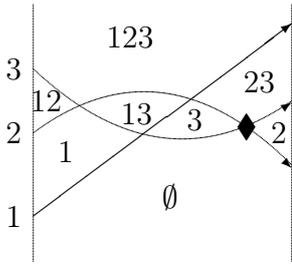


Рис. 12

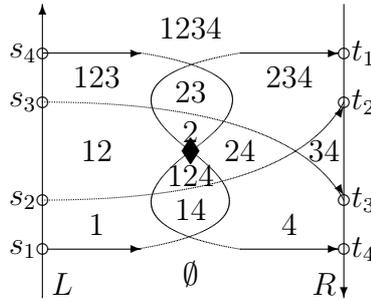


Рис. 13

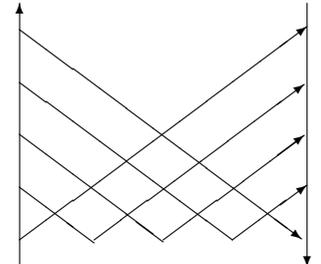


Рис. 14

**Пример 1.** Диаграмма с 3 проволоками на рисунке 12 НЕ является вайрингом.

**Пример 2.** На рисунке 13 изображен вайринг с четырьмя проволоками. Камеры 2 и 124 циклические.

**Пример 3.** На рисунке 14 изображен стандартного вайринга с 5-ю проволоками. Отметим, что в стандартном вайринге все кроссинги нормальные. Спектр стандартного вайринга состоит из всех интервалов в  $[n]$ .

Основной результат этой главы –

**Теорема 3.1** *Отображение  $Sp$  осуществляет биекцию между множеством  $\mathbf{W}$  вайрингов и множеством  $\mathbf{B}$  ручных  $\Pi$ -базисов.*

Иначе говоря, для любого вайринга  $W$  система  $Sp(W)$  является  $\Pi$ -базисом. И обратно, для любого (ручного)  $\Pi$ -базиса  $\mathcal{B}$  найдется (единственный с точностью до изотопии) собственный вайринг  $W$ , такой что  $\mathcal{B} = Sp(W)$ . Более того, как мы увидим (и это будет главным средством доказательства), это соответствие согласовано с флипами. Мы уже говорили в разделе 2.1 про системные флипы. В следующем разделе мы определим геометрические флипы для вайрингов.

### 3.3 Геометрические флипы и редукция вайрингов

Имеются две основные конструкции с вайрингами – (геометрические) флипы и редукция. Первая строит по вайрингу новый вайринг с тем же набором цветов. Вторая – редукция – строит вайринг с цветами из  $[n - 1]$ ; не менее полезна, конечно, и обратная конструкция, увеличивающая число цветов.

#### Флипы

Замечательной чертой вайрингов является то, что с ними можно производить локальные перестройки – *геометрические* флипы. А именно, предположим, что вайринг  $W$  имеет локальный  $\nabla$ -фрагмент типа нарисованного слева на рис. 15, причем  $i < j < k$ .

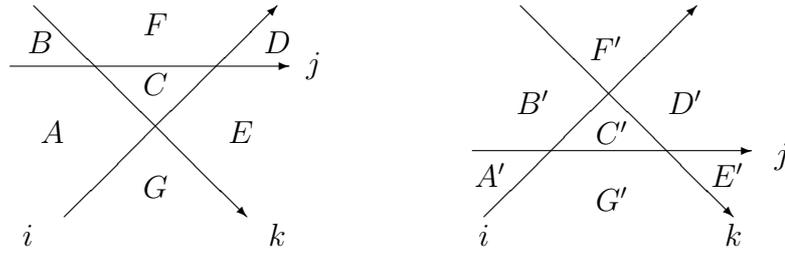


Рис. 15

Иначе говоря, имеется “треугольная” камера  $C$  (типа  $\nabla$ ), окруженная шестью другими камерами  $A, B, F, D, E$  и  $G$ . Опустим проволоку  $w_j$  ниже кроссинга  $ik$ ; в результате мы получим новый фрагмент (типа  $\Delta$ ) и новую проволочную диаграмму  $W'$ . Конечно, нарисованные камеры изменились, у них появились или исчезли некоторые ребра. Но изменения у камер, отличных от  $C$  и  $C'$ , минимальны. А именно, если камера была циклической, она остается такой же. Отсюда легко проверить, что  $W'$  является вайрингом. Кроме того спектры камер  $A, B, F, D, E$  и  $G$  не меняются. Что же касается камеры  $C$ , то она просто исчезает и вместо нее появляется камера  $C'$ . Обе они нециклические. Если спектр камеры  $G$  обозначить как  $X$ , то  $sp(C) = Xik$ , а  $sp(C') = Xj$ . И все это происходит в присутствии четырех ‘свидетелей’ – нециклических камер  $A, B, D, E$  со спектрами  $Xi, Xij, Xik$  и  $Xk$ . Иначе говоря, *понижающий геометрический флип* с вайрингом  $W$  превращается в понижающий системный флип для  $Sp(W)$ .

Здесь стоит сделать одно уточнение. Даже если исходный вайринг  $W$  был собственным, новый вайринг  $W'$  может оказаться несобственным. В самом деле, камера  $F'$  может оказаться циклической линзой, граница которой состоит ровно из двух ребер цвета  $i$  и  $k$ . Если мы разведем эту линзу как на рис. 16 справа

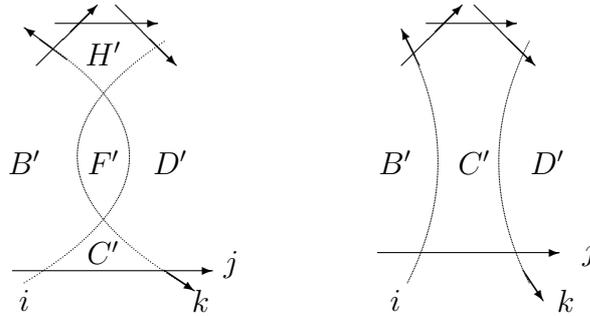


Рис. 16

мы получим уже собственный вайринг. И если мы работаем в классе собственных вайрингов, то именно этот вайринг нужно считать результатом понижающего флипа.

Обратное преобразование называется *повышающим геометрическим флипом*. Оно производится, когда у нас есть фрагмент как на рисунке 15 справа. Либо (и это важно отметить), как на рисунке 16 справа, когда “наверху имеется заготовка для будущего цикла”. Мы переплетаем проволоки  $i$  и  $k$ , получаем дельта-треугольник как на рис. 15 справа, и затем делаем уже настоящий повышающий флип (сопровождается, быть может, расплетанием пустой линзы).

Геометрические флипы позволяют ввести структуру посета на множестве  $\mathbf{W}$  собственных вайрингов. А именно, будем писать  $W \geq W'$ , если  $W'$  получается из  $W$  серией понижающих флипов. Стандартный вайринг является, очевидно, одним из минимальных элементов посета  $\mathbf{W}$ ; у него нет понижающих флипов. Из теоремы 3.1 будет следовать, что стандартный вайринг является единственным минимальным элементом посета  $\mathbf{W}$ .

Основная теорема 3.1 (о биективности отображения  $Sp : \mathbf{W} \rightarrow \mathbf{B}$ ) является следствием двух утверждений, которые мы докажем позже.

Первое утверждение – теорема о существовании флипов: *если вайринг  $W$  не строгий, то с ним можно сделать понижающий флип*. Более точная формулировка и доказательство приведены в разделе 4.5. Вместе с теоремой 2.5 это доказывает, что  $W$  соединяется понижающими флипами со стандартным вайрингом. В частности, система множеств  $Sp(W)$  соединяется цепочкой понижающих флипов со стандартным базисом  $Int$  и поэтому является  $\Pi$ -базисом. Это дает отображение  $Sp : \mathbf{W} \rightarrow \mathbf{B}$ . Заметим, что это отображение инъективное в силу единственности поднятия флипов на уровень вайрингов (см. ниже Предложение 3.5).

Второе утверждение (см. ‘применение к флипам’ из раздела 3.5) заключается в том, что *если мы делаем системный флип с системой множеств  $Sp(W)$ , то можно сделать соответствующий геометрический флип с вайрингом  $W$* . Отсюда следует сюръективность отображения  $Sp : \mathbf{W} \rightarrow \mathbf{B}$ .

#### *Редукция*

Для проведения индуктивных рассуждений с вайрингами мы используем следующую конструкцию. Пусть дан вайринг  $W = (w_1, \dots, w_n)$  с  $n$  цветами. Удалим проволоку  $w_n$  старшего цвета  $n$ . Получается проволочная диаграмма  $\widetilde{W} = (w_1, \dots, w_{n-1})$  с  $n - 1$  цветом. Такую операцию назовем *редукцией* (удалением) *цвета  $n$* . Простое замечание состоит в том, что это снова вайринг, то есть выполнена аксиома циклов.

В самом деле, пусть  $p$  – кроссинг в  $\widetilde{W}$ , точка пересечения проволок  $w_i$  и  $w_j$  ( $i, j < n$ ). Тогда  $p$  – кроссинг и в  $W$ . Рядом с  $p$  (в аранжменте  $W$ ) была марьяжная пара циклических камер  $C$  и  $C'$ . Причем цвета всех ребер  $C$  и  $C'$  лежали между  $i$  и  $j$  (часть  $b$  аксиомы циклов для  $W$ ), а значит все были меньше  $n$ . Но тогда все эти ребра присутствуют и в  $\widetilde{W}$ , так что  $C$  и  $C'$  являются камерами и для  $\widetilde{W}$ . И аксиома циклов выполнена для  $\widetilde{W}$ .

Это же рассуждение показывает, что если  $W$  – собственный вайринг, то и  $\widetilde{W}$  собственный вайринг.

Разумеется, все сказанное остается верным и для редукции цвета 1.

Позже, в разделе 3.6, мы рассмотрим обратную задачу: как, имея  $(n - 1)$ -цветный вайринг, правильно вставить проволоку цвета  $n$ , чтобы получить  $n$ -цветный вайринг. В случае строгих вайрингов эта задача фактически была решена в разделе 2.4, и полученное там решение подсказывает ответ в общем случае. Дело в том, что при редукции (удалении) проволоки  $w_n$  в вайринге  $\widetilde{W}$  остается ее “след” или “трасса”, состоящая из камер, которые слились в результате удаления проволоки  $w_n$ . В разделе 3.6 мы обсудим правильные условия на “трассу”, внутри которой можно провести проволоку  $w_n$ .

### 3.4 Элементарные свойства вайрингов

Аксиома циклов, выделяющая вайринги среди общих проволочных диаграмм, имеет разнообразные следствия. В этом разделе мы не будем предполагать, что вайринг ре-

ализует обратную перестановку. Поэтому полученные здесь факты применимы и для более общих проволочных диаграмм из главы 5.

*Структура циклических камер.* Пусть  $C$  – циклическая, и для определенности – почасовая, камера вайринга, так что все ребра ее границы ориентированы по часовой стрелке. Выпишем эти ребра  $p_1p_2, p_2p_3, \dots, p_kp_1$  и их цвета:  $i_1, i_2, \dots, i_r, i_{k+1} = i_1$ . Ясно, что цвета соседних ребер различаются. Кроссинг  $p_k$  нормальный, если  $i_{k-1} < i_k$ , и анти-нормальный, если  $i_{k-1} > i_k$ . Так как числа по циклу не могут все время возрастать, имеется кроссинг  $p_k$ , где  $i_{k-1} > i_k$ , так что кроссинг  $p_k$  анти-нормальный. Меняя нумерацию, можно считать, что это  $p_1$ . Применяя к этому кроссингу аксиому циклов СУС(b), мы видим, что остальные числа-цвета  $i_2, \dots, i_{k-1}$  лежат строго между  $i_1$  и  $i_k$ ,  $i_1 < i_2, \dots, i_{k-1} < i_k$ . Других анти-нормальных кроссингов среди  $p_j$  нет, потому что иначе  $i_1$  или  $i_k$  были бы между других  $i_{j-1}$  и  $i_j$ , что невозможно. Поэтому числа  $i_1, \dots, i_k$  строго возрастают и, в частности, все различны.

Аналогично для противочасовой циклической камеры. Снова среди ее кроссингов есть один анти-нормальный. Но теперь, если мы двигаемся вдоль направления ребер (то есть против часовой стрелки), то цвета ребер убывают. В любом случае ровно один кроссинг на границе циклической камеры анти-нормальный. Так что каждая почасовая циклическая камера является почасовой частью ровно в одном тандеме. Такая камера может, впрочем, иметь общий (и нормальный) кроссинг с противочасовой частью из другого тандема.

В (нестрогом) вайринге две проволоки могут пересекаться многократно. Важное свойство вайрингов состоит в том, что проволоки не могут пересекаться ‘попутно’. Если на одной проволоке кроссинг  $p$  встречается раньше, чем кроссинг  $q$ , то на другой проволоке  $p$  располагается позже  $q$ . Иными словами, проволоки могут пересекаться только навстречу друг другу.

**Предложение 3.2** *Проволоки не имеют попутных пересечений.*

*Доказательство.* Предположим что проволоки  $w_i$  и  $w_k$  пересеклись попутно, как на рис. 17, сначала в точке  $p$ , а затем в точке  $q$ .

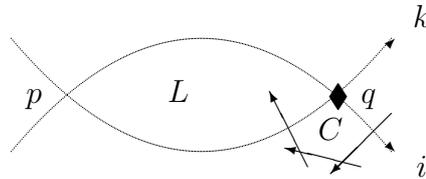


Рис. 17

Для начала покажем, что существует проволока  $w_j$  с цветом  $j$  строго между  $i$  и  $k$ , которая входит внутрь линзы, образованной кусками проволок  $w_i$  и  $w_k$  между  $p$  и  $q$ . Один из кроссингов  $p$  или  $q$  анти-нормальный, допустим, что это  $q$  (так что  $i < k$ ). Ниже кроссинга  $q$  расположена почасовая циклическая камера  $C$ . Предпоследнее ребро этой камеры пересекает кусок проволоки  $w_k$ , причем на участке  $pq$ . По аксиоме циклов, цвет  $j$  этого ребра лежит строго между  $i$  и  $k$ .

Будем теперь рассматривать только те куски проволок, которые входят (и выходят) в данную линзу и имеют номера строго между  $i$  и  $k$ . Каждый такой кусок  $w_j$  дважды пересекает границу линзы (через  $w_i, w_k$  или через то и другое). Независимо от того, как этот кусок пересекает границу, один из концов куска является нормальным кроссингом, а другой – анти-нормальным. Так что нормальных кроссингов столько же, сколько анти-нормальных. Причем по первой части доказательства это число отлично от нуля. С другой стороны (как снова видно из аксиомы циклов) каждый такой анти-нормальный кроссинг окружен с двух сторон нормальными кроссингами. Поэтому нормальных кроссингов строго больше, чем анти-нормальных. Противоречие.  $\square$

**Замечание.** Только что мы вывели из аксиомы циклов отсутствие попутных пересечений. Можно показать, что верно и обратное: аксиома СУС(a) плюс аксиома об отсутствии попутных пересечений влекут аксиому СУС(b). Так что можно иначе аксиоматизировать вайринги.

**Предложение 3.3** *Ребра любой камеры собственного вайринга имеют разные цвета.*

Доказательство чем-то похоже на предыдущее рассуждение. Пусть некая камера  $F$  ограничивается проволокой  $w_j$ , причем по нескольким ребрам цвета  $j$ . Мы получаем такую картину

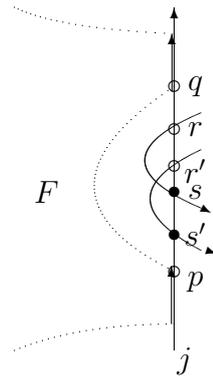


Рис. 18

Здесь проволока  $w_j$  идет вверх, а камера  $F$  лежит слева от нее; нарисованы два последовательных ребра цвета  $j$ . Одно кончается в кроссинге  $p$ , другое начинается в кроссинге  $q$ . От  $p$  до  $q$  на рисунке 18 пунктиром идет кусок границы камеры  $F$ .

Рассмотрим область, ограниченную куском проволоки  $w_j$  от  $p$  до  $q$  и куском границы  $F$  от  $q$  до  $p$ . Любая проволока, которая входит в эту область (пересекая кусок проволоки  $w_j$  от  $p$  до  $q$ ), выходит из этой области через тот же кусок проволоки. Причем соответствующие кроссинги нормальны и анти-нормальны. Поэтому нормальных кроссингов на этом куске проволоки столько же, сколько анти-нормальных. Причем это не могут быть только точки  $p$  и  $q$ . Потому что иначе мы получили бы пустую линзу-цикл длины 2, что противоречит собственности вайринга. Далее рассуждаем как в Предложении 3.2. Каждый анти-нормальный кроссинг окружен двумя нормальными (тоже лежащими на куске  $w_j$  между  $p$  и  $q$ ), так что таких кроссингов строго больше. Противоречие.

*Применение к редукции.* Сделаем простое замечание о том, как меняются камеры вайринга при редукции (удалении) цвета  $n$ . Пусть  $A$  – камера вайринга  $W$ . Если у нее не было ребра цвета  $n$ , то  $A$  остается камерой редуцированного вайринга  $\widetilde{W}$ . Если же у  $A$  есть ребро цвета  $n$  (причем одно, согласно Предложению 3.3), то обозначим через  $A'$  соседнюю (по этому ребру) с  $A$  камеру. Утверждается, что  $\widetilde{A} = A \cup A'$  является камерой редуцированного вайринга  $\widetilde{W}$ . В самом деле,  $A'$  тоже имеет единственное ребро цвета  $n$ , и  $(A')' = A$ .

И так получают все камеры вайринга  $\widetilde{W}$ .

**Предложение 3.4** *Если камера  $\widetilde{A}$  отлична от  $A$  (то есть  $\widetilde{A} = A \cup A'$ , где  $A'$  соседняя с  $A$  по ребру  $n$ ), то камера  $\widetilde{A}$  редуцированного вайринга  $\widetilde{W}$  нециклическая.*

В самом деле, предположим, что камера  $\widetilde{A}$  циклическая. Тогда (согласно утверждению о структуре циклических камер применительно к редуцированному вайрингу  $\widetilde{W}$ ) на ее границе есть анти-нормальный кроссинг, точка пересечения двух проволок цвета  $i$  и  $k$ , отличных от  $n$ . Эта точка является анти-нормальным кроссингом (в вайринге  $W$ ) для камеры  $A$  или  $A'$ . Но тогда все ребра этой камеры ( $A$  или  $A'$ ) имеют цвета строго между  $i$  и  $k$  (аксиома СУС(b)), что противоречит тому, что обе эти камеры имеют граничное ребро цвета  $n$ .

**Предложение 3.5** *Если для камер  $A$  и  $B$  собственного вайринга выполнено  $sp(A) = sp(B)$ , то  $A = B$ .*

Это свойство позволяет вместо указания камеры указывать только ее спектр.

*Доказательство.* Произведем редукцию цвета  $n$ . Редуцированный вайринг обозначим  $\widetilde{W}$ ; он имеет  $n - 1$  цвет, и поэтому можно считать, что предложение для него верно. Для камеры  $A$  вайринга  $W$  обозначим через  $\widetilde{A}$  камеру  $\widetilde{W}$ , содержащую  $A$ . Ясно, что  $sp(\widetilde{A}) = sp(A) - n$ . Поэтому  $sp(\widetilde{A}) = sp(\widetilde{B})$  и по индуктивному предположению  $\widetilde{A} = \widetilde{B}$ . Если  $\widetilde{A} = A$ , тогда очевидно, что и  $\widetilde{B} = B$ , так что  $A = B$ .

Таким образом остается рассмотреть тот случай, когда  $\widetilde{A} = A \cup A'$ , где  $A'$  – камера, соседняя с  $A$  по ребру цвета  $n$ . Снова по индукции  $\widetilde{A} = \widetilde{B}$ . Это означает, что либо  $A = B$  (и тогда все доказано), либо  $B = A'$ . Но последний случай невозможен, поскольку спектры камер  $A$  и  $A'$  различаются ровно на цвет  $n$ , что противоречит предположению об одинаковости спектров  $A$  и  $B$ .  $\square$

Следующее свойство полезно для геометрической реализации системных флипов. Представим, что камеры  $A$  и  $B$  соседние по ребру  $j$ . Тогда их спектры отличаются ровно на  $j$ . Обратное утверждение в общем случае не верно. Тем не менее имеет место

**Предложение 3.6** *Пусть  $A$  и  $B$  – нециклические камеры собственного вайринга, и их спектры отличаются лишь цветом  $j$ . Тогда  $A$  и  $B$  имеют общее ребро цвета  $j$ .*

*Доказательство.* Пусть  $j = n$ . Выбросим проволоку  $n$ . Тогда у камер  $\widetilde{A}$  и  $\widetilde{B}$  редуцированного вайринга  $\widetilde{W}$  спектры одинаковые; кроме того эти камеры нециклические (см. Предложение 3.4). По индукции мы заключаем, что  $\widetilde{A} = \widetilde{B}$ . Значит  $A' = B$ , а  $A$  и  $A'$  по определению делят ребро  $n$ .

Пусть теперь  $j < n$ . Снова выбрасываем проволоку  $n$  и рассматриваем “объединенные” камеры  $\tilde{A}$  и  $\tilde{B}$  редуцированного вайринга  $\tilde{W}$ . Снова камеры  $\tilde{A}$  и  $\tilde{B}$  нециклические. По индукции камеры  $\tilde{A}$  и  $\tilde{B}$  соседние в  $\tilde{W}$  по ребру  $j$ . Это значит, что либо  $A$  и  $B$  соседние по ребру  $j$  и все доказано, либо соседями по ребру  $j$  являются камеры  $A'$  и  $B'$ , как на рисунке 19.

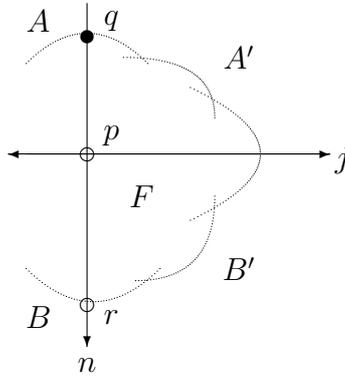


Рис. 19

Проволока  $j$  входит или выходит из области  $F$ , ограниченной проволокой  $n$  и кусками границ  $A'$  и  $B'$ . Поэтому она пересекает проволоку  $n$  в некоторой точке  $p$ . Если  $p$  лежит на границе  $A$  (или  $B$ ), то все доказано. Предположим, что она лежит внутри, между точками  $q$  и  $r$ . В точке  $q$  проволоку  $n$  пересекает проволока с номером-цветом  $k$  (отличным от  $j$ ). Если она пересекает  $n$  слева направо, она входит в область  $F$  и должна оттуда выйти. Выйти она может только ниже, но тогда мы получаем попутное пересечение с проволокой  $n$ . Значит она пересекает проволоку  $n$  справа налево. В этом случае точка  $q$  является анти-нормальным кроссингом, а значит (аксиома циклов) камера  $A$  циклическая. Противоречие.  $\square$

### 3.5 Структура нециклических камер

Мы уже видели, как устроена граница циклической камеры. Если двигаться вдоль границы по часовой стрелке, начиная от анти-нормального кроссинга, то индексы-цвета ребер возрастают. Следующее предложение описывает строение нециклических камер собственного вайринга.

**Предложение 3.7** Пусть  $C$  – нециклическая (и не граничная) камера. При обходе ее границы по часовой стрелке выделяются четыре зоны: “потолок”, где ребра ориентированы по часовой стрелке, “правая колонна”, где ориентация ребер меняется через раз, “пол”, где ориентация ребер направлена против часовой стрелки, и “левая колонна”, где снова ориентация альтернирует.

Кроме того, в левой и правой “колонне” через раз стоит анти-нормальный кроссинг, а на потолке и полу все кроссинги нормальные.

(“Правая” и/или “левая” колонны могут вырождаться (отсутствовать), “потолок” и “пол” обязательно присутствуют хотя бы одним ребром.) Так что картина как на рис. 20.

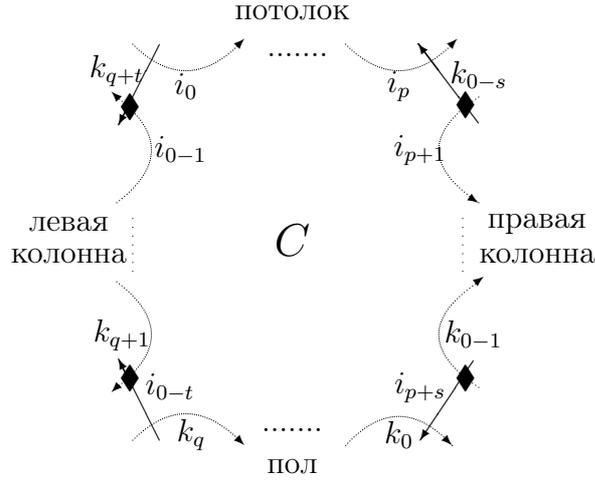


Рис. 20

Если камера граничная (и примыкает к левой границе, скажем), то левая колонна заменяется куском левой граничной прямой  $L$ . Аналогично для правой колонны.

**Следствие 3.8** По левой и правой колонне камера  $C$  смежна циклическим камерам. Если  $p > 0$ , то сверху к  $C$  примыкают нециклические камеры. Если  $q > 0$ , снизу к  $C$  примыкают нециклические камеры. (Здесь  $p$  и  $q$  как на рис. 20.)

Это видно из рисунка 20 и свойств анти-нормальных кроссингов. (Если  $p = 0$ , то сверху к  $C$  может примыкать циклическая камера. Аналогично при  $q = 0$ .)

**Следствие 3.9** Занумеруем ребра камеры  $C$ , ориентированные по часовой стрелке, их цветами  $i_{0-t}, \dots, i_0, \dots, i_p, \dots, i_{p+s}$ , а ребра, ориентированные против часовой стрелки, цветами  $k_{0-s}, \dots, k_0, \dots, k_q, \dots, k_{q+t}$  (см. рис. 20). Тогда

- a)  $i_*$  возрастают,
- b)  $k_*$  возрастают,
- c)  $k_{j-s} < i_{s+j}$  при  $j = 0, \dots, s$ ;
- d)  $i_{j-t} < k_{q+j}$  при  $j = 0, \dots, t$ .

Следует из строения границы циклических камер.

*Доказательство* Предложения 3.7 проводим по индукции. Предположим, что утверждение верно для  $n - 1$  проволоки (основание индукции снова тривиально).

Пусть  $C$  – нециклическая камера в  $n$ -вайринге  $W$ . Удалим  $n$ -ю проволоку. Если граница  $C$  не содержала ребро цвета  $n$ , тогда  $C$  будет камерой в редуцированном вайринге  $\widetilde{W}$  и утверждение получается из индукции. Предположим, что граница  $C$  содержит ребро цвета  $n$ . Обозначим соседнюю с  $C$  по этому ребру камеру как  $C'$  и рассмотрим “объединенную” камеру  $\widetilde{C} = C \cup C'$  вайринга  $\widetilde{W}$ . Из Предложения 3.4 мы знаем, что  $\widetilde{C}$  нециклическая. По индукции она имеет вид как на рис. 7.

Посмотрим теперь, как проволока  $n$  может пересекать камеру  $\widetilde{C}$ . Через боковые стенки она не может входить или выходить, потому что согласно Следствию 3.8 там находятся циклические камеры вайринга  $\widetilde{W}$ . Поэтому остаются 4 случая, которые мы рассмотрим отдельно.

**Случай 1.** Проволока входит через потолок и выходит через пол камеры  $\tilde{C}$ . Такое вполне может быть. Но тогда  $\tilde{C}$  разрезается на две камеры  $C$  и  $C'$ . Пусть  $C$  расположена “справа” от проволоки  $n$ . Тогда ее левая колонна совпадает с левой колонной  $\tilde{C}$ , потолок состоит из  $i_0, \dots, i_\gamma$  (где  $i_\gamma$  – то ребро, через которое входит наша проволока) и  $n$ . Правая сторона отсутствует; пол имеет вид  $k_\gamma, \dots, k_q$  (где  $k_\gamma$  – то ребро, через которое проволока выходит).

Аналогично устроена вторая половина  $\tilde{C}$ .

**Случай 2,** когда проволока  $n$  входит через пол, а выходит через потолок, невозможен. В самом деле, тогда и точка входа, и точка выхода – антинормальные кроссинги. Получается, что обе камеры  $C$  и  $C'$  циклические, что явно не так.

**Случай 3.** Проволока  $n$  входит снизу и выходит снизу. Пусть  $r$  – то “нижнее” ребро камеры  $\tilde{C}$ , через которое проволока входит. Как уже говорилось, точка входа антинормальная. Значит вправо-вниз от нее камера циклическая. Что может быть только если  $r = k_0$ . Пусть проволока выходит через “нижнее” же ребро  $k_\gamma$ . Ребра  $n, k_\gamma, \dots, k_0$  ограничивают циклическую область  $C'$ . Значит  $C$  – вторая половина  $\tilde{C}$ . Ее левая колонна как у  $\tilde{C}$ , потолок тоже, правая колонна получается из правой колонны  $\tilde{C}$  добавлением ребер  $k_0$  и  $n$ , которое полагается равным новому  $i_{p_{s+1}}$ . Пол образован  $k_\gamma, \dots, k_q$ .

**Случай 4.** Проволока  $n$  входит сверху и выходит сверху. Рассуждения как в случае 3, только выходит  $w_n$  через первое верхнее ребро  $i_0$ .  $\square$

#### Применение к флипам

Покажем, что если  $W$  – собственный вайринг, то системный флип в  $Sp(W)$  поднимается до геометрического флипа в  $W$ . Для определенности будем обсуждать повышающий флип. Пусть в спектре вайринга  $W$  мы имеем пять множеств  $Xi, Xij, Xj, Xjk$  и  $Xk$  (как всегда,  $i < j < k$  и не содержатся в  $X$ ); системный флип заменяет  $Xj$  на  $Xik$ . По определению, вайринг  $W$  содержит пять нециклических камер  $A, B, C, D$  и  $E$  со спектрами  $Xi, Xij, Xj, Xjk$  и  $Xk$ . В силу Предложения 3.6, эти камеры по цепочке соседние, так что мы имеем картинку как на рис. 21

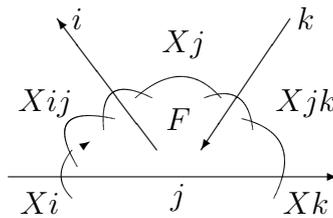


Рис. 21

Рассмотрим камеру  $Xij$  и ее ребра цвета  $i$  и  $j$ . Оба ориентированы против часовой стрелки (если смотреть на них изнутри камеры  $Xij$ ). По этим ребрам данная камера соседствует с нециклическими камерами  $Xi$  и  $Xj$ . Значит эти ребра не принадлежат “колоннам” камеры  $Xij$ , а лежат на “полу”. Но тогда и все промежуточные между ними ребра лежат на “полу” камеры  $Xij$  и тоже ориентированы против часовой стрелки. В частности, это относится и к первому ребру, идущему вслед за  $j$ . Мы утверждаем, что это в точности и есть ребро  $i$ . В самом деле, предположим, что это ребро имеет другой цвет. Проволока, на которой лежит это ребро, должна покинуть область  $F$ , и

единственная возможность для нее сделать это – пересечь проволоку цвета  $j$ . Но тогда и мы получим попутное пересечение, вопреки Предложению 3.2.

Таким образом, проволока  $i$  является ребром не только камеры  $Xij$ , но и  $Xi$ . Аналогично для проволоки  $k$ . Те же рассуждения дают, что проволоки  $i$  и  $k$  составляют часть “потолка” камеры  $Xj$ . Так что рис. 21 в действительности выглядит как показано на рис. 22

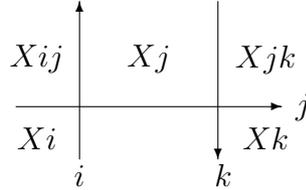


Рис. 22

Таким образом мы находимся в ситуации, когда можно сделать геометрический поднимающий флип, заменяющий  $Xj$  на  $Xik$ . Это доказывает второе утверждение, нужное для Теоремы 3.1.

### 3.6 Редукция и анти-редукция вайрингов

Завершим эту главу про вайринги обсуждением операции, обратной к редукции  $n$ -го цвета, операции вставки проволоки цвета  $n$  в  $(n - 1)$ -вайринг.

Вернемся к операции редукции цвета  $n$ . Удаляя проволоку цвета  $n$  из  $n$ -вайринга  $W$ , мы получаем  $(n - 1)$ -вайринг  $\widetilde{W}$ . Но кроме того мы получаем также трассу  $\mathcal{T}$  в  $\widetilde{W}$ , то есть цепочку камер в  $\widetilde{W}$ , идущую из верхней камеры  $[n - 1]$  в нижнюю камеру  $\emptyset$ . Это камеры в  $\widetilde{W}$ , через которые проходила проволока  $w_n$ , то есть камеры вида  $\widetilde{A} = A \cup A'$ . Эта трасса позволяет восстановить исходный вайринг  $W$ . Скажем об этом подробнее.

В исходном вайринге  $W$  рассмотрим проволоку  $w_n$ . Она разрезается другими проволоками (или кроссингами) на последовательные куски  $M_1, \dots, M_r$  (начиная от источника  $s_n$  и кончая стоком  $t_n$ ). Каждый кусок  $M_s$  проволоки  $w_n$  окружен камерой  $A_s$  (находящейся справа от  $w_n$ ; спектр ее не содержит  $n$ ) и камерой  $A'_s$  (находящейся слева от  $w_n$  и содержащей в спектре цвет  $n$ ). В редуцированном вайринге  $\widetilde{W}$  эти две камеры сливаются в одну  $\widetilde{A}_s = A_s \cup A'_s$ , причем нециклическую (Предложение 3.4). Вот эта последовательность нециклических камер  $\widetilde{A}_1, \dots, \widetilde{A}_r$  и образует трассу. Ясно, что камеры  $\widetilde{A}_s$  и  $\widetilde{A}_{s+1}$  соседние.

Понятно, что такая трасса позволяет восстановить (с точностью до изотопии) исходный вайринг  $W$ . Для этого мы должны провести в каждой камере  $\widetilde{A}_s$  кусок “новой проволоки цвета  $n$ ”, провести его из “середины” общего ребра  $\widetilde{A}_s$  с  $\widetilde{A}_{s-1}$  в “середины” общего ребра  $\widetilde{A}_s$  с  $\widetilde{A}_{s+1}$  (при  $s = 1$  мы должны начинать с источника  $s_n$  на левой стороне полосы  $\Pi$ ; при  $s = r$  должны кончать в стоке  $t_n$ ).

Дадим теперь ‘абстрактное’ определение трассы. Для этого мы заметим, что трасса проволоки цвета  $n$  обладает следующими свойствами 0)–3).

- 0) Она начинается с верхней камеры  $[n - 1]$  и кончается в нижней камере  $\emptyset$ .
- 1) Она проходит по нециклическим камерам вайринга  $\widetilde{W}$ .
- 2) Она образует непрерывную цепь в том смысле, что соседние звенья цепи действительно являются соседними камерами.

3) Рассмотрим три последовательных звена этой цепи,  $A_{s-1}$ ,  $A_s$  и  $A_{s+1}$ . Тогда возможны (см. доказательство Предложения 3.7) три случая (см. рис. 23):

3а)  $A_{s-1}$  соседняя с  $A_s$  по “потолку”, а  $A_{s+1}$  – по “полу”;

3б)  $A_{s-1}$  примыкает к  $A_s$  по последнему ребру  $k_0$  “пола”, а  $A_{s+1}$  по какому-то “напольному” ребру;

3с)  $A_{s-1}$  примыкает к  $A_s$  по “потолочному” ребру, а  $A_{s+1}$  – по первому “потолочному” ребру камеры  $A_s$ .

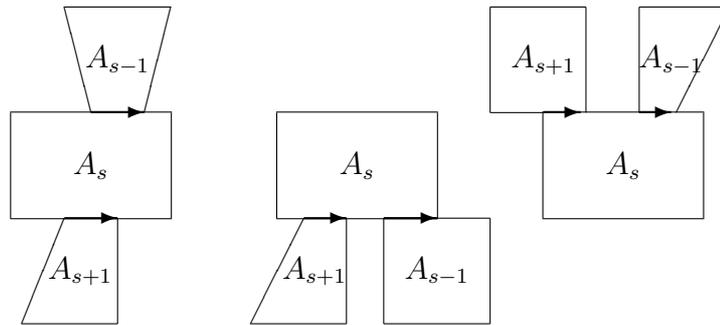


Рис. 23

Обратно, пусть у нас есть  $(n - 1)$ -вайринг  $\widetilde{W}$  и трасса в нем (то есть выполнены свойства 0)-3)). Проведем внутри трассы проволоку цвета  $n$  как это объяснялось выше. Можно проверить (снова см. доказательство Предложения 3.7), что получится вайринг. Это позволяет строить вайринги на единицу большего размера. См. Рис. 24

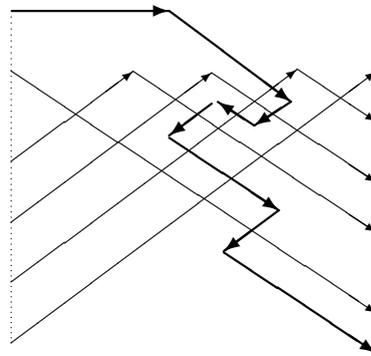


Рис. 24. Анти-редукция. Здесь тонкими линиями нарисован исходный 5-вайринг, а толстой линией – вставленная проволока цвета 6.

Итог этого обсуждения можно подвести в следующем

**Предложение 3.10** *Существует естественная биекция между множеством собственных  $n$ -вайрингов и множеством пар (собственный  $(n - 1)$ -вайринг, трасса в нем).*

### 3.7 Обобщенные ромбические тайлинги

Во второй главе мы работали с ромбическими тайлингами и лишь вскользь упомянули про дуальный язык строгих вайрингов. В этой главе мы, напротив, исследовали вайринги. Однако и тут возможно дуальное описание, приводящее к ромбическим замощениям зоногона ромбами двух типов. Теперь ромбы могут перекрываться, и мы называем возникающие структуры *обобщенными (ромбическими) тайлингами*. Отметим, что в работах [17, 18] изложение велось именно на языке обобщенных тайлингов.

Как и раньше, переход от вайринга к обобщенному тайлингу состоит в том, что кроссинги вайринга превращаются в ромбы тайлинга. Только теперь нормальным кроссингам сопоставляются “нормальные” ромбы (мы их называем *белыми*), а анти-нормальным кроссингам – “перевернутые” ромбы (мы их называем *черными*). “Перевернутость” означает, что при проекции  $\xi$  ориентация соответствующего квадрата меняется на противоположную. Дело в том, что тайлинги (как и обобщенные тайлинги) можно интерпретировать как некоторые двумерные пленки в кубе  $[0, 1]^n$ , составленные из двумерных граней куба (смотри также [2, 31]). Эти пленки, натянутые на каркас-ожерелье, гомеоморфны двумерному диску. При проекции на зоногон ориентация некоторых ромбов меняется и образуются складки. От этих наводящих соображений теперь перейдем к строгим определениям.

Как и в разделе 2.2, мы рассматриваем зоногон  $Z_n$ . Как и раньше, ромбом (или *плиткой*) мы называем параллелограмм вида  $\xi(S) + [0, \xi_i] + [0, \xi_j]$ , где элементы  $i \neq j$  не принадлежат  $S \subset [n]$ . *Обобщенный тайлинг* – это множество  $T$  плиток в зоногоне  $Z_n$ , разбитое на два подмножества: белых плиток  $T^w$  и черных плиток  $T^b$  и удовлетворяющее аксиомам (Т1)–(Т4), которые мы формулируем ниже.

(Т1) Каждое ребро, лежащее на границе зоногона, является ребром ровно одной белой плитки. Любое ребро плитки, если оно не граничное для зоногона, является ребром ровно одной другой плитки.

Если мы возьмем плитки из  $T$  отдельно и склеим их по общим ребрам, мы получим некую двумерную поверхность (“пленку”)  $D_T$  с границей, изоморфной границе зоногона.

(Т2)  $D_T$  гомеоморфно двумерному диску.

(Т3) Если две белые плитки имеют общее ребро, они не перекрываются. Черные плитки не могут иметь общее ребро. Если белая и черная плитки имеют общее ребро, они перекрываются.

Ниже нарисованы некоторые возможные расположения соседних плиток; черные плитки нарисованы более толсто.

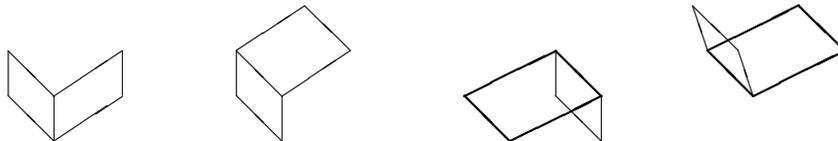


Рис. 25

Для плитки  $\tau$  обозначим через  $b(\tau)$  нижнюю вершину плитки (то есть  $\xi(S)$  в обозначениях выше) и через  $t(\tau)$  верхнюю вершину плитки (то есть  $\xi(S_{ij})$ ).

(Т4) Пусть  $\tau$  – черная плитка. Если  $b(\tau)$  является вершиной другой плитки  $\tau'$ , то  $b(\tau') = b(\tau)$  и плитка  $\tau'$  белая. Аналогично если  $t(\tau)$  является вершиной другой плитки  $\tau'$ , то  $t(\tau') = t(\tau)$  и плитка  $\tau'$  снова белая.

Верхние и нижние вершины черных плиток называются *терминальными* вершинами, остальные вершины называются *обыкновенными*. Подмножества в  $[n]$ , соответствующие обыкновенным вершинам, образуют *спектр*  $Sp(T)$  обобщенного тайлинга  $T$ .

Скажем теперь, как по (собственному) вайрингу строится обобщенный тайлинг. Как уже говорилось, с каждым кроссингом естественным способом связывается плитка, белая – в случае нормального кроссинга, и черная – в случае анти-нормального. Камеры вайринга превращаются в вершины обобщенного тайлинга; более точно, камера  $C$  превращается в точку  $\xi(sp(C))$ . Согласно Предложению 3.5, разные камеры дают разные точки. Циклические камеры дают терминальные вершины, нециклические – обыкновенные.

На рисунке ниже показано, во что превращается вайринг из Примера 2 раздела 3.2; здесь черная плитка изображена более толстыми стрелками.

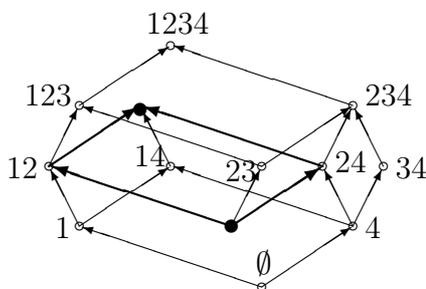


Рис. 26

Для построенного множества плиток выполнение аксиом проверяется довольно прямолинейно. Например, (Т2) легко получить из того, что полоса  $\Pi$  почти гомеоморфна диску. Наиболее интересна аксиома (Т4). Пусть  $\tau$  – черная плитка, и  $b(\tau)$  является вершиной другой плитки  $\tau'$ . Тогда утверждение аксиомы превращается в утверждение о структуре циклических камер из раздела 3.4. Отметим еще, что из собственности вайринга следует, что никакая плитка в  $T$  не может иметь копию.

Скажем бегло и про то, как по обобщенному тайлингу строить вайринг. Для этого мы должны перейти на “развертку”  $D_T$ , которая покрыта неперекрывающимися плитками. После этого надо строить  $i$ -дорожки, практически так же, как в случае ромбических тайлингов. В результате получается проволочная диаграмма (правда, не в полосе  $\Pi$ , а на диске  $D_T$ , но диск легко вытягивается в полосу). Выполнение аксиомы циклов извлекается из аксиомы (Т4).

## 4 Гипотеза Леклерка-Зелевинского

Зададимся вопросом (который мы уже ставили в случае строгих базисов): какие системы множеств можно расширить до (ручных)  $\Pi$ -базисов? Ответ на этот вопрос связан с понятием слабой разделенности, введенным Леклерком и Зелевинским [44] по другому поводу. Главным основанием считать, что слабая разделенность имеет отношение

к  $\Pi$ -базисам, было то, что системные флипы сохраняют слабую разделенность. И что система интервалов  $Int$  является слабо разделенной. Из этого следует, что  $\Pi$ -базисы являются максимальными слабо разделенными системами подмножеств в  $[n]$ . То, что верно и обратное, составляет содержание гипотезы Леклерка и Зелевинского, выраженной немного в других терминах.

## 4.1 Слабая разделенность

Как и раньше, заглавные буквы  $A, B$  и т.п. обозначают подмножества в  $[n]$ .

**Определение.** Скажем, что  $B$  *раскалывает*  $A$ , если  $|A| \leq |B|$  и если  $A - B$  можно поделить на две части ( $A - B = A' \sqcup A''$ ) так, что для любых  $a' \in A', b \in B - A$  и  $a'' \in A''$  выполняются неравенства  $a' < b$  и  $b < a''$ . Множества  $A'$  и  $A''$  могут быть пустыми.

$A$  и  $B$  *слабо разделены*, если либо  $A$  раскалывает  $B$ , либо  $B$  раскалывает  $A$ .

**Пример 1.** Множества  $13$  и  $2$  не слабо разделены, тогда как  $14$  и  $23$  слабо разделены.

**Пример 2.** Пусть  $I$  – интервал в  $[n]$ . Тогда  $I$  раскалывает любое множество размера, не превосходящего  $|I|$ . В частности, любые два интервала слабо (и даже сильно) разделены.

**Пример 3.** Если  $A$  и  $B$  сильно разделены, то они слабо разделены. В самом деле, в силу симметрии мы можем считать, что  $|A| \leq |B|$ . Предположим, что  $B \ll A$ ; тогда  $B$  раскалывает  $A$ , если взять в качестве  $A'$  пустое множество. Если же  $A \ll B$ , то в качестве  $A''$  надо взять пустое множество.

**Пример 4.** Для  $A \subset [n]$  обозначим через  $\bar{A}$  дополнение  $[n] - A$ . Множества  $A$  и  $B$  слабо разделены тогда и только тогда, когда слабо разделены  $\bar{A}$  и  $\bar{B}$ . Это видно из равносильности соотношений:  $a \in A - B$  и  $a \in \bar{B} - \bar{A}$ .

Чтобы лучше освоиться с этим понятием, рассмотрим сначала частный случай, когда  $A$  и  $B$  имеют одинаковый размер. В этом случае слабая разделенность становится похожа на сильную разделенность, если свернуть множество  $[n]$  в кольцо, то есть рассмотреть как  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Предположим, что  $A$  и  $B$  не пересекаются (в противном случае надо удалить общую часть); тогда  $A$  и  $B$  слабо разделены, если их можно разделить некоторой прямой. Другими словами, если хорды, соединяющие точки  $A$ , не пересекаются с хордами между точками из  $B$ .

В общем случае, когда размеры  $A$  и  $B$  не обязательно совпадают, можно сделать простую операцию, уравнивающую размеры.  $A$  именно, добавить к  $[n]$  еще один вспомогательный экземпляр  $[n]$ , то есть перейти к множеству  $[2n]$ . Для множества  $A \subset [n]$  обозначим через  $A^*$  множество  $A \cup \{n+1, \dots, 2n - |A|\}$ ; очевидно, что размер  $A^*$  равен  $n$ . Очевидно, что  $A$  и  $B$  слабо разделены тогда и только тогда, когда  $A^*$  и  $B^*$  слабо разделены. Эта конструкция отчасти сводит вопросы о булевом кубе  $2^{[n]}$  к вопросам о ‘среднем слое’  $\binom{[2n]}{n}$  в  $2^{[2n]}$  (и наоборот).

**Определение.** Система  $\mathcal{X}$  подмножеств в  $[n]$  называется *слабо разделенной* (или *ЛЗ-системой*), если любая пара множеств из  $\mathcal{X}$  слабо разделена.

Отношение этого понятия к вайрингам показывают следующие два факта, доказательству которых посвящена эта глава.

**Теорема 4.1** *Если  $W$  – вайринг, то  $Sp(W)$  является ЛЗ-системой.*

**Теорема 4.2** Пусть  $\mathcal{X}$  – ЛЗ-система. Тогда существует вайринг  $W$ , такой что  $\mathcal{X} \subset Sp(W)$ .

Взятые вместе, эти теоремы эквивалентны Теореме **W3** из введения. Так как размер  $Sp(W)$  равен  $n(n+1)/2 + 1$ , мы получаем утвердительный ответ на главную гипотезу из [44].

Так как по Теореме 3.1 вайринги дают в точности ручные  $\Pi$ -базисы, мы получаем

**Следствие 4.3** Ручные  $\Pi$ -базисы – это в точности максимальные ЛЗ-системы.

## 4.2 Отношение $\preceq$

При работе со слабо разделенными системами полезным оказывается следующее понятие.

**Определение.** Для  $A, B \subset [n]$  мы пишем  $A \preceq B$ , если  $|A| \leq |B|$  и  $A \ll B$  (как и прежде, второе означает, что для любого  $a \in A - B$  и любого  $b \in B - A$  выполняется неравенство  $a < b$ ).

**Пример 1.** Если  $A \preceq B$ , то  $A$  и  $B$  сильно разделены и  $B$  раскалывает  $A$ .

**Пример 2.** Пусть  $A = [p]$  – “начальный” интервал в  $[n]$  ( $0 \leq p \leq n$ ), и  $p \leq |B|$ . Тогда  $A \preceq B$ . Если  $B = [n - p + 1..n]$  – “конечный” интервал, и  $|A| \leq p = |B|$ , то  $A \preceq B$ .

В общем случае отношение  $\preceq$  нетранзитивно.

**Пример 3.**  $\{1, 3\} \preceq \{2, 3\} \preceq \{2, 4\}$ , но  $\{1, 3\}$  и  $\{2, 4\}$  несравнимы и даже не слабо разделены.

Имеется, однако, интересный случай, когда можно гарантировать транзитивность отношения  $\preceq$ :

**Предложение 4.4** Пусть  $A \preceq B$  и  $B \preceq C$ . Если  $A$  и  $C$  слабо разделены, то  $A \preceq C$ .

Это утверждение доказано в [44, Lemma 3.6], но мы приведем другое, более прозрачное рассуждение.

*Доказательство.* Оказывается, тут удобно следить за векторами  $\mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A$  и т. п., где  $\mathbf{1}_A$  обозначает характеристический вектор подмножества  $A \subset [n]$ , и аналогично для  $\mathbf{1}_B$  и  $\mathbf{1}_C$ . Условие  $A \ll B$  означает в точности, что в векторе  $\mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A$  сначала идут  $-1$  (или  $0$ , но на нули мы вообще не обращаем внимание), а затем  $+1$ . Аналогично для  $\mathbf{1}_C - \mathbf{1}_B$ . И мы должны показать, что так же устроен и вектор  $\mathbf{1}_C - \mathbf{1}_A = (\mathbf{1}_C - \mathbf{1}_B) + (\mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A)$ . Задачу облегчает то обстоятельство, что  $C$  и  $A$  слабо разделены, потому что в этом случае паттерн знаков либо  $(+1, -1, +1)$ , либо  $(-1, +1, -1)$ , либо еще проще.

Отбросив тривиальные случаи  $A = B$  и  $B = C$ , мы обозначим через  $k$  и  $k'$  максимальные элементы в носителях  $\mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A$  и  $\mathbf{1}_C - \mathbf{1}_B$ ; в этих местах вектора равны  $+1$ . Поэтому в старшем индексе (равном  $\max(k, k')$ ) вектор  $\mathbf{1}_C - \mathbf{1}_A = (\mathbf{1}_C - \mathbf{1}_B) + (\mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A)$  тоже равен  $+1$ . Так что возможные паттерны знаков для этого вектора – это  $(+1, -1, +1)$ ,  $(-1, +1)$  или  $(+1)$ . Остается убедиться, что первый паттерн тоже невозможен. Рассмотрим отдельно два случая.

1. Размер  $C$  строго больше, чем размер  $A$ . В этом случае из слабой разделенности видно, что именно  $C$  раскалывает  $A$ . Но тогда паттерн  $(+1, -1, +1)$  невозможен.

2. Размер  $C$  совпадает с размером  $A$ . Но тогда он же совпадает и с размером  $B$ , потому что  $|A| \leq |B| \leq |C|$ . В этом случае если обозначить через  $i$  минимальный элемент в носителе вектора  $\mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A$ , то коэффициент в этом месте равен  $-1$ . Аналогично для  $\mathbf{1}_C - \mathbf{1}_B$ . И тогда мы получаем, что вектор  $\mathbf{1}_C - \mathbf{1}_A = (\mathbf{1}_C - \mathbf{1}_B) + (\mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A)$  начинается с  $-1$ , так что паттерн знаков для него тоже не может быть  $(+1, -1, +1)$ .  $\square$

Вместе с Теоремой 4.1 мы получаем, что ограничение отношения  $\preceq$  на спектр  $Sp(W)$  любого вайринга  $W$  является посетом. Важную роль в доказательстве Теоремы 4.2 играет следующий факт, который мы докажем в разделе 4.7.

**Теорема 4.5** *Для любого вайринга  $W$  посет  $(Sp(W), \preceq)$  является решеткой.*

Пользуясь отношением  $\preceq$  на  $2^{[n]}$ , можно продвинуть его до отношения  $\lesssim$  на системах множеств. А именно, для систем множеств  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  будем писать  $\mathcal{A} \lesssim \mathcal{B}$ , если  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$  является ЛЗ-системой и, кроме того, соотношения  $A \in \mathcal{A}$ ,  $B \in \mathcal{B}$  и  $|A| \leq |B|$  влекут  $A \preceq B$ .

**Определение.** Система множеств  $\mathcal{S} = \{S_0, S_1, \dots, S_n\}$  называется *сепаратором*, если размер каждого множества  $S_i$  равен  $i$  и если  $S_i \preceq S_j$  при  $i \leq j$ .

В частности,  $\mathcal{S} \lesssim \mathcal{S}$ . Пример сепаратора – система “начальных” интервалов  $[k]$ ,  $0 \leq k \leq n$ . И вообще, для любой перестановки  $\omega$  система  $Id(\omega)$   $\omega$ -идеалов является сепаратором (см. обсуждение змеек в разделе 2.4).

Пусть даны две системы множеств  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{R}$ . Скажем, что сепаратор  $\mathcal{S}$  *разделяет* системы  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{R}$ , если  $\mathcal{L} \lesssim \mathcal{S}$  и  $\mathcal{S} \lesssim \mathcal{R}$ . Имеет место

**Предложение 4.6** *Пусть  $\mathcal{L} \lesssim \mathcal{R}$ . Тогда существует сепаратор  $\mathcal{S}$ , разделяющий системы  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{R}$ .*

*Доказательство.* При доказательстве мы можем считать, что системы  $\mathcal{L} \lesssim \mathcal{R}$  максимальны в том смысле, что если  $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}'$ ,  $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}'$  и  $\mathcal{L}' \lesssim \mathcal{R}'$ , то  $\mathcal{L} = \mathcal{L}'$  и  $\mathcal{R} = \mathcal{R}'$ . Заметим, что в силу максимальной системы  $\mathcal{L}$  содержит все “начальные” интервалы  $[p] = [1..p]$ , а  $\mathcal{R}$  – все “конечные” интервалы  $[n - p + 1..n]$ .

Мы утверждаем, что в этом случае пересечение  $\mathcal{S} = \mathcal{L} \cap \mathcal{R}$  является сепаратором и, очевидно, разделяет  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{R}$ . Иначе говоря, нужно показать, что для любого  $k \in [n]$  существует подмножество  $S_k \in \mathcal{L} \cap \mathcal{R}$  размера  $k$ .

Согласно Теореме 4.2, примененной по индукции к  $n - 1$ , система  $\mathcal{L} \cup \mathcal{R}$  реализуется некоторым собственным вайрингом  $W$ . Рассмотрим теперь подсистему  $\mathcal{R}_p = \{R \in \mathcal{R}, p \leq |R|\}$  в  $\mathcal{R}$ . Обозначим через  $S_p$  точную нижнюю грань множества  $\mathcal{R}_p$  в  $Sp(W)$  относительно порядка  $\preceq$ ; таковая существует в силу Теоремы 4.5. Легко понять, что  $S_p$  имеет размер  $p$ . Мы утверждаем, что  $\mathcal{L} \lesssim (\mathcal{R} \cup \{S_p\})$ .

Очевидно, что система  $\mathcal{L} \cup \mathcal{R} \cup \{S_p\}$  слабо разделена, так как мы находимся внутри вайринга, и по теореме 4.1  $Sp(W)$  слабо разделен.

Для любого  $L \in \mathcal{L}$  размера  $\leq p$  выполняется неравенство  $L \preceq S_p$ . Это следует из определения точной нижней грани и того, что  $L \preceq R$  для любого  $R$  из  $\mathcal{R}_p$ . В силу максимальной системы  $\mathcal{R}$  мы получаем, что  $S_p \in \mathcal{R}$ . Аналогично проверяется, что  $S_p$  можно добавить к  $\mathcal{L}$ . В силу максимальной  $S_p$  уже принадлежит  $\mathcal{L}$ .  $\square$

При доказательстве Теоремы 4.2 нам понадобится следующая

**Лемма 4.7** Пусть  $Z$  – подмножество в  $[n]$ ,  $i, j, k \in Z$  и  $i < j < k$ . Пусть  $Y$  – еще одно подмножество в  $[n]$ , которое

а) слабо разделено с  $Z - k$ ,  $Z - j$  и  $Z - i$  и

б) сравнимо с  $Z - j$  (по отношению  $\preceq$ ) в случае равенства  $|Y| = |Z - j|$ .

Тогда  $Y$  слабо разделено с  $Z$ .

Аналогично формулируется (и доказывается) дуальное утверждение.

*Доказательство.* Рассмотрим отдельно три случая.

1)  $|Y| \geq |Z|$ . Утверждается, что  $Y$  раскалывает  $Z$ . В противном случае (если  $Y$  не раскалывает  $Z$ ) существуют  $y', y'' \in Y - Z$  и  $z \in Z - Y$ , такие что  $y' < z < y''$ . Это  $z$  отлично от  $i$  или  $k$ . Пусть  $z$  отлично от  $i$ . Тогда  $z \in (Z - i) - Y$  и  $Y$  не раскалывает  $Z - i$ . А так как размер  $Y$  строго больше, чем размер  $Z - i$ , то  $Y$  и  $Z - i$  не строго разделены, вопреки предположению.

2)  $|Y| < |Z| - 1$ . Тогда  $Z - i$  раскалывает  $Y$ . И если  $i \in Y$ , то и  $Z$  раскалывает  $Y$ . Поэтому мы можем предполагать, что  $i \notin Y$ . Аналогично мы можем считать, что  $j \notin Y$  и  $k \notin Y$ . Наконец,  $Z - j$  раскалывает  $Y$ . Это значит, что  $Y - (Z - j)$  (равное  $Y - Z$ , так как  $j \notin Y$ ) делится на две части  $Y'$  и  $Y''$ , причем  $Y' < Z - j - Y < Y''$ . Так как  $i$  и  $k$  принадлежат  $Z - j - Y$ , то  $Y' < i < k < Y''$ . Но  $j$  находится между  $i$  и  $k$ , поэтому  $Y' < j < Y''$ . Вместе с  $Y' < Z - j - Y < Y''$  это дает  $Y' < Z - Y < Y''$ , так что  $Z$  раскалывает  $Y$ .

3)  $|Y| = |Z| - 1$ . Согласно предположению б),  $Y$  сравнимо с  $Z - j$ , например,  $Y \preceq Z - j$ . Если  $j \in Y$ , то очевидно  $Y \preceq Z$ . Поэтому можно считать, что  $j \notin Y$ . Так как  $Z - j \preceq Z - i$ , то по транзитивности имеем  $Y \preceq Z - i$ . Цвет  $j$  принадлежит правой части (то есть  $Z - i$ ) и не принадлежит левой,  $Y$ . Поэтому для любого  $y \in Y - Z$  мы имеем  $y < j$ , что вместе с  $Y \preceq Z - j$  дает  $Y \preceq Z$ .

Аналогично рассуждаем при  $Z - j \preceq Y$ . Снова можно считать  $j \notin Y$ . По транзитивности  $Z - k \preceq Y$ . И для любого  $y \in Y - Z$  мы имеем  $j < y$ , что дает  $Z \preceq Y$ .  $\square$

### 4.3 Доказательство теоремы 4.2

Теорема 4.2 доказывается индукцией по  $n$ ; при  $n = 2$  она очевидна. Мы предполагаем, что Теорема 4.2 (и, следовательно, Предложение 4.6) для  $n$  выполнена и будем доказывать ее для  $n + 1$ .

Пусть  $\hat{\mathcal{X}}$  – ЛЗ-система в  $2^{[n+1]}$ . образуем по ней две  $n$ -системы:  $\mathcal{L} = \{A \subset [n], A \in \hat{\mathcal{X}}\}$  и  $\mathcal{R} = \{B \subset [n], B \cup \{n+1\} \in \hat{\mathcal{X}}\}$ . Проверим, что  $\mathcal{L} \preceq \mathcal{R}$ . Слабая разделенность внутри  $\mathcal{L}$  или  $\mathcal{R}$  следует прямо из аналогичной разделенности в  $\hat{\mathcal{X}}$ . Если же  $L \in \mathcal{L}$ , а  $R \in \mathcal{R}$ , то по условию  $L$  слабо разделено с  $R \cup \{n+1\}$ , откуда следует, что  $L$  слабо разделено с  $R$ . Если кроме того  $|L| \leq |R|$ , то  $L$  и  $R \cup \{n+1\}$  слабо разделены и размер  $R \cup \{n+1\}$  строго больше, чем размер  $L$ ; поэтому  $R \cup \{n+1\}$  раскалывает  $L$ . Но это возможно только если  $L \ll R$ .

Обратно, если  $\mathcal{L} \preceq \mathcal{R}$ , то, как легко проверить,  $(n+1)$ -система  $\mathcal{L} \cup \hat{\mathcal{R}}$ , где  $\hat{\mathcal{R}} = \{B \cup \{n+1\}, B \in \mathcal{R}\}$ , является ЛЗ-системой. Так что задавать ЛЗ-системы в  $2^{[n+1]}$  – то же самое, что задавать пары  $\mathcal{L} \preceq \mathcal{R}$  в  $2^{[n]}$ .

При доказательстве теоремы 4.2 мы можем считать, что ЛЗ-система  $\widehat{\mathcal{X}}$  максимальна. В этом случае пара  $(\mathcal{L}, \mathcal{R})$  тоже максимальна. Согласно Предложению 4.6, пересечение  $\mathcal{S} = \mathcal{L} \cap \mathcal{R}$  является сепаратором для пары  $(\mathcal{L}, \mathcal{R})$ . Согласно индуктивному предположению, существует вайринг  $W$ , реализующий  $\mathcal{L} \cup \mathcal{R}$ .

Основное утверждение, которое мы докажем ниже, состоит в том, что сепаратор  $\mathcal{S}$  можно продолжить до трассы  $T$  в  $W$  (см. раздел 3.6). Трасса тоже будет разделять (не строго)  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{R}$ . Если мы проведем внутри этой трассы проволоку  $w_{n+1}$ , мы получим  $(n+1)$ -вайринг  $\widehat{W}$ . Системы  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{R}$  поднимаются в  $\widehat{W}$  до камерных систем  $\mathcal{L}$  и  $\widehat{\mathcal{R}}$ , откуда видно, что  $\widehat{\mathcal{X}}$  реализуется спектром  $\widehat{W}$ .

Итак, осталось доказать следующее утверждение:

**Лемма 4.8** *Любой сепаратор  $\mathcal{S}$  продолжается до трассы в  $W$ .*

*Доказательство.* Ключевой факт здесь состоит в том, что каждая сепараторная камера  $S_p$  (при  $0 < p < n$ ) соседствует “сверху” и “снизу” с нециклическими камерами. Предположим, что (нециклическая) камера  $S_p$  соседствует сверху (через потолок) с циклической камерой. Из структуры нециклической камеры (см. Следствие 3.8) следует, что потолок нашей камеры состоит из единственного ребра (цвет которого обозначим как  $j$ ), и за этим ребром располагается (противо-часовая) циклическая камера  $Z$ . Локальная картинка вблизи этого ребра выглядит как на рис. 27.

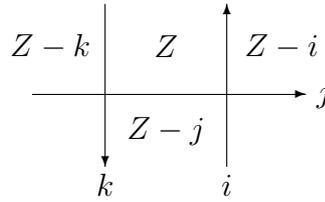


Рис. 27

Итак, мы имеем три нециклические камеры  $Z - k$ ,  $S_p = Z - j$  и  $Z - i$  вайринга  $W$ .

Мы утверждаем, что  $\mathcal{L} \cup \{Z\} \simeq \mathcal{R}$ , что противоречит максимальнойности  $(\mathcal{L}, \mathcal{R})$ . Во-первых, мы должны проверить, что  $\mathcal{L} \cup \{Z\} \cup \mathcal{R}$  является ЛЗ-системой. То есть что если  $Y \in \mathcal{L} \cup \mathcal{R}$ , то  $Y$  слабо разделено с  $Z$ . По теореме 4.1  $Y$  слабо разделено с  $Z - i$ ,  $Z - j$  и  $Z - k$ . Если  $Y$  имеет размер  $p$ , то так как  $S_p$  лежит в  $\mathcal{L} \cap \mathcal{R}$ ,  $Y$  сравнимо с  $Z - j$ . По Лемме 4.7 получаем, что  $Y$  слабо разделено с  $Z$ .

Во-вторых, нужно проверить, что для любого  $R$  из  $\mathcal{R}$ , имеющего размер  $> p$ , выполняется  $Z \ll R$ . Так как  $Z - j = S_p$  принадлежит  $\mathcal{L}$ , мы имеем  $Z - j \ll R$ . Так как  $Z - k \preceq Z - j$ , то по транзитивности (Предложение 4.4) мы имеем  $Z - k \ll R$ . Отсюда легко следует, что  $Z = (Z - j) \cup (Z - k) \ll R$ .

Аналогично устанавливается утверждение про соседей снизу. Итак, ключевой факт доказан.

Пусть теперь  $S$  – произвольная нециклическая камера вайринга  $W$ , “открытая” сверху в том смысле, что граничит сверху с нециклическими камерами. Тогда из нее можно выпустить зигзаг вправо. Делается это так. Пусть  $T$  – камера, которая граничит с  $S$  по самому правому потолочному ребру  $j$  камеры  $S$ . Картинка тут такая

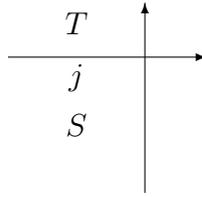


Рис. 28

Из нее видно, что ребро  $j$  явно не последнее напольное ребро нециклической камеры  $T$ . Теперь можно взять последнее напольное ребро камеры  $T$  и ее соседку  $S'$ . И так далее. В результате мы получим цепочку нециклических камер  $S, T, S', \dots$ , уходящую “вправо”. Последнему утверждению можно придать точный смысл. Дело в том, что  $T = Sj$ , а  $S' = T - k'$ , где  $k' < j$ . Поэтому  $S \preceq S'$ ,  $S' \preceq S''$  и так далее. Аналогично  $T \preceq T'$  и так далее. Поэтому наше цепочка действительно идет вправо (не заикливаясь) и рано или поздно упрется правую граничную камеру  $[n - p..n]$ . Аналогично ее можно пустить “влево”, пока она не упрется в левую граничную камеру  $[p]$ .

Вот и рассмотрим такую цепь  $\mathcal{C}$ , идущую из  $[p]$  в  $[n - p..n]$ . Если выпустить из  $S_p$  зигзаг вправо, он рано или поздно сольется с  $\mathcal{C}$ . Пусть  $S$  – последняя камера, еще не попавшая на  $\mathcal{C}$ , а следующая граничная с ней камера  $T$  уже принадлежит  $\mathcal{C}$ . Это значит, что  $S$  имеет единственное потолочное ребро. Но тогда  $S$  не могла быть последующей ни для какой предыдущей. Иначе говоря, такая ситуация возможна только если  $S = S_p$ . Аналогично с  $S_{p+1}$ . Либо она лежит на этой цепи  $\mathcal{C}$ , либо попадает на нее через единственное напольное ребро. То есть максимально сложное, что может быть, изображено на рисунке 29

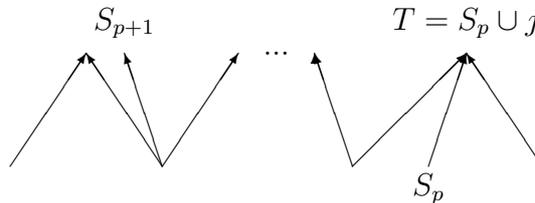


Рис. 29

Мы утверждаем, что такая картинка возможна только если  $S_p$  и  $S_{p+1}$  соединены ребром. В самом деле, пусть  $T = S_p \cup j$  – та камера, с помощью которой  $S_p$  цепляется к цепи  $\mathcal{C}$ . Тогда мы имеем цепочку неравенств

$$S_p \preceq S_{p+1} \preceq T = S_p \cup j.$$

Как легко понять, такое возможно только в том случае, если  $S_{p+1} = S_p \cup i$ , где  $i \leq j$ . Но в таком случае от  $S_p$  к  $S_{p+1}$  можно протянуть кусок “трассы”. Делая так со всеми  $S_p$ , мы получаем трассу  $\mathcal{T}$ , проходящую через сепаратор  $\mathcal{S}$ .  $\square$

Это завершает доказательство Теоремы 4.2.

#### 4.4 Орграф $\Gamma(W)$

Центральным приемом в доказательстве теорем 4.1 и 4.4, а также некоторых других фундаментальных фактов о вайрингах, является конструкция по вайрингу  $W$  некоторого вспомогательного плоского орграфа  $\Gamma = \Gamma(W)$ .

Граф  $\Gamma$  строится так. Мы выбираем по точке  $v(C)$  внутри каждой нециклической камеры  $C$ ; если камера  $C$  граничная, эту точку  $v(C)$  мы выбираем лежащей на границе (левой или правой) полосы  $\Pi$ . Все эти точки и образуют множество *вершин* графа  $\Gamma$ . Так что множество  $V(\Gamma)$  может быть отождествлено с  $Sp(W)$ .

*Дуги* (ориентированные ребра) графа  $\Gamma$  будут двух сортов: *толстые* (или “вертикальные”) и *тонкие* (или “горизонтальные”). Скажем сначала про толстые дуги. Предположим, что камеры  $C$  и  $C'$  соседние по ребру  $j$ , причем  $C$  лежит справа от этого ребра, а  $C'$  – слева. Тогда мы проводим толстую дугу из  $v(C)$  в  $v(C')$ , проходя через середину ребра  $j$ . Этой дуге мы приписываем вес  $j$ . Таким образом, такая дуга ведет от более “низкой” камеры  $C$  к более “высокой”  $C'$ , увеличивая спектр ровно на цвет  $j$ .

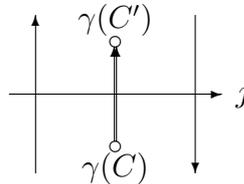


Рис. 30

Теперь о тонких дугах. Пусть  $p$  – это нормальный кроссинг проволок  $i$  и  $k$ ,  $i < k$ , как на рис. 31. Слева от точки  $p$  располагается нециклическая камера  $C'$ , справа –  $C$ .

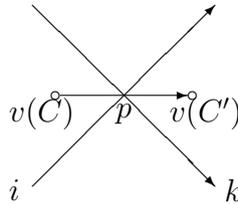


Рис. 31

Тогда мы проводим тонкую дугу из  $v(C)$  в  $v(C')$  через точку  $p$ , как на рис. 31.

На рисунке 32 мы демонстрируем построение орграфа  $\Gamma(W)$  для вайринга  $W$  из примера 2 раздела 3.2; справа приведен сам граф  $\Gamma(W)$ .

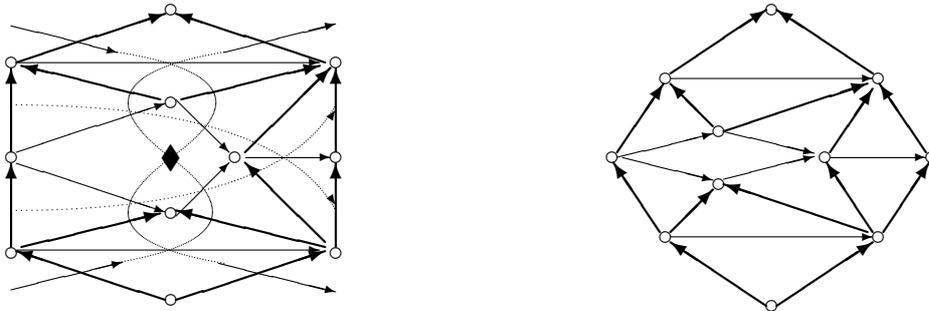


Рис. 32

Пользуясь тем, что каждая камера  $C$  гомеоморфна диску, дуги можно провести так, что внутри  $C$  они пересекаются только в вершине  $v(C)$ . В других точках дуги также не могут пересекаться. И мы получаем первое важное свойство: *граф  $\Gamma$  плоский*.

Второе важное свойство графа  $\Gamma$  – его *ацикличность*, то есть отсутствие направленных циклов. В самом деле, толстые дуги повышают размер камеры (или вершины; под размером камеры  $C$  мы понимаем  $|sp(C)|$ ). Что касается тонких дуг, то они сохраняют размер, но повышают “суммарный цвет”, то есть  $\sum_{i \in C} i$ . (Грубо говоря, тонкие дуги идут слева направо.) Поэтому цикла в  $\Gamma$  быть не может.

Ацикличность графа  $\Gamma$  подсказывает ввести на множестве его вершин  $V(\Gamma)$  (то есть фактически на  $Sp(W)$ ) частичный порядок  $\preceq_\Gamma$ , транзитивное замыкание всех дуг. Иначе говоря, для вершин  $v$  и  $v'$  мы пишем  $v \preceq_\Gamma v'$ , если из  $v$  в  $v'$  можно провести ориентированный путь. Позже (в разделе 4.7) мы покажем, что этот порядок  $\preceq_\Gamma$  совпадает с отношением  $\preceq$  на системе множеств  $Sp(W)$ .

Для каждого целого  $p$ ,  $0 \leq p \leq n$ , обозначим через  $\Gamma(p)$  полный подграф в  $\Gamma$ , состоящий из вершин размера (или уровня)  $p$ . Конечно, все стрелки-дуги в нем тонкие. Третий важный факт состоит в том, что *орграф  $\Gamma(p)$  имеет один источник и один сток*. В частности, он связан.

Более точно, источником в  $\Gamma(p)$  является лево-граничная камера  $[p]$  размера  $p$ . А стоком – право-граничная камера  $[n - p + 1..n]$  такого же размера.

В самом деле, пусть  $C$  – нециклическая камера размера  $p$ , которая не граничит с левой границей полосы  $\Pi$ . Согласно Предложению 3.7, пересечение левой колонны  $C$  с потолком и полом дает нормальный кроссинг (быть может, один и тот же, если левая колонна отсутствует). Тем самым левее такого кроссинга есть камера  $C'$ , из которой в  $C$  ведет тонкая стрелка. Аналогично для камеры, которая не право-граничная.

Таким образом, граф  $\Gamma(p)$  устроен как цепочка *гамаков*, см. рис. 33.

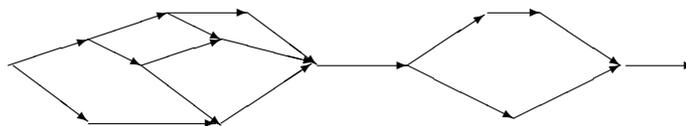


Рис. 33

В частности, у плоского графа  $\Gamma(p)$  имеется “верхняя кромка”  $\overline{\Gamma(p)}$  и “нижняя кромка”  $\underline{\Gamma(p)}$ . Верхняя кромка – это путь в  $\Gamma(p)$ , выходящий из источника  $[p]$  и идущий каждый раз по дуге, направленной максимально вверх (или влево). Местами верхняя кромка соприкасается с нижней, это *узлы* в цепи гамаков. Иначе говоря, узел – это вершина графа  $\Gamma(p)$ , принадлежащая одновременно и верхней, и нижней кромке  $\Gamma(p)$ . Например, узлами являются источник  $[p]$  и сток  $[n - p + 1..n]$ . Узлы играют важную роль в понимании структуры  $\Gamma(p)$ , это “потенциально сепараторные” вершины, как мы увидим позже. Одно ясно уже сейчас: любая траектория в  $\Gamma(p)$ , идущая из источника в сток, проходит через все узлы.

**Следствие 4.9** *Узловые вершины графа  $\Gamma(p)$  сравнимы с любыми вершинами из  $\Gamma(p)$  относительно порядка  $\preceq_\Gamma$ .*

В самом деле, пусть  $s$  – узловая вершина  $\Gamma(p)$ , а  $v$  – произвольная. Выпустим из  $v$  траекторию в сток, а из источника – в  $v$ ; получается траектория в  $\Gamma(p)$ , идущая из источника в сток и проходящая через  $v$ . Как уже говорилось, такая траектория проходит через узел  $s$ . Если  $s$  была на первом участке траектории,  $s \preceq_{\Gamma} v$ . Если  $s$  находится на втором участке, то  $v \preceq_{\Gamma} s$ .  $\square$

Между верхней и нижней кромками каждый гамак заполнен “ячейками”. *Ячейка* – это подграф в  $\Gamma(p)$ , порождающий грань в  $\Gamma(p)$ . Она имеет вид как на ис. 34

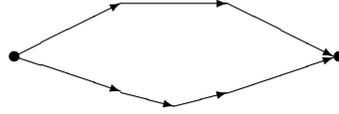


Рис. 34

и имеет свой источник и сток. Каждая ячейка возникает из тандемной пары циклических камер, как изображено на рисунке 35

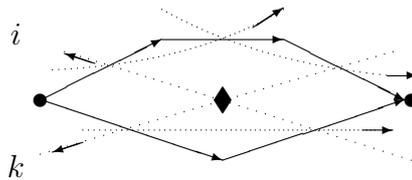


Рис. 35

Если вайринг  $W$  собственный, верх и низ каждой ячейки состоят более чем из одной дуги.

Итак, мы описали строение “горизонтальных слоев”  $\Gamma(p)$  орграфа  $\Gamma$ . Теперь скажем, что происходит между слоями  $\Gamma(p)$  и  $\Gamma(p+1)$ . Из нижнего слоя в верхний идут толстые дуги. Причем очевидно (из планарности), что если из  $v \in \Gamma(p)$  в  $v' \in \Gamma(p+1)$  идет толстая дуга, то  $v$  принадлежит верхней кромке  $\Gamma(p)$ , а  $v'$  – нижней кромке  $\Gamma(p+1)$ .

**Лемма 4.10** *Из любой вершины  $v$  верхней кромки  $\overline{\Gamma(p)}$  выходит хоть одна толстая дуга. В любую вершину  $v'$  нижней кромки  $\underline{\Gamma(p+1)}$  входит хоть одна толстая дуга.*

*Доказательство.* Пусть вершина  $v$  соответствует камере  $C$  нашего вайринга  $W$ . Согласно Предложению 3.7, камера  $C$  имеет “потолок”. Если “потолок” состоит из нескольких ребер, то по ним камера  $C$  соседствует с нециклическими камерами и мы имеем ровно то же количество выходящих из  $v$  толстых дуг. Если “потолок” состоит из единственного ребра и соседняя по нему камера тоже нециклическая, мы снова имеем толстую дугу, выходящую из  $v = v(C)$ . Осталось рассмотреть случай, когда выше “потолка” камеры  $C$  находится тоже циклическая камера,  $C'$ . В этом случае  $C'$  – противоциклическая половина тандема, и вершина  $v = v(C)$  лежит на нижней части ячейки, соответствующей этому тандему. Но тогда  $v$  не является вершиной, принадлежащей верхней кромке  $\Gamma(p)$ .

Аналогично доказывается вторая часть леммы.  $\square$

Таким образом, полоса между  $\overline{\Gamma(p)}$  и  $\underline{\Gamma(p+1)}$  заполнена треугольниками вида



Рис. 36

Обратимся теперь ко всему графу  $\Gamma$  и соответствующему порядку  $\preceq_\Gamma$  на множестве  $V(\Gamma)$  его вершин. У него тоже есть максимальный и минимальный элемент,  $[n]$  и  $\emptyset$ . В самом деле, пусть  $v$  вершина (на уровне  $p$ ). Сначала мы пройдем по тонким дугам в сток графа  $\Gamma(p)$ . А затем, двигаясь уже по толстым дугам (и поднимаясь по стокам) мы доберемся до максимальной вершины  $[n]$ .

Однако можно утверждать гораздо большее.

**Предложение 4.11** *Упорядоченное множество  $(V(\Gamma), \preceq_\Gamma)$  является решеткой.*

То есть для любых двух вершин  $v$  и  $v'$  существует наименьшая верхняя грань и наибольшая нижняя грань. Это довольно простое свойство планарных орграфов, приведенное в качестве упражнения в книге Биркгофа [1]. Объясним все же кратко, почему существует верхняя грань. Пусть  $U$  – верхний конус, выходящий из  $v$  (то есть множество вершин, достижимых по путям из  $v$ ), а  $U'$  – верхний конус из  $v'$ . Если  $v' \in U$ , то утверждение тривиально, верхняя грань – это  $v'$ . Аналогично если  $v \in U'$ . Поэтому можно считать, что таких включений нет. Конуса  $U$  и  $U'$  пересекаются, так как содержат максимальный элемент  $[n]$ . Как и в случае с гамаками, у  $U$  есть левая граница и правая граница; аналогично для  $U'$ . Из планарности левая граница одного из конусов пересечет правую границу другого. Первая точка пересечения этих границ  $w$  и есть супремум  $v$  и  $v'$ .

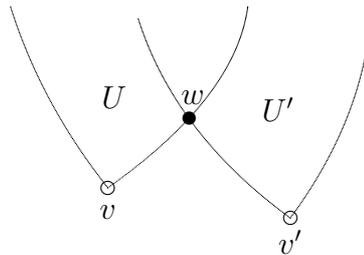


Рис. 37

## 4.5 Существование флипов

Первое применение вспомогательного графа  $\Gamma$  относится к доказательству существования флипов. А именно, мы покажем, что если собственный вайринг не является строгим, то в нем можно произвести понижающий (и повышающий) геометрический флип. Более точно, мы покажем, что если на уровне  $\Gamma(p)$  имеется невырожденный гамак (а если вайринг нестрогий, то такой гамак обязательно есть, потому что ячейки гамаков соответствуют анти-нормальным кроссингам), то в некоторой вершине верхней кромки

этого гамака можно сделать повышающий флип (симметрично, в некоторой вершине нижней кромки можно сделать понижающий флип).

Итак, рассмотрим некоторый гамак с началом  $s$  и концом  $t$ . Мы утверждаем, что имеется ячейка этого гамака, верхняя граница которого целиком лежит на верхней кромке гамака.

Для доказательства мы начинаем с источника  $s$  данного гамака и идем по верхней кромочной дуге  $ss'$ , выходящей из  $s$ . Это начало некоторой ячейки  $cell_1$ . При этом вершина  $s'$  еще не конец этой ячейки, потому что в силу собственности вайринга верх ячейки состоит более чем из одного ребра. Предположим, что не вся верхняя граница ячейки  $cell_1$  принадлежит верхней кромке гамака. Тогда в некоторой вершине  $s_1$  (не являющейся концом ячейки  $cell_1$ ) верхняя кромка гамака отходит от верхней границы ячейки. То есть ребро  $s_1s'_1$ , по которому проходит верхняя кромка гамака, идет левее верхней границы ячейки  $cell_1$ . В этом случае мы имеем начало новой ячейки  $cell_2$ , для которой можно рассуждать аналогично. См. рис. 38.

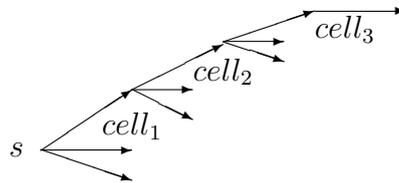


Рис. 38

Рано или поздно мы дойдем до ячейки  $cell_r$ , у которой вся верхняя граница принадлежит верхней кромке гамака.

Итак, на верхней кромке нашего гамака есть вершина  $v = v(C)$ , окрестность которой (в графе  $\Gamma$ ) выглядит как на рис. 39.

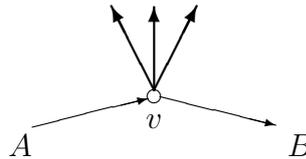


Рис. 39

Вверх из этой вершины выходит более одной толстой дуги (Лемма 4.10). (Одна дуга свидетельствовала бы о попутном пересечении.) Мы утверждаем, что в этой вершине можно сделать повышающий геометрический флип.

Для этого рассмотрим камеру  $C$ , соответствующую вершине  $v$ . У нее есть “потолок”, ребра которого соответствуют толстым дугам, выходящим из  $v$ . “Левой колонны” у  $C$  нет, потому что в  $v$  входит только одно тонкое ребро; аналогично нет “правой колонны”. “Пол” у  $C$  состоит из единственного ребра (цвет которого обозначим как  $j$ ), и сосед  $C$  по “полу” – циклическая камера. Таким образом, локально картина вайринга в окрестности  $C$  выглядит так:

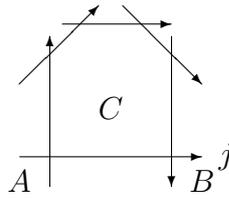


Рис. 40

Это как раз ситуация флипа (если вспомнить, что кроссинги на “напольной” проволоке  $j$  нормальные). Если мы сделаем флип, вайринг локально заменится на

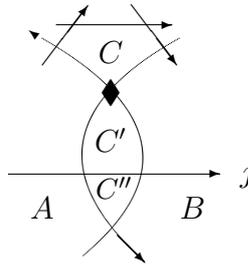


Рис. 41

которому соответствует локальный фрагмент нового графа  $\Gamma'$  в окрестности новой вершины  $v(C'')$

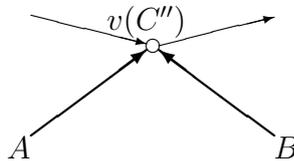


Рис. 42

Таким образом, мы получаем ключевой (см. теоремы **W1** и **W2**) результат.

**Предложение 4.12** *Любой собственный вайринг соединяется цепочкой понижающих флипов со стандартным вайрингом.*

В самом деле, пусть  $W$  – вайринг, не допускающий понижающих флипов. Согласно доказанному выше, он строгий. А согласно Лемме 2.6 он является стандартным вайрингом.

## 4.6 Доказательство Теоремы 4.1

Докажем Теорему 4.1 о том, что спектр вайринга является ЛЗ-системой (то есть состоит из слабо разделенных множеств). Ясно, можно считать вайринг  $W$  собственным.

Приведем сначала эскиз “короткого” доказательства. Оно основано на использовании флипов. Про флипы с вайрингами уже говорилось. Но флипы можно делать и

с ЛЗ-системами, как было замечено в [44], и эти операции (в терминах ЛЗ-систем и вайрингов) согласованы. После этого все вытекает из следующих трех утверждений.

1. Свойство слабой разделенности сохраняется при флипах. Это Теорема 1.7 (или 5.1) из [44].

2. Любой вайринг можно соединить цепочкой флипов со стандартным вайрингом.

3. Спектр стандартного вайринга (то есть система всех интервалов) является ЛЗ-системой (и даже сильно разделенной системой, см. Пример 2 из 4.1).

Это рассуждение опирается на непростую Теорему 1.7 из [44]. Ниже мы приведем прямое индуктивное доказательство, использующее редукцию по цвету  $n$ .

Пусть  $A$  и  $B$  – две нециклические камеры  $W$ , которые мы можем отождествить с их спектрами. Мы должны показать, что  $A$  и  $B$  (как подмножества в  $[n]$ ) слабо разделены. Мы рассмотрим несколько случаев в зависимости от расположения камер  $A$  и  $B$  относительно проволоки  $w_n$  (иначе говоря в зависимости от того, содержат  $A$  и  $B$  цвет  $n$  или нет).  $\widetilde{W}$  обозначает, как обычно, редукцию  $W$  по цвету  $n$ ;  $\widetilde{A}$  и  $\widetilde{B}$  – камеры в  $\widetilde{W}$ , содержащие  $A$  и  $B$ . По индуктивному предположению спектр  $\widetilde{W}$  слабо разделен (основание индукции очевидно выполнено).

*Случай 1:*  $A$  и  $B$  лежат справа от проволоки  $w_n$ , то есть  $A$  и  $B$  не содержат  $n$ . Тогда  $A = \widetilde{A}$  и  $B = \widetilde{B}$  как подмножества. По индукции  $\widetilde{A}$  и  $\widetilde{B}$  слабо разделены.

*Случай 2:*  $A$  и  $B$  лежат слева от проволоки  $w_n$ , то есть  $A$  и  $B$  содержат  $n$ . Снова по индукции  $\widetilde{A}$  и  $\widetilde{B}$  слабо разделены. Так как  $A = \widetilde{A} \cup n$  и  $B = \widetilde{B} \cup n$ , отсюда следует слабая разделенность  $A$  и  $B$ .

*Случай 3:*  $A$  и  $B$  расположены по разные стороны от  $w_n$ ; можно считать, что  $A$  справа от  $w_n$ , а  $B$  – слева. Редуцированный вайринг  $\widetilde{W}$  содержит камеры  $\widetilde{A} = A$  (как множества) и  $\widetilde{B} = B - n$  (тоже как множества). Рассмотрим отдельно два случая:

3а)  $|A| \geq |B|$ . Тогда размер  $\widetilde{A}$  строго больше, чем размер  $\widetilde{B}$ . По индукции  $\widetilde{A}$  раскалывает  $\widetilde{B}$ . Очевидно, что в этом случае  $A$  раскалывает  $B = \widetilde{B} \cup n$ .

3б)  $|A| < |B|$ . В этом случае  $|\widetilde{A}| \leq |\widetilde{B}| = |B| - 1$ . Мы утверждаем (вслед за [44]), что  $\widetilde{A} \preceq \widetilde{B}$ . Если это верно, тогда очевидно и  $A \preceq B = \widetilde{B} \cup n$ . Осталось проверить следующее.

**Лемма 4.13**  $\widetilde{A} \preceq \widetilde{B}$ .

*Доказательство.* Переведем наши данные в термины графа  $\Gamma = \Gamma(\widetilde{W})$ . Трасса  $\mathcal{T}$  (след от проволоки  $w_n$ ) превращается в ненаправленный путь по толстым стрелкам, идущий из верхней вершины  $[n - 1]$  в нижнюю вершину  $\emptyset$ . Условия на трассу приводились в разделе 3.6 и, в частности, влекут, что этот “путь-трасса”  $v(\mathcal{T})$  имеет вид как на рис. 43

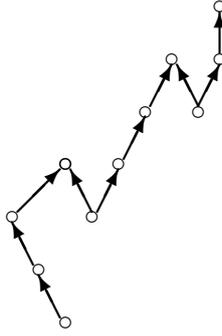


Рис. 43

То есть у него встречаются моменты спуска (когда путь идет с уровня  $p + 1$  на уровень  $p$  и затем на уровень  $p - 1$ ) и периоды колебания (между уровнем  $p$  и  $p - 1$ , причем в течении этого периода путь идет справа налево, как на рисунке). Ниже мы более подробно изобразили период колебания между уровнями  $\Gamma(p)$  и  $\Gamma(p - 1)$ .

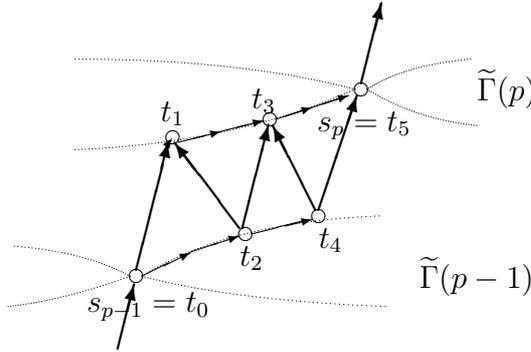


Рис. 44

Этот период колебаний совершается между “узловыми” (сепараторными) вершинами  $s_{p-1}$  (на уровне  $p - 1$ ) и  $s_p$  (на уровне  $p$ ). В промежутке этот путь-трасса идет вверх (в  $t_1$ ), вниз (в  $t_2$ ), вверх и т.д., пока не заканчивается в узловой вершине  $s_p$ . Заметим, что вершины  $t_k$  с четными номерами  $k$  лежат на верхней кромке  $\tilde{\Gamma}(p - 1)$ , а вершины с нечетными номерами – на нижней кромке  $\tilde{\Gamma}(p)$ . Отсюда (и из рисунка 44) видно, что  $s_{p-1} \preceq_{\Gamma} s_p$ . И вообще,

$$s_p \preceq_{\Gamma} s_q \text{ при } p \leq q. \quad (4.1)$$

Наконец, вершина  $\tilde{a} = v(\tilde{A})$  лежит “левее” легального пути (или на нем), а вершина  $\tilde{b} = v(\tilde{B})$  лежит “правее” легального пути (или на нем). Кроме того уровень  $p$  вершины  $\tilde{a}$  не выше, чем уровень  $q$  вершины  $\tilde{b}$ .

Обозначим через  $s_p$  узловую вершину легального пути на уровне  $p$ . Так как вершина  $\tilde{a}$  лежит левее легального пути,  $\tilde{a} \preceq_{\Gamma} s_p$ . Аналогично с уровнем  $q$ ; так как  $\tilde{b}$  лежит правее легального пути,  $s_q \preceq_{\Gamma} \tilde{b}$ . Вместе с соотношением (4.1) это дает  $\tilde{a} \preceq_{\Gamma} \tilde{b}$ . Применяя Предложение 4.14 к редуцированному вайрингу  $\tilde{W}$ , мы получаем  $\tilde{a} \preceq \tilde{b}$ .  $\square$

**Замечание.** Скажем, кстати, как выглядит соответствующий фрагмент графа  $\Gamma = \Gamma(W)$  для исходного (нередуцированного) вайринга  $W$ .

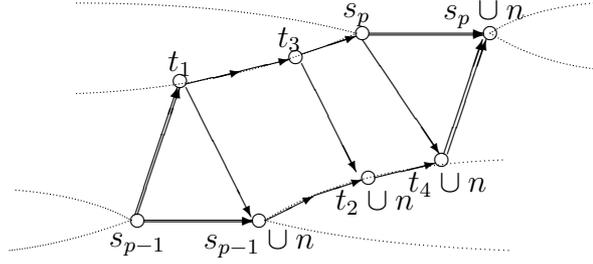


Рис. 45

Уровень  $\Gamma(p)$  составляется из “левого куска”  $\tilde{\Gamma}(p)$  (левее  $s_p$ ) и “правого куска”  $\tilde{\Gamma}(p-1)$  (правее  $s_{p-1}$ ), которые “сшиваются” тонкими дугами, образуя несколько новых ячеек.

## 4.7 Доказательство теоремы 4.5

Теорема 4.5 следует из Предложения 4.11 (о решеточности порядка  $\preceq_\Gamma$ ) и следующего

**Предложение 4.14** При отождествлении  $V(\Gamma)$  с  $Sp(W)$  порядки  $\preceq_\Gamma$  и  $\preceq$  совпадают.

*Доказательство.* Установим сначала более простую импликацию  $\preceq_\Gamma \Rightarrow \preceq$ .

Пусть камеры  $C$  и  $D$  нециклические и выполнено  $v(C) \preceq_\Gamma v(D)$ , нужно показать, что  $sp(C) \preceq sp(D)$ . Утверждение очевидно верно, если из  $C$  в  $D$  ведет дуга, тонкая или толстая. В общем случае все следует из Предложения 4.4 и слабой разделенности  $Sp(W)$  (Теорема 4.1).

Проверим теперь обратную импликацию. Пусть (для нециклических камер  $A$  и  $B$ ) выполнено соотношение  $A \preceq B$ . Нужно показать, что из вершины  $v(A)$  можно пройти по стрелкам орграфа  $\Gamma$  в вершину  $v(B)$ . Доказательство снова будет индуктивным и использовать редукцию.

Отношение  $A \preceq B$  означает, в частности, что  $|A| \leq |B|$ . Мы рассмотрим отдельно случаи  $=$  и  $<$ .

*Случай 1:*  $|A| = |B| = p$ . В этом случае вершины  $a = v(A)$  и  $b = v(B)$  принадлежат графу  $\Gamma(p)$ . Если  $a$  и  $b$  лежат в разных гамаках, то они сравнимы отношением  $\preceq_\Gamma$ . Если  $a \preceq_\Gamma b$ , все доказано. Если же  $b \preceq_\Gamma a$ , то  $b \preceq a$  (по первой части доказательства). Вместе с  $a \preceq b$  это дает  $a = b$ .

Таким образом можно считать, что  $a$  и  $b$  лежат в одном гамаке  $H$ . Здесь удобно, оказывается, произвести редукцию цвета 1. На рис. 46 изображено, как меняется  $\Gamma$  при такой редукции, точнее, как меняется соответствующий фрагмент в гамаке. При этом мы предполагаем, что проволока  $w_1$  действительно “разрезает” гамак  $H$  (иначе в этом месте  $\Gamma$  вообще не меняется). Изменения минимальны: левая и правая части гамака ( $\alpha$  и  $\beta$ ) вообще не меняются (хотя  $\alpha$  спускается на уровень вниз), тонкие дуги, соединяющие части  $\alpha$  и  $\beta$ , заменяются системой толстых дуг, идущих от  $\alpha$  к  $\beta$ .

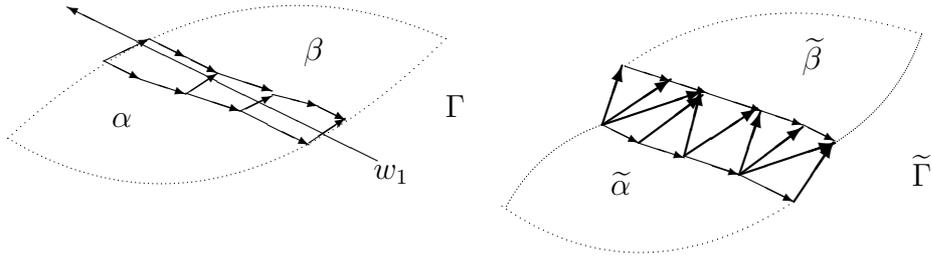


Рис. 46

Пусть  $\tilde{a}$  и  $\tilde{b}$  – соответствующие вершины в  $\Gamma$ . Очевидно, что  $\tilde{a}$  по-прежнему  $\preceq \tilde{b}$  и, по индуктивному предположению,  $\tilde{a}$  соединяется направленным путем с  $\tilde{b}$  в орграфе  $\tilde{\Gamma}$ .

Если  $\tilde{a}$  и  $\tilde{b}$  лежат в одной части (например, в  $\tilde{\alpha}$ ), то соединяющий их путь тоже целиком лежит в  $\tilde{\alpha}$  (из  $\tilde{\beta}$  нельзя вернуться в  $\tilde{\alpha}$ ). А так как  $\tilde{\alpha}$  и  $\alpha$  изоморфны, этот путь очевидным способом поднимается в  $\alpha$  и соединяет  $a$  и  $b$ .

Пусть теперь  $\tilde{a}$  и  $\tilde{b}$  лежат в разных частях. Это может быть только в том случае, когда  $\tilde{a}$  лежит в  $\tilde{\alpha}$ , а  $\tilde{b}$  – в  $\tilde{\beta}$  (в противном случае путь из  $\tilde{a}$  в  $\tilde{b}$  невозможен). Направленный путь из  $\tilde{a}$  в  $\tilde{b}$  идет к “границе”  $\tilde{\alpha}$ , потом по толстой дуге  $s \Rightarrow t$  переходит на “границу”  $\tilde{\beta}$ , и затем идет в  $\tilde{b}$ . Первый и последний отрезки этого пути очевидным образом поднимаются в гамак  $H$ . Чтобы понять, как поднимается средний участок пути (состоящий из толстой дуги  $s \Rightarrow t$ ), мы изобразим более детально соответствующий фрагмент картины. Решающее замечание состоит в том, что вершина  $s$  – это “источник” соответствующей ячейки.

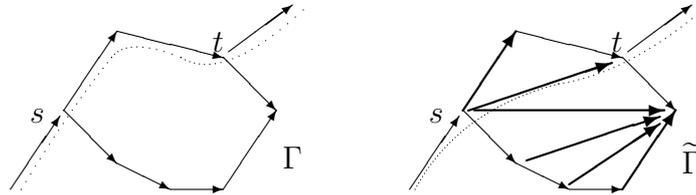


Рис. 47

Из этого рисунка видно, как толстая дуга  $s \Rightarrow t$  (в  $\tilde{\Gamma}$ ) поднимается до (тонкого) пути в орграфе  $\Gamma$ .

Это завершает рассмотрение случая 1.

*Случай 2:*  $|A| < |B|$ . Тут мы производим более привычную редукцию цвета  $n$ . Граф  $\Gamma$  преобразуется в граф  $\tilde{\Gamma}$  с трассой  $\mathcal{T}$  в нем. Камеры  $A$  и  $B$  переходят в  $\tilde{A} = A - n$  и  $\tilde{B} = B - n$ , причем, очевидно,  $\tilde{A} \preceq \tilde{B}$ . По индуктивному предположению вершины  $\tilde{a}$  и  $\tilde{b}$  соединяются направленным путем в  $\tilde{\Gamma}$ . Остается этот путь поднять в  $\Gamma$ .

Тут мы рассмотрим отдельно три подслучая.

1.  $A$  и  $B$  не содержат цвет  $n$ . То есть лежат правее проволоки  $w_n$ . После редукции соответствующие вершины  $\tilde{a}$  и  $\tilde{b}$  лежат в левой половине  $\tilde{\Gamma}$ , то есть левее (или на) трассы  $\mathcal{T}$ , разрезающей граф  $\tilde{\Gamma}$  на две половины.

Направленный путь в  $\tilde{\Gamma}$ , соединяющий  $\tilde{a}$  и  $\tilde{b}$ , в принципе мог бы временами попадать и в правую половину  $\tilde{\Gamma}$ . Однако его всегда можно модифицировать так, что он будет все

время оставаться в левой половине  $\tilde{\Gamma}$  (если кусок пути входит и затем выходит из правой половины, его можно заменить соответствующим куском трассы). А левая половина  $\tilde{\Gamma}$  изоморфно поднимается в  $\Gamma$ . Поэтому поднимается и этот (модифицированный) путь, давая направленный путь в  $\Gamma$  из  $a$  в  $b$ .

2.  $A$  и  $B$  содержат цвет  $n$ . Рассуждение аналогично, теперь  $\tilde{a}$  и  $\tilde{b}$  в правой половине орграфа  $\tilde{\Gamma}$ .

3.  $A$  не содержит  $n$ ,  $B$  содержит  $n$  (противоположный случай противоречит  $A \preceq B$ ). Тут уже безо всякой индукции виден путь из  $\tilde{a}$  в  $\tilde{b}$ . Мы идем из  $\tilde{a}$  в “узловую” вершину  $s_p$ , потом по узловым вершинам поднимаемся до  $s_q$ , и наконец, идем (по правой половине) из  $s_q$  в  $\tilde{b}$ . Первый и последний участки пути поднимаются без проблем. Подъем среднего участка показан на рисунке 45.  $\square$

## 5 Обобщения

До сих пор мы рассматривали базисы П-функций, заданных на булевом кубе  $2^{[n]}$ . Однако можно интересоваться П-функциями (и их базисами), заданными на более общих, чем булев куб, множествах. Два случая стоит выделить отдельно. Это случай ящика, то есть множества вида  $B(a) = \{x \in \mathbb{Z}^n, 0 \leq x \leq a\}$ , где  $a$  – некоторый целочисленный  $n$ -вектор. И случай гиперсимплекса  $\{X \in 2^{[n]}, |X| = m\} = \binom{[n]}{m}$  для фиксированного целого числа  $m$ . Еще более общий случай урезанного ящика был рассмотрен в [16]. Другое направление обобщений – рассматривать точки в кубе, подчиненные некоторой перестановке  $\omega$  на  $[n]$ . Мы говорим, что точка  $X$  из булева куба *подчинена* перестановке  $\omega$ , если из  $i < j$ ,  $\omega(i) < \omega(j)$  и  $j \in X$  следует  $i \in X$ . (Иначе говоря,  $X$  является  $\omega$ -камерным множеством в терминологии [44].)

В случае булева куба мы видели, что базисы тесно связаны с вайрингами (с начальной перестановкой  $id$  и конечной перестановкой  $di$ ). Для работы с более общими областями определения П-функций нужно рассматривать вайринги с более общими краевыми условиями.

### 5.1 $(\sigma, \tau)$ -вайринги

Пусть  $\sigma$  и  $\tau$  – две перестановки множества  $[n]$ . Мы понимаем их как линейные упорядочения множества  $[n]$ :  $\sigma$  задает порядок, при котором  $\sigma^{-1}(1) < \sigma^{-1}(2) < \dots < \sigma^{-1}(n)$ , и аналогично для  $\tau$ . Проволочная диаграмма называется  $(\sigma, \tau)$ -*диаграммой*, если начальные точки проволок упорядочены (при чтении снизу вверх) согласно  $\sigma$ , а конечные точки – согласно  $\tau$  (см. раздел 3.1).

**Определение.** Проволочная  $(\sigma, \tau)$ -диаграмма  $W = (w_1, \dots, w_n)$  называется  $(\sigma, \tau)$ -*вайрингом*, если она удовлетворяет аксиоме циклов СУС из 3.2 и следующей аксиоме

**(Int)** Пусть  $i < j$ . Если начальная точка проволоки  $w_i$  расположена выше начальной точки  $w_j$ , то проволоки  $w_i$  и  $w_j$  не пересекаются.

Для обычных вайрингов, которые мы рассматривали в предыдущих главах, условие (Int) выполняется автоматически;  $(id, di)$ -вайринги мы называем *полными*. Множество (изотопических классов) собственных  $(\sigma, \tau)$ -вайрингов обозначается  $\mathbf{W}(\sigma, \tau)$ .

Как и в случае полных вайрингов, проволоки не могут иметь попутных пересечений (Предложение 3.2). Отсюда легко понять, что если проволоки  $w_i$  и  $w_j$  ( $i < j$ ) действительно пересекаются, то концы их меняют свой порядок по сравнению с началами, так что  $\sigma(i) < \sigma(j)$  и  $\tau(i) > \tau(j)$ . Разумеется, если они не пересекаются, отношение между концами не меняется.

Это замечание имеет простое следствие. Напомним, что множество  $A \subset [n]$  является  $\sigma \cap \tau$ -идеалом, если оно является идеалом частичного порядка  $\sigma \cap \tau$ . Более подробно: пусть  $j \in A$  и выполнены неравенства  $\sigma(i) < \sigma(j)$  и  $\tau(i) < \tau(j)$ ; тогда  $i \in A$ . Это определение  $\sigma \cap \tau$ -идеала. А вот следствие:

**Предложение 5.1** Для любого  $(\sigma, \tau)$ -вайринга  $W$  система  $Sp(W)$  состоит из  $(\sigma, \tau)$ -идеалов.

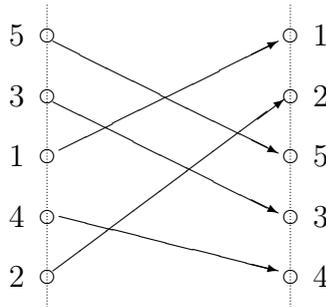
В самом деле, представим, что  $\sigma(i) < \sigma(j)$  и  $\tau(i) < \tau(j)$ . Тогда проволоки  $w_i$  и  $w_j$  не пересекаются и значит проволока  $w_j$  всюду проходит выше проволоки  $w_i$ . Если цвет  $j$  входит в спектр камеры  $C$  вайринга  $W$ , то  $C$  лежит выше (левее) проволоки  $w_j$  и тем более выше (левее) проволоки  $w_i$ . Поэтому и цвет  $i$  входит в  $sp(C)$ .  $\square$

Другое следствие. Напомним, что пара  $(i, j)$  называется *инверсией* перестановки  $\sigma$ , если  $i < j$  и  $\sigma(i) > \sigma(j)$ . Множество всех инверсий обозначается  $Inv(\sigma)$ ; размер его называется *длиной* перестановки  $\sigma$  и обозначается  $l(\sigma)$ . Если пара  $(i, j)$  была инверсией начальной перестановки  $\sigma$  некоторого вайринга, то она является инверсией и конечной перестановки  $\tau$ . Это говорит о том, что не любые  $\sigma$  и  $\tau$  могут выступать как начало и конец вайринга; они должны быть упорядочены по Брюа. Скажем подробнее.

**Определение.** Будем писать  $\sigma \ll \tau$ , если  $Inv(\sigma) \subset Inv(\tau)$ .

Очевидно, что  $\ll$  является рефлексивным, транзитивным и анти-симметричным бинарным отношением на множестве  $\mathfrak{S}_n$  перестановок  $[n]$ . Оно называется *слабым порядком Брюа*; подробнее см. книгу [8]. Таким образом, отношение  $\ll$  превращает  $\mathfrak{S}_n$  в посет. (Известно, что этот посет является решеткой с минимальным элементом  $id$  и максимальным – обратной перестановкой  $di$ .)

Из сказанного выше видно, что если существует  $(\sigma, \tau)$ -вайринг, то  $\sigma \ll \tau$ . Почти очевидно, что верно и обратное. Для этого просто соединим источники и стоки одного цвета (то есть точки  $s_{\sigma(i)}$  и  $t_{\tau(i)}$ ) прямыми линиями (быть может, слегка пошевелив стоки, чтобы разрушить тройные пересечения проволок). Мы получаем проволочную диаграмму, для которой выполнение аксиомы циклов и аксиомы пересечения очевидно. На рисунке 48 приведен пример для перестановок  $\sigma = 31425$  и  $\tau = 54213$ .



В результате мы имеем

**Предложение 5.2**  $(\sigma, \tau)$ -вайринг существует тогда и только тогда, когда  $\sigma \ll \tau$ .

Следующая лемма оправдывает использование значка  $\ll$  для обозначения слабого порядка Брюа.

**Лемма 5.3**  $\sigma \ll \tau$  тогда и только тогда, когда  $S \ll T$  для любого  $\sigma$ -идеала  $S$  и любого  $\tau$ -идеала  $T$ .

*Доказательство.* Предположим  $\sigma \ll \tau$  и проверим  $S \ll T$ . Пусть  $s \in S - T$  и  $t \in T - S$ ; нужно показать, что  $s < t$ . Допустим противное, что  $t < s$ . Рассмотрим два случая. Первый:  $\sigma(t) < \sigma(s)$ . В этом случае в силу идеальности  $S$  мы получаем  $t \in S$ , что противоречит  $s \notin T$ . Второй:  $\sigma(t) > \sigma(s)$ . Вместе с  $s < t$  это означает, что пара  $s < t$  является инверсией для  $\sigma$ , а значит и для  $\tau$ , так что  $\tau(t) > \tau(s)$ . В силу идеальности  $T$  мы получаем  $s \in T$ , что противоречит  $s \in S - T$ .

Обратно, пусть  $S \ll T$  для любого  $\sigma$ -идеала  $S$  и  $\tau$ -идеала  $T$ . Предположим, что пара  $(i, j)$  является инверсией для  $\sigma$ :  $i < j$  и  $\sigma(i) > \sigma(j)$ . Нужно показать, что  $\tau(i) > \tau(j)$ . Предположим, что это не так, то есть  $\tau(i) < \tau(j)$ , и обозначим через  $T$   $\tau$ -идеал, порожденный  $i$ ,  $T = \{t, \tau(t) < \tau(i)\}$ . Аналогично пусть  $S$  —  $\sigma$ -идеал, порожденный  $j$ . Из соотношений выше следует, что  $i \in T - S$  и  $j \in S - T$ . Так как  $S \ll T$ , мы получаем  $j < i$ , что противоречит  $i < j$ .  $\square$

Это же рассуждение показывает, что если  $\sigma \ll \tau$ , то  $S \ll X \ll T$  для любого  $\sigma \cap \tau$ -идеала  $X$ ,  $\sigma$ -идеала  $S$  и  $\tau$ -идеала  $T$ . Иначе говоря, в обозначениях раздела 2.5 мы имеем

**Предложение 5.4** Если  $\sigma \ll \tau$ , то система  $Id(\sigma, \tau)$   $\sigma \cap \tau$ -идеалов состоит из таких множеств  $X$ , что  $\sigma \ll X \ll \tau$ .

На  $(\sigma, \tau)$ -вайринги практически без изменений переносится теория, развитая в предыдущих главах для полных вайрингов. В частности, для них определено понятие повышающих и понижающих флипов и верен результат о том, что если  $(\sigma, \tau)$ -вайринг не строгий, то существует понижающий (и повышающий) флип (см. раздел 4.5). В случае строгих  $(\sigma, \tau)$ -вайрингов можно производить строгие понижающие флипы и дойти до ситуации, когда такие флипы невозможны. Как и в случае полных строгих вайрингов, существует единственный такой вайринг, который называется стандартным. Роль решетки  $2^{[n]}$  играет дистрибутивная решетка  $Id(\sigma, \tau)$   $\sigma \cap \tau$ -идеалов.

Таким образом, множество  $\mathbf{W}(\sigma, \tau)$  собственных  $(\sigma, \tau)$ -вайрингов является частично упорядоченным множеством с единственным минимальным и единственным максимальным элементом. Мы не знаем, является ли этот посет решеткой.

Так как флипы не меняют число элементов в спектре вайринга, кардинальность  $Sp(W)$  не зависит от вайринга  $W$ , но только от граничных условий  $(\sigma, \tau)$ . Для нахождения этого числа удобно считать вайринг  $W$  строгим. Каждый кроссинг является источником для некоторой (однозначно определенной) камеры; кроме того есть  $n + 1$  камера, граничащая с левой прямой  $L$ . Это дает, что полное число камер равно числу кроссингов плюс  $(n + 1)$ . А так как каждый кроссинг соответствует новой инверсии в  $\tau$  по сравнению с  $\sigma$ , мы получаем

$$|Sp(W)| = |Inv(\tau) - Inv(\sigma)| + n + 1 = l(\tau) - l(\sigma) + n + 1.$$

## 5.2 Композиции вайрингов

Вайринги можно компоновать. Пусть у нас есть  $(\rho, \sigma)$ -вайринг  $W = (w_1, \dots, w_n)$  (в полосе  $\Pi$ ) и  $(\sigma, \tau)$ -вайринг  $W' = (w'_1, \dots, w'_n)$  в полосе  $\Pi'$ . Будем считать, что правая сторона  $\Pi$  совпадает с левой стороной полосы  $\Pi'$ , и что конечные точки вайринга  $W$  совпадают с начальными точками вайринга  $W'$ . Соединим проволоку  $w_i$  с  $w'_i$ ; получим новую проволоку  $w''_i$  в полосе  $\Pi \cup \Pi'$  и тем самым проволочную диаграмму  $W''$ , которую естественно обозначить как  $W' \circ W$ .

Мы утверждаем, что эта составная диаграмма также является  $(\rho, \tau)$ -вайрингом, то есть выполнены условия СУС и Int. Условие цикла очевидно: если у нас имеется анти-нормальное пересечение, то оно относится к  $W$  или к  $W'$ , где оно выполняется. Аксиома пересечения проверяется столь же бесхитростно.

Заметим еще, что  $Sp(W' \circ W) = Sp(W') \cup Sp(W)$ . Пересечение спектров  $W$  и  $W'$  происходит в точности по множеству  $P_\sigma = \{\sigma^{-1}([k]), k \in [n]\}$ . Геометрически (в терминах вайрингов) пересечение происходит так. Правые граничные камеры  $(\rho, \sigma)$ -вайринга  $W$  объединяются с левыми граничными камерами  $(\sigma, \tau)$ -вайринга  $W'$  и дают камеры со спектрами из  $P_\sigma$ . Получается цепь камер, начиная с нижней камеры и кончая верхней камерой. Соседние камеры последовательно (при движении снизу вверх) разделяются проволоками цвета  $\sigma^{-1}(1), \dots, \sigma^{-1}(n)$ . Вертикальная прямая  $L_\Pi = R'_\Pi$  проходит внутри этих камер. См. рисунок 49, на котором нарисовано соединение (композиция) двух вайрингов. Цепь камер (с расположенной внутри нее прямой  $L_\Pi = R'_\Pi$ ) указана их спектрами.

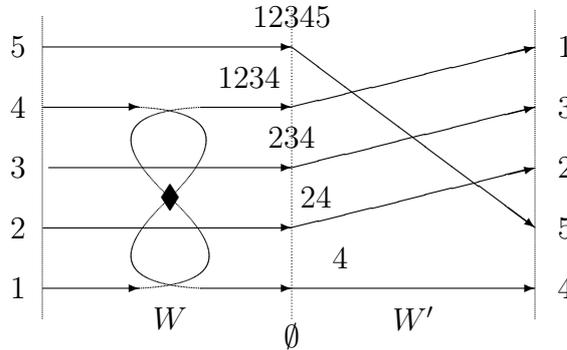


Рис. 49

Все это говорилось для того, чтобы сказать про обращение этой конструкции соединения, операцию “разрезания” вайринга. Представим себе, что в спектре  $Sp(W)$   $(\rho, \tau)$ -вайринга  $W$  задана цепь  $C_\bullet = (C_0, \dots, C_n)$  нециклических камер, причем  $C_0 = \emptyset$ , а  $C_k$  отличается от  $C_{k-1}$  прибавлением цвета  $i_k$ , который мы обозначим как  $\sigma^{-1}(k)$ . Мы получаем тем самым перестановку  $\sigma$ , и  $sp(C_k) = \sigma^{-1}([k])$ . Из Предложения 3.6 видно, что камеры  $C_{k-1}$  и  $C_k$  соседние по общему ребру цвета  $\sigma^{-1}(k)$ . Поэтому мы можем провести внутри этой цепи камер  $C_\bullet$  линию (“разрез”), которая делит вертикальную полосу  $\Pi$  на две части, левую  $\Pi'$  и правую  $\Pi''$ . Соответственно вайринг  $W$  разрезается этой линией на две проволочные диаграммы,  $W'$  и  $W''$ .

Легко понять, что каждая из них является вайрингом, левая –  $(\rho, \sigma)$ -вайрингом, правая –  $(\sigma, \tau)$ -вайрингом. Разумеется, если мы теперь “соединим” вайринги  $W'$  и  $W''$ , мы получим исходный вайринг  $W$ .

Приведем одно простое следствие существования композиции вайрингов. Пусть  $W$  –  $(\sigma, \tau)$ -вайринг. Тогда его спектр  $Sp(W)$  является ЛЗ-системой. Действительно, пусть  $W_0$  – произвольный  $(id, \sigma)$ -вайринг (например, стандартный, см. 2.5), а  $W_1$  – произвольный  $(\tau, di)$ -вайринг. Тогда их композиция  $W_1 \circ W \circ W_0$  является полным вайрингом; по Теореме 4.1 его спектр слабо разделен. А так как  $Sp(W)$  составляет часть предыдущей системы, он тоже слабо разделен.

Верно и обратное.

**Теорема 5.5** Пусть  $\mathcal{X}$  – ЛЗ-система, состоящая из  $(\sigma \cap \tau)$ -идеалов, причем  $\sigma \ll \tau$ . Тогда существует  $(\sigma, \tau)$ -вайринг  $W$ , для которого  $\mathcal{X} \subset Sp(W)$ .

*Доказательство.* Пусть  $Id(\sigma)$  – система всех  $\sigma$ -идеалов. Применяя Предложение 5.4, мы видим, что любой элемент  $Id(\sigma)$  находится в отношении  $\ll$  с любым элементом из  $\mathcal{X}$ . В частности, они слабо разделены. Поэтому система  $Id(\sigma) \cup \mathcal{X}$  снова ЛЗ-система и снова состоит из  $\sigma \cap \tau$ -идеалов. Аналогично для  $Id(\tau)$ . Тем самым мы можем считать, что система  $\mathcal{X}$  содержит  $Id(\sigma)$  и  $Id(\tau)$ .

Теперь, по теореме 4.2 существует полный вайринг  $\widehat{W}$ , для которого  $\mathcal{X} \subset Sp(\widehat{W})$ . Цепи  $Id(\sigma)$  и  $Id(\tau)$  задают “вертикальные разрезы” вайринга  $\widehat{W}$ . Обозначим через  $W_0$ ,  $W$  и  $W_1$  части полного вайринга  $\widehat{W}$ , расположенные до разреза  $Id(\sigma)$ , между разрезами  $Id(\sigma)$  и  $Id(\tau)$ , и после разреза  $Id(\tau)$ . Это вайринги с соответствующими граничными данными; в частности,  $W$  –  $(\sigma, \tau)$ -вайринг.

Пусть теперь  $X$  – произвольный элемент системы  $\mathcal{X}$ ; он является спектром некоторой нециклической камеры  $C$  полного вайринга  $\widehat{W}$ . Мы утверждаем, что эта камера на самом деле является камерой центральной части  $W$ .

В самом деле, предположим, что камера  $C$  лежит в первой части, то есть в  $W_0$ . В этом случае  $X = sp(C)$  является  $id \cap \sigma$ -идеалом; по предположению  $X$  также  $\sigma \cap \tau$ -идеал. В этом случае (см. Предложение 5.4) мы имеем  $\sigma \ll X \ll \sigma$ . Это (как легко понять, сравнивая  $X$  с  $\sigma$ -идеалом того же размера), возможно только если  $X$  является  $\sigma$ -идеалом, то есть принадлежит системе  $Id(\sigma)$ , а камера  $C$  является также и граничной камерой  $(\sigma, \tau)$ -вайринга  $W$ . Аналогично рассуждаем в том случае, когда камера  $C$  лежит в третьей части  $W_1$ .

Поэтому  $\mathcal{X} \subset Sp(W)$ . □

**Следствие 5.6** Пусть  $\mathcal{X}$  – максимальная по включению ЛЗ-система  $(\sigma \cap \tau)$ -идеалов (где  $\sigma \preceq \tau$ ). Тогда ее размер равен  $l(\tau) - l(\sigma) + n + 1$ .

В частности при  $\sigma = id$  мы получаем утвердительный ответ на гипотезу 1.5 из [44].

Существование композиций вайрингов позволяет рассматривать  $\mathfrak{S}_n$  как множество объектов категории  $\mathbf{W}$ , в которой морфизмами из  $\sigma$  в  $\tau$  являются элементы  $\mathbf{W}(\sigma, \tau)$  (аксиомы категории насчет тождественных морфизмов и ассоциативности композиции очевидны). Эту категорию можно считать уточнением (или оснащением) посета Брюа.

Отметим, что это не просто категория. Множества  $Hom_{\mathbf{W}}(\sigma, \tau)$  являются в свою очередь посетами (а может быть даже решетками), и композиция морфизмов согласована с этими структурами посетов. Так что это некий аналог аддитивной категории.

### 5.3 Плюккерovy функции на идеалах и ящиках

До сих пор мы рассматривали Плюккерovy функции на булевом кубе  $2^{[n]}$ . Однако их можно рассматривать и на других множествах, в частности, на некоторых подмножествах этого куба. Одну такую возможность мы обсудим сейчас, а другую – в следующем разделе.

Пусть  $\preceq$  – произвольный частичный порядок на  $[n]$ . *Идеалом* (или, точнее,  $\preceq$ -идеалом) называется подмножество  $A \subset [n]$ , обладающее свойством:  $a \in A$  и  $b \preceq a$  влечет  $b \in A$ . Множество всех идеалов данного посета обозначим  $Id$  (или  $Id(\preceq)$ ); это (дистрибутивная) решетка относительно операций  $\cap$  и  $\cup$ .

Пусть теперь дано подмножество  $X$  и три (не принадлежащие  $X$ ) элемента  $i < j < k$ . Если множества  $Xij$ ,  $Xk$ ,  $Xjk$  и  $Xi$  являются идеалами, то  $Xj$  и  $Xik$  (как и  $X$  и  $Xijk$ ) тоже идеалы. Так что имеет смысл говорить о соотношениях Плюккера. Функция на  $Id$  называется П-функцией, если она удовлетворяет всем таким соотношениям. Множество П-функций со значениями в полукольце  $R$  обозначим  $\mathcal{P}_n(Id, R)$ . Как и раньше, можно ставить вопрос о базисах. Мы не знаем ответ для произвольных частичных порядков.

В дальнейшем мы ограничимся частным случаем, когда порядок  $\preceq$  является пересечением двух линейных порядков  $\sigma$  и  $\tau$ , причем  $\sigma \ll \tau$ . Множество соответствующих идеалов обозначим  $Id(\sigma \cap \tau)$ . В этом случае мы построим базис, который естественно называть  $(\sigma, \tau)$ -стандартным.  $(\sigma, \tau)$ -интервалом будем называть множество вида  $S \cap T$ , где  $S$  –  $\sigma$ -идеал, а  $T$  –  $\tau$ -идеал. Такой интервал очевидно является идеалом. Обобщая теорему 1.1, мы утверждаем, что

*множество  $Int(\sigma, \tau)$   $(\sigma, \tau)$ -интервалов является П-базисом в  $Id(\sigma \cap \tau)$ .*

Доказательство этого утверждения распадается на две части: инъективность и сюръективность, которые доказываются различно. Мы начнем с инъективности.

Можно рассуждать в стиле доказательства инъективности теоремы 1.1. Однако проще выстрелить из пушки по воробьям. Пусть  $A$  –  $(\sigma \cap \tau)$ -идеальное множество. Повторяя рассуждение из доказательства Теоремы 5.5, мы строим  $(\sigma, \tau)$ -тайлинг области  $Z(\sigma, \tau)$ , причем точка  $A$  является одной из вершин этого тайлинга. А он соединяется со стандартным  $(\sigma, \tau)$ -тайлингом цепочкой понижающих флипов. Остается заметить, что вершины стандартного  $(\sigma, \tau)$ -тайлинга – это в точности  $(\sigma \cap \tau)$ -идеалы.

Докажем теперь сюръективность. Пусть  $f_0$  – произвольная функция на  $Int(\sigma, \tau)$ . Как уже говорилось, множество  $Int(\sigma, \tau)$  реализуется как множество вершин (стандартного)  $(\sigma, \tau)$ -тайлинга  $ST(\sigma, \tau)$  области  $Z(\sigma, \tau)$  в зоногоне  $Z_n$ . Заполним области  $Z(id, \sigma)$  и  $Z(\tau, di)$  тайлингами (например, стандартными). В результате мы получаем полный тайлинг  $T$  зоногона  $Z_n$ , продолжающий (частичный) тайлинг  $ST(\sigma, \tau)$ . Вершины этого тайлинга (см. Следствие 2.7) дают (строгий) П-базис  $\mathcal{B}$  в булевом кубе  $2^{[n]}$ . Продолжим функцию  $f_0$  с  $Int(\sigma, \tau)$  на  $\mathcal{B}$  произвольным способом до функции  $F_0$ . Функция  $F_0$  в свою очередь продолжается до П-функции  $F$  на кубе  $2^{[n]}$ . Наконец, ограничение  $F$  на  $Id(\sigma \cap \tau)$  дает П-функцию  $f$  на  $Id(\sigma \cap \tau)$ , продолжающую  $f_0$ .  $\square$

На самом деле, это рассуждение дает более общий результат:

**Предложение 5.7** *Пусть  $\mathcal{X}$  – ЛЗ-система, причем  $\mathcal{X} \subset Id(\sigma \cap \tau)$ . Тогда любая функция  $f_0$  на  $\mathcal{X}$  продолжается до П-функции на решетке  $Id(\sigma \cap \tau)$ .*

*П-функции на ящиках*

Быть может, наиболее простая область определения Плюккерových функций после булева куба – это *ящик*  $B(a) = \{x \in \mathbb{Z}^n, 0 \leq x \leq a\}$ , где  $a = (a_1, \dots, a_n)$  – целочисленный вектор, задающий размер ящика. Определение П-функций на  $B(a)$  очевидно.

Оказывается, такие ящики удобно размещаются в булевом кубе большей размерности, причем как решетки идеалов. А именно, положим  $N = a_1 + \dots + a_n$ . Упорядоченное множество  $[N] = \{1, \dots, N\}$  естественно разбивается на последовательные интервалы-блоки  $B_1, \dots, B_n$  размера  $a_1, \dots, a_n$  соответственно. Для элемента  $x \in B(a)$  (то есть при  $0 \leq x \leq a$ ) обозначим через  $[x]$  подмножество в  $[N]$ , которое состоит из *первых*  $x_i$  элементов в каждом блоке  $B_i$ . Это задает вложение  $[]$  ящика  $B(a)$  в булев куб  $2^{[N]}$ . Более того, это вложение согласовано с операциями взятия верхней и нижней грани, так что образ  $[]B(a)$  ящика является подрешеткой в  $2^{[N]}$ . На самом деле, как легко убедиться, эта подрешетка является подрешеткой идеалов в  $2^{[N]}$ .

А именно, рассмотрим следующую перестановку  $\Sigma_a$  множества  $[N]$ . Сначала идут элементы блока  $B_n$  (в естественном порядке), затем элементы  $B_{n-1}$ , и так далее до  $B_1$ . Иначе говоря, блоки переставляются в обратном порядке, а внутри блоков сохраняется естественный порядок. Почти очевидно, что образ  $B(a)$  при вложении  $[]$  есть не что иное, как  $Id(id \cap \Sigma_a)$ .

Применяя предыдущую теорему к этому случаю, мы получаем, что система  $(id \cap \Sigma_a)$ -интервалов образует П-базис в  $Id(id \cap \Sigma_a)$ . Возвращаясь к ящику  $B(a)$ , мы получаем, что система  $\mathcal{FI}nt(a)$  “размытых” интервалов образует П-базис в  $B(a)$ . Здесь *размытым интервалом* (а точнее, размытым  $a$ -интервалом) в  $[N]$  мы называем любой вектор  $x = (x_1, \dots, x_n)$  в  $B(a)$ , который обладает следующим свойством: если  $x_i > 0$ ,  $x_k > 0$  и  $i < j < k$ , то  $x_j = a_j$ . Это утверждение – один из главных результатов нашей работы [16]. И вообще, максимальные слабо разделенные ЛЗ-системы в  $Id(id \cap \Sigma_a)$  дают все (ручные) П-базисы для ящика  $B(a)$ .

Там же рассказано о представлении (строгих) базисов в ящиках с помощью ромбических тайлингов “растянутых” зононов  $Z(a)$ . Представление об этом дает рисунок 50 стандартного тайлинга для случая  $n = 4$  и  $a = (2, 4, 2, 3)$ :

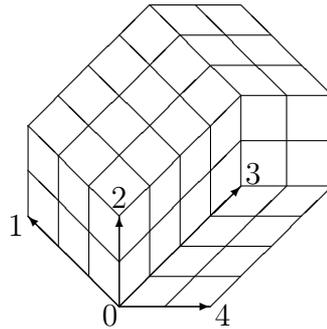


Рис. 50

## 5.4 Усеченные идеалы и грассмановы системы

Можно сделать еще один шаг в направлении обобщения и рассмотреть ограничения на размер подмножеств. Снова пусть  $\sigma$  и  $\tau$  – перестановки  $[n]$ , связанные соотношением Брюа  $\sigma \ll \tau$ . Кроме того зададимся двумя целыми числами  $m \leq M$ . Через  $Id_m^M(\sigma, \tau)$

обозначим систему  $(\sigma, \tau)$ -идеалов в  $[n]$  размера между  $m$  и  $M$ . Например,  $Id(\sigma, \tau) = Id_0^n(\sigma, \tau)$ . Другой пример:  $Id_m^m(id, di) = \binom{[n]}{m}$ , гиперсимплекс  $m$ -множеств в  $[n]$ .

Снова можно говорить о  $\Pi$ -базисах и слабо разделенных системах в  $Id_m^M(\sigma, \tau)$ . Фактически это одно и то же (если накладывать еще условие максимальности по включению). И устанавливается все это одним приемом продолжения, о котором мы сейчас расскажем.

В случае обычных интервалов мы видели, что интервалы раскалывают любое множество. В общем случае можно ожидать, что  $(\sigma, \tau)$ -интервалы будут раскалывать любой  $\sigma \cap \tau$ -идеал. Так оно и есть.

**Лемма 5.8** Пусть  $I$  –  $(\sigma, \tau)$ -интервал, а  $A$  – произвольный  $\sigma \cap \tau$ -идеал размера не больше, чем  $I$ . Тогда  $I$  раскалывает  $A$ .

*Доказательство.* Пусть  $I = \sigma^{-1}([k]) \cap \tau^{-1}([l])$ . И пусть  $a \in A - I$ . Тогда  $a$  не лежит в  $\sigma^{-1}([k])$  или  $\tau^{-1}([l])$ . Элементы первого типа отнесем к множеству  $A''$ , второго – к  $A'$ . Проверим, что если  $a \in A'$ , то  $a$  меньше любого  $i \in I - A$ .

Предположим, что  $i < a$ . Так как  $a$  не лежит в  $\tau^{-1}([l])$ , то  $\tau(a) > l$ . Так как  $i$  принадлежит  $\tau^{-1}([l])$ , то  $\tau(i) \leq l$ . Поэтому  $\tau(i) < \tau(a)$ , и пара  $(i, a)$  не является инверсией для  $\tau$ . Следовательно она не инверсия и для  $\sigma$  (ведь  $\sigma \preceq \tau$ ), так что  $\sigma(i) < \sigma(a)$ . Вспоминая, что  $a$  принадлежит  $\sigma \cap \tau$ -идеалу  $A$ , получаем  $i \in A$ , вопреки предположению.

Аналогично проверяется, что  $I - A < A''$ . Вместе с неравенством  $|A| \leq |I|$  это означает, что  $I$  раскалывает  $A$ .  $\square$

Аналогично понятию  $(\sigma, \tau)$ -интервала можно ввести понятие  $(\sigma, \tau)$ -ко-интервала как множества вида  $S \cup T$ , где  $S$  –  $\sigma$ -идеал, а  $T$  –  $\tau$ -идеал. Множество  $coInt(\sigma, \tau)$   $(\sigma, \tau)$ -коинтервалов представляется т.н. ко-стандартным  $(\sigma, \tau)$ -тайлингом. И любой  $(\sigma, \tau)$ -идеал  $A$  раскалывает любой  $(\sigma, \tau)$ -коинтервал  $C$ , если  $|C| \leq |A|$ .

Пусть теперь  $\mathcal{C}$  – слабо разделенная система в  $Id_m^M(\sigma, \tau)$ . Дополним ее всеми  $(\sigma, \tau)$ -интервалами размера  $M, M + 1, \dots, n$ , а также всеми  $(\sigma, \tau)$ -ко-интервалами размера  $m, m - 1, \dots, 0$ . В результате мы получим слабо разделенную систему  $\widehat{\mathcal{C}}$  уже в  $Id(\sigma \cap \tau)$ . А последнюю можно вложить в спектр некоторого  $(\sigma, \tau)$ -вайринга  $W$ . Получаем, что исходная система  $\mathcal{C}$  тоже реализуется как часть  $Sp(W)$ , образованная множествами размера от  $m$  до  $M$ . Элементы же  $Sp(W)$ , имеющие размер  $> M$ , являются  $(\sigma, \tau)$ -интервалами; имеющие размер  $< n - m$  –  $(\sigma, \tau)$ -ко-интервалами. Стоит подчеркнуть, что получающиеся вайринги (при  $m > 1$  и  $M < n - 1$ ) неизбежно будут нестрогими.

Чтобы быть более конкретными, рассмотрим пример гиперсимплекса  $\binom{[n]}{m}$ . Здесь  $\sigma = id$ ,  $\tau = di$ , так что мы не будем упоминать эти перестановки.

**Определение.** Система  $\mathcal{G}$  подмножеств в  $[n]$  размера  $t$  называется *грассмановой* (или точнее,  $t$ -грассмановой), если она слабо разделенная и состоит из  $t(n - t) + 1$  множества.

Если мы добавим к ней интервалы размера  $> t$  (в количестве  $(n - t)(n - t + 1)/2$ ) и ко-интервалы размера  $< t$  (в количестве  $t(t + 1)/2$ ), мы получим ЛЗ-систему  $\widehat{\mathcal{G}}$  размера  $n(n + 1)/2 + 1$ , то есть максимальную ЛЗ-систему. А такая система представляется (полным) вайрингом и является  $\Pi$ -базисом в  $2^{[n]}$ . Отсюда нетрудно вывести, что исходная грассманова система  $\mathcal{G}$  была  $\Pi$ -базисом в соответствующем гиперсимплексе.

Можно сказать и иначе. Пусть  $\mathcal{C}$  – система подмножеств размера  $t$ , которая слабо разделена. Снова добавляя интервалы размера  $\geq t$  и коинтервалы размера  $\leq t$ ,

мы получаем ЛЗ-систему  $\widehat{\mathcal{C}}$  в булевом кубе  $2^{[n]}$ . А ее можно расширить до ЛЗ-системы  $\mathcal{D}$  размера  $n(n+1)/2 + 1$ . Легко понять, что новых элементов (по сравнению с  $\widehat{\mathcal{C}}$ ) на уровнях, отличных от  $m$ , не появится. В самом деле, пусть  $A$  – произвольный неинтервал размера  $> m$ . Тогда в нем есть “дырка”  $j$  строго между  $\max A$  и  $\min A$ . Окружим эту дырку интервалом  $I$  размера  $m$ , который лежит строго внутри интервала  $[\min A.. \max A]$ . Тогда  $A$  и  $I$  не строго разделены, хотя  $I \in \widehat{\mathcal{C}}$ .

Поэтому часть  $\mathcal{D}$ , состоящая из подмножеств размера  $m$ , слабо разделена и имеет мощность  $m(n-m) + 1$ . Тем самым мы доказали следующее утверждение, высказанное гипотеза в работе [55].

**Предложение 5.9** *Любая ЛЗ-система подмножеств, имеющих размер  $m$ , расширяется до грассмановой системы.*

Скажем еще немного о структуре грассмановых систем. Ситуация здесь во многом аналогична ситуации с (максимальными) ЛЗ-системами в булевом кубе.

1) Прежде всего приведем один конкретный пример такой системы. Он состоит из всех полуторных интервалов в  $[n]$ . Так мы называем подмножества вида  $[1..i] \cup [j..k]$ , где  $i \geq 0$  и  $k \geq j - 1$ . У него есть основной интервал  $[j..k]$  и, быть может, дополнительный (полу)интервал  $[1..i]$ , начинающийся с 1. В частности, все интервалы и коинтервалы размера  $m$  входят в нашу систему. Можно проверить, что это действительно ЛЗ-система, и что ее размер равен  $m(n-m) + 1$ . Такую систему можно назвать *стандартной грассмановой системой*.

2) Взяв любую максимальную ЛЗ-систему в  $2^{[n]}$ , можно, делая понижающие флипы, вытеснить на уровень  $m$  все неинтервалы размера  $> m$ . Здесь удобнее перейти на язык вайрингов. Представим себе, что наш вайринг имеет циклическую камеру, спектр которой имеет размер  $> m$ . Тогда, как объяснялось в разделе 4.5, можно сделать понижающий флип в этом уровне. В результате таких операций вайринг станет строгим на уровнях выше  $m$ . Будем делать понижающие флипы на уровнях выше  $m$  пока это возможно. Рассуждение в стиле леммы 2.6 показывает, что полученный вайринг станет стандартным на уровнях выше  $m$ . В терминах ЛЗ-системы это означает, что множества размера  $> m$  являются интервалами.

Аналогично, делая повышающие флипы на уровнях ниже  $m$ , мы добьемся того, что множества нашей системы, имеющие размер  $< m$ , являются коинтервалами. Заметим, что такие флипы могут изменить множества размера  $\leq m$ , но не затрагивают множества размера  $> m$ . В результате мы придем к максимальной ЛЗ-системе в  $2^{[n]}$ , у которой выше  $m$  стоят интервалы, а ниже  $m$  – коинтервалы. Уровень  $m$  такой системы дает грассманову систему.

3) От одной грассмановой системы можно переходить к другой, делая соответствующие флипы. Мы их называем *4-флипами*, потому что в отличие от предыдущего (флагового) случая они затрагивают 4 элемента  $i < j < k < l$  и сводятся к замене множества  $Xik$  на  $Xjl$  (это повышающий 4-флип) или наоборот (понижающий 4-флип); все это должно происходить в присутствии четырех “свидетелей”  $Xij$ ,  $Xkl$ ,  $Xjk$  и  $Xil$ . Как мы увидим, любые грассмановы наборы связаны цепочками таких 4-флипов.

Чтобы лучше понять последнее, рассмотрим вайринги, устроенные стандартно выше уровня  $m$  и ко-стандартно ниже этого уровня. Такой вайринг изображен на рис. 51 (проволоки внутри прямоугольника  $P$  не нарисованы)

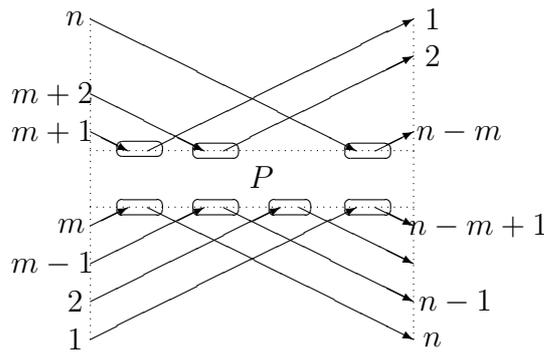


Рис. 51

Главный интерес тут представляет часть вайринга, расположенная в горизонтальной полосе  $P$  между уровнями  $m$  и  $m + 1$  (выше и ниже диаграммы одинаковы для всех вайрингов). Это снова проволочная диаграммы, только теперь входы и выходы расположены на уровнях  $m$  и  $m + 1$ . Причем они естественно объединяются в пары. Наверху идут пары (слева направо)  $(m + 1, 1), \dots, (n, n - t)$  в количестве  $n - t$  пар. Внизу (тоже слева направо) идут пары  $(m, n), \dots, (1, n - t + 1)$  в количестве  $t$  пар. Первая вершина каждой пары – источник, вторая – сток. Внутри прямоугольника  $P$  диаграмма удовлетворяет старому условию циклов СУС. Такие диаграммы будем называть грассмановыми вайрингами. Для конкретности один такой вайринг нарисован на рис. 52.

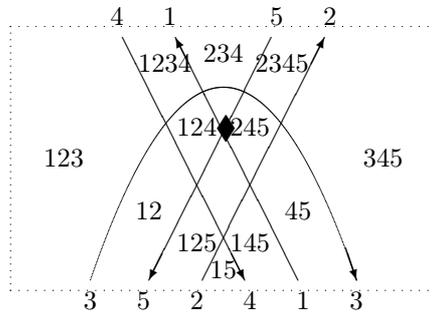


Рис. 52

Далее мы скажем кратко, опуская детали, которые можно найти в [17]. Как и раньше, камерам грассманова вайринга можно приписывать наборы цветов (спектры). Верхне-граничные камеры – интервалы попеременно размера  $t, t + 1, t, \dots, t$ ; нижне-граничные – коинтервалы размера попеременно  $t, t - 1, t, \dots, t$ . Неграничные (внутренние) камеры расположены в шахматном порядке – циклические и нециклические. Короче, мы получаем фактически то, что Постников [54] называл “альтернирующей проволочной диаграммой”, а Скотт – “диаграммой Постникова”. В терминах грассмановых диаграмм 4-флипы реализуются перестройками как на рис. 53

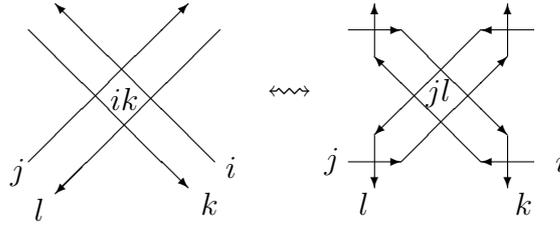


Рис. 53

Тут тоже при необходимости надо “разводить пустые линзы”.

Постников [54] доказывает (в нашей терминологии), что любые грассмановы диаграммы можно соединить цепочкой 4-флипов. Однако можно сказать и точнее: любая грассманова диаграмма соединяется цепочкой понижающих 4-флипов со стандартным грассмановым вайрингом. Грубо говоря, надо, пользуясь понижающими флипами типа  $jn \rightarrow ik$ , передвинуть проволоку цвета  $n$  максимально на юго-восток. Затем подобным же образом двигать проволоку цвета  $n - 1$  и т.д. Например, если в диаграмме из Рис. 52 сделать 4-флип в окрестности камеры 245, мы получим уже стандартный грассманов вайринг.

Полученные выше результаты для грассманова случая (или случая гиперсимплекса) легко обобщаются на случай усеченного булева куба (полоса в кубе между уровнями  $m$  и  $M$ ), усеченного ящика или общий случай  $Id_m^M(\sigma, \tau)$ .

## 6 Применения

### 6.1 Слабый порядок Брюа

В этом разделе мы обобщаем результаты раздела 2.5 на случай пары перестановок, связанных слабым порядком Брюа. Попутно мы получим классическое описание этого порядка через редуцированные разложения.

Пусть  $\sigma$  и  $\tau$  – две перестановки, причем  $\sigma \ll \tau$ . Строгие  $(\sigma, \tau)$ -вайринги дуализируются с помощью ромбических тайлингов. Только уже не всего зоногона  $Z_n$ , а некоторой специальной многогранной области  $Z(\sigma, \tau)$  в нем. Мы уже вводили в разделах 2.2 и 2.5 понятие змейки (которую можно понимать как кусочно-линейный путь в зоногоне  $Z_n$ ) и объясняли связь змеек с перестановками. Ввиду  $\sigma \ll \tau$  змейка  $\mathcal{S}(\tau)$ , соответствующая  $\tau$ , проходит правее змейки  $\mathcal{S}(\sigma)$ , и они вместе ограничивают многогранную область  $Z(\sigma, \tau)$  внутри зоногона  $Z_n$ . Понятие ромбического тайлинга естественно переносится на такие области – это разбиение области на ромбы. Как и раньше, такие ромбические тайлинги биективно соответствуют строгим  $(\sigma, \tau)$ -вайрингам.

Предложение 5.2 при дуализации дает

**Предложение 6.1** Ромбический тайлинг области  $Z(\sigma, \tau)$  существует, если  $\sigma \ll \tau$ .

Впрочем, можно явно построить т.н. стандартный  $(\sigma, \tau)$ -тайлинг, обобщая конструкцию из раздела 2.6. Мы начинаем с верхней вершины области  $Z(\sigma, \tau)$ . В нее входили два граничных ребра: слева ребро цвета  $j$ , справа – цвета  $i_n$ . Как ранее объяснялось,  $j > i_n$  (если эти ребра не совпадают; в противном случае мы просто сдвигаемся вниз

по этому общему ребру). Поэтому мы можем образовать такой ромб и сдвинуться в правую вершину этого ромба. В нее снова слева входит ребро цвета  $j$ , а справа – ребро цвета  $i_{n-1}$ . Образует новый ромб и так далее, пока справа не встретится ребро цвета  $j$ . В результате мы построили  $j$ -полоску около правой границы области  $Z(\sigma, \tau)$ . Остаток заполняем по тому же рецепту.

Полученный таким образом тайлинг области  $Z(\sigma, \tau)$  мы называем *стандартным*  $(\sigma, \tau)$ -тайлингом. Кстати, как легко понять, спектр такого стандартного  $(\sigma, \tau)$ -тайлинга состоит из  $(\sigma, \tau)$ -интервалов, то есть множеств вида  $S \cap T$ , где  $S$  –  $\sigma$ -идеал, а  $T$  –  $\tau$ -идеал.

Поясним сказанное примером из рис. 48. Мы рисуем сначала змейки для  $\sigma$  и  $\tau$ .

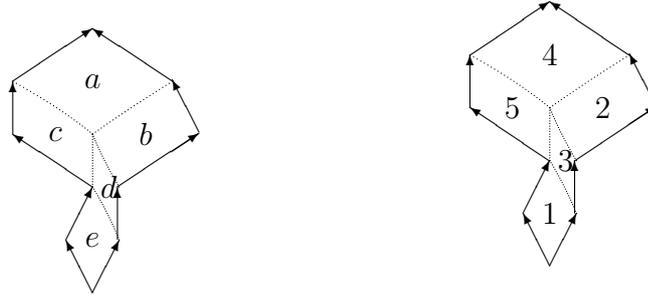


Рис. 54

Змейка для  $\sigma$  кончается цветом 5, и мы строим ромб  $a$  типа  $(1, 5)$ , а затем  $b$  типа  $(2, 5)$ . Переходим к следующему ребру левой змейки (оно цвета 3) и строим ромбы  $c$  типа  $(1, 3)$  и  $d$  типа  $(2, 3)$ . Следующее звено цвета 1 не дает никаких ромбов. Наконец, звено цвета 4 дает ромб  $e$  типа  $(2, 4)$ . Так мы получаем левую картинку из рис. 54; правая изображает правильную нумерацию того же тайлинга (см. ниже).

В духе рассуждения о существовании ячейки из раздела 4.5 можно понять, что если  $T$  – нетривиальный тайлинг между змейками  $\mathcal{S}(\sigma)$  и  $\mathcal{S}(\tau)$ , то существует ромб  $R$ , правая сторона которого примыкает к правой змейке  $\mathcal{S}(\tau)$ . Отщепление такого ромба приводит к новой змейке и новой перестановке  $\tau'$ . Снова выполнено соотношение  $\sigma \preceq \tau'$  (благодаря наличию тайлинга  $T - \{R\}$  между  $\sigma$  и  $\tau'$ ); кроме того  $\tau = \tau' s$ , где  $s$  – некоторая соседняя транспозиция. Такой процесс отщепления ромбов у тайлинга приводит в конечном счете к представлению  $\tau = \sigma s^1 \dots s^l$ , где  $s^k$  – (соседние) транспозиции, а  $l = |\text{Inv}(\tau) - \text{Inv}(\sigma)|$ . Это и есть классическое определение слабого порядка Брюа (см. [8]).

Итог можно подвести в следующей теореме.

**Теорема 6.2** Пусть  $\sigma$  и  $\tau$  – перестановки  $[n]$ . Эквивалентны следующие утверждения:

- 1)  $\sigma \ll \tau$ ;
- 2) существует ромбический тайлинг области  $Z(\sigma, \tau)$ ;
- 2')  $\tau$  доминирует  $\sigma$  в смысле классического определения слабого порядка Брюа;
- 3) существует  $(\sigma, \tau)$ -вайринг;
- 4) для любых  $k$  и  $l$  выполнено соотношение  $\sigma^{-1}([k]) \ll \tau^{-1}([l])$ .

*Доказательство.* 1) влечет 2) по Предложению 6.1. Эквивалентность 2) и 2') только что была установлена. Ясно, что 2) влечет 3), а 3) влечет 1), как было замечено в разделе 5.1. Эквивалентность 1) и 4) установлена в Лемме 5.3.  $\square$

**Замечание.** Можно ослабить условие 4) теоремы 6.2 до следующего:

4') множества  $\sigma^{-1}([k])$  и  $\tau^{-1}([l])$  слабо разделены при любых  $k$  и  $l$ , и для любого  $p$  выполняется  $\sigma^{-1}([p]) \leq \tau^{-1}([p])$  (в смысле стохастического доминирования  $\leq$  из Введения).

Покажем, что 4') влечет 4). Ясно, что слабая разделенность  $\sigma^{-1}([p])$  и  $\tau^{-1}([p])$  и  $\sigma^{-1}([p]) \leq \tau^{-1}([p])$  влекут  $\sigma^{-1}([p]) \ll \tau^{-1}([p])$ . Остается проверить, что  $\sigma^{-1}([p]) \ll \tau^{-1}([q])$  для любых  $p, q$ . Если  $p \leq q$ , это следует из Предложения 4.4. Предположим, что  $p > q$ , и обозначим  $A = \sigma^{-1}([p])$ ,  $A' = \sigma^{-1}([q])$  и  $B = \tau^{-1}([q])$ . Мы имеем  $A' \subset A$ ,  $A' \ll B$  и должны показать, что  $A \ll B$ .

Так как  $A$  и  $B$  сильно разделены, и размер  $A$  строго больше, то  $A$  раскалывает  $B$ :  $B' < A - B < B''$  для некоторого разбиения  $B' \sqcup B'' = B - A$ . Если  $B'$  пусто, мы получаем  $A \ll B$ ; поэтому мы можем предполагать, что  $B'$  содержит некоторый элемент  $b'$ .  $A' - B$  тоже содержит некоторый элемент  $a'$  (иначе  $A'$  лежит в  $B$ , что в силу равенства размеров означает  $A' = B$ ). Но тогда  $b' < a'$ , что противоречит предположению  $A' \ll B$ .  $\square$

Такая формулировка интересна еще тем, что если мы отбросим требование слабой разделенности в 4'), то получим в точности характеристику *сильного* порядка Брюа (см. [8, Theorem 2.1.5] или [27, §10.5]).

Пользуясь тайлингами, можно организовать  $\mathfrak{S}_n$  в категорию  $\mathbf{T}$ , считая морфизмами из  $\sigma$  в  $\tau$  тайлинги области  $Z(\sigma, \tau)$ . Это будет подкатегория в  $\mathbf{W}$ . Множество  $\text{Hom}_{\mathbf{T}}(\sigma, \tau)$  непусто тогда и только тогда, когда  $\sigma \ll \tau$ , так что это тоже уточнение посета Брюа. Отметим еще, что  $\text{Hom}_{\mathbf{T}}(\sigma, \tau)$  не просто множество, но посет, так что категория  $\mathbf{T}$  на самом деле является 2-категорией. Развитие этой идеи ведет к понятию высших порядков Брюа, см. [4, 2].

Можно еще немного усложнить категорию  $\mathbf{T}$ . А именно, рассмотреть тайлинги с правильной нумерацией ромбов (см. конец раздела 2.5). Такая нумерация – это фактически редуцированное разложение от  $\sigma$  к  $\tau$ . Категория  $\mathbf{NT}$  нумерованных тайлингов (а их можно рассматривать как некий вариант “стандартных” косых таблиц Юнга) – это категория путей в графе Брюа.

## 6.2 Парадокс голосования

В этом разделе мы будем понимать  $[n]$  как множество альтернатив, поставленных на голосование. Предполагается, что предпочтения избирателей задаются линейными порядками на  $[n]$ , то есть фактически перестановками. Групповое предпочтение  $>^*$  формируется по правилу простого большинства. Для каждой перестановки  $\sigma$  обозначим через  $n(\sigma)$  число избирателей, имеющих предпочтение  $\sigma$ . Для пары альтернатив  $i$  и  $j$  обозначим через  $n(i > j)$  число избирателей, которые ставят  $i$  выше  $j$ , то есть  $n(i > j) = \sum_{i >_{\sigma} j} n(\sigma)$ . Тогда  $i >^* j$ , если  $n(i > j) > n(j > i)$  (для простоты всюду далее предполагается, что общее число избирателей нечетно).

Парадокс Кондорсе, или парадокс голосования, состоит в том, что отношение группового предпочтения  $<^*$  может оказаться нетранзитивным. Простейший пример: три человека с предпочтениями  $1 < 2 < 3$ ,  $2 < 3 < 1$ ,  $3 < 1 < 2$  соответственно. Тогда для группового предпочтения мы имеем  $2 <^* 3$  (ибо такие отношения имеют первый и второй избиратели),  $3 <^* 1$  и  $1 <^* 2$ .

Было предложено несколько способов разрешения этого парадокса. Один из них связан с ограничениями на область возможных предпочтений. Подмножество  $C$  в  $\mathfrak{S}_n$  называется *областью Кондорсе*, если из того, что предпочтения всех избирателей принадлежат  $C$ , следует, что групповое предпочтение  $>^*$  не содержит циклов и тоже является линейным порядком. Легко понять, что  $C$  является областью Кондорсе тогда и только тогда, когда оно *ациклично* в следующем смысле: не существует тройки альтернатив  $i, j$  и  $k$  и тройки предпочтений  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  из  $C$ , таких что  $i <_\alpha j <_\alpha k, j <_\beta k <_\beta i$  и  $k <_\gamma i <_\gamma j$  (как в нашем примере).

Естественно возникает задача построения “больших” областей Кондорсе. Приведем один интересный способ построения таких областей.

Пусть  $T$  – ромбический тайлинг зоногона  $Z_n$  (см. главу 2). С каждой перестановкой  $\sigma$  мы связывали змейку  $\mathcal{S}(\sigma)$  в зоногоне. Обратно, каждая змейка задает перестановку. Обозначим через  $\Sigma(T)$  множество змеек (или перестановок), согласованных с тайлингом  $T$ .

**Предложение 6.3** *Для любого тайлинга  $T$  множество  $\Sigma(T)$  является областью Кондорсе.*

Доказательство основано на операции редукции тайлинга  $T$  по цвету  $l \in [n]$ ; см. конец раздела 2.5. При этой операции мы стягиваем все  $l$ -ребра нашего тайлинга. В результате получается новый тайлинг  $T' = T/l$  зоногона  $Z_{n-1}$ , соответствующий множеству  $[n] - l$ . С любой перестановкой  $\sigma$  (понимаемой как линейный порядок на  $[n]$ ) тоже можно произвести редукцию (удаление) элемента  $l$ ; это ограничение порядка  $<_\sigma$  на подмножество  $[n] - l$ , которое мы тоже обозначим как  $\sigma/l$ . Если перестановка  $\sigma$  согласована с тайлингом  $T$ , то  $\sigma/l$  согласована с редуцированным тайлингом  $T/l$ .

Рассмотрим теперь произвольную тройку  $i, j, k$  альтернатив. Произведем редукцию тайлинга  $T$  по всем элементам, не принадлежащим к  $\{i, j, k\}$ . В результате получим тайлинг  $T'$  зоногона  $Z_{ijl}$  (гексагона, на самом деле). Перестановки из  $\Sigma(T)$  также редуцируются до перестановок, согласованных с  $T'$ . А в случае  $n = 3$  утверждение проверяется непосредственно.  $\square$

Впрочем, можно почти явно указать агрегированный линейный порядок  $<^* = \sigma^*$  для любого распределения избирателей по перестановкам из  $\Sigma(T)$  (и этот порядок  $\sigma^*$  также будет согласован с  $T$ ). Для этого полезно заметить, что множество  $\Sigma(T)$  является дистрибутивной подрешеткой в решетке  $(\mathfrak{S}, \ll)$ . В самом деле, если даны две перестановки  $\sigma$  и  $\tau$ , согласованные с  $T$ , то их минимум  $\sigma \wedge \tau$  и максимум  $\sigma \vee \tau$  (в решетке Брюа  $(\mathfrak{S}, \ll)$ ) реализуется как левая и правая огибающие объединения путей  $\mathcal{S}(\sigma)$  и  $\mathcal{S}(\tau)$ . Представим теперь, что есть два избирателя, один с предпочтением  $\sigma$ , а другой – с предпочтением  $\tau$ . Заменяем их двумя новыми избирателями с предпочтениями  $\sigma \wedge \tau$  и  $\sigma \vee \tau$ . Легко проверить, что в результате такой замены числа  $n(i < j)$  и  $n(j < i)$  не изменятся, а значит не изменится и групповое отношение.

Делая такие замены, мы в конце концов добьемся того, что предпочтения всех избирателей будут образовывать цепь в решетке Брюа. Иначе говоря, избирателей можно так упорядочить, что предпочтение ‘большого’ избирателя мажорирует (нестрого) по отношению  $\ll$  предпочтение любого ‘меньшего’ избирателя. И тогда агрегированное предпочтение  $\sigma^*$  – это в точности предпочтение “медианного”, среднего в цепи избирателя.

Таким образом, задача агрегирования в области  $\Sigma(T)$  разрешима, откуда следует, что  $\Sigma(T)$  является областью Кондорсе.

Можно проверить, что множества вида  $\Sigma(T)$  являются максимальными (по включению) областями Кондорсе. Впрочем, они могут отличаться по размеру, как будет видно из приводимых ниже примеров.

Исторически первый пример большой области Кондорсе предложил Блэк [9]. Его область  $B(n)$  состояла из т.н. однопиковых предпочтений. Предпочтение  $\sigma$  на  $[n]$  называется *однопиковым*, если  $\sigma$  как линейный порядок на интервале  $[1.. \max \sigma]$  совпадает с естественным порядком  $id$ , а на интервале  $[\max \sigma..n]$  – с противоположным к нему порядком  $di$  (где  $\max \sigma$  означает максимальный элемент в  $[n]$  относительно линейного порядка  $\sigma$ ). Иначе говоря, полезность альтернатив возрастает при движении от 1 до  $\max \sigma$ , а затем монотонно падает. Можно сказать и так: для любой альтернативы  $i$  множество тех альтернатив, которые не хуже (в смысле  $\sigma$ ), чем  $i$ , является интервалом в  $[n]$ . Это намекает на то, что тут в качестве тайлинга  $T$  надо взять ко-стандартный тайлинг. И действительно, как легко понять, множество Блэка  $B(n)$  однопиковых предпочтений – это в точности множество змеек ко-стандартного тайлинга.

Нетрудно посчитать, что  $B(n)$  состоит из  $2^{n-1}$  предпочтений. В самом деле, чтобы получить однопиковое предпочтение, надо по очереди “отщипывать” наихудшую альтернативу справа или слева, пока не останется одна (наилучшая) альтернатива. Поэтому долгое время (вплоть до 1992 года) выдвигалась гипотеза, что размер области Кондорсе не превосходит  $2^{n-1}$ . Это не так; например, нарисованный ниже левый тайлинг (для  $n = 4$ ) дает область Кондорсе с 9 предпочтениями. Правый тайлинг дает область с 7 предпочтениями.

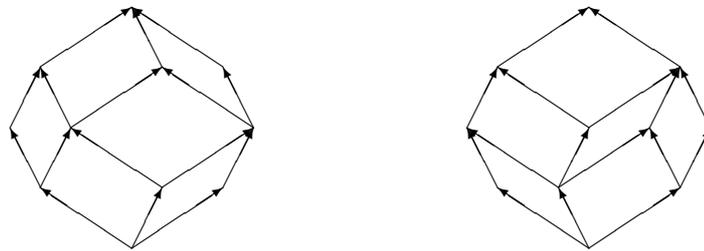
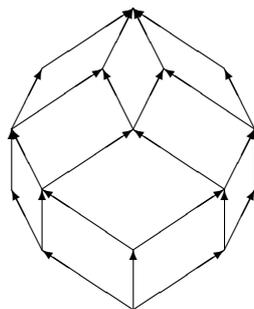


Рис. 55

Так что если брать разные тайлинги, можно строить области Кондорсе большего (или меньшего) размера. Например, тайлинг из рисунка 56



дает область Кондорсе размера 20, максимально возможный для  $n = 5$ . Согласно Кнуту [41], размер тайлинговых областей Кондорсе имеет порядок  $n2^{n-2}$ .

Немного об истории вопроса (в основном взято из работы [51]). Парадокс, связанный с применением правила простого большинства, был обнаружен маркизом де Кондорсе в 1795. Но может быть дело в том, что правило простого большинства слишком бесхитрое и его можно заменить более удачным? Эрроу в 1951 г. показал, что фактически таких правил нет, если мы допускаем в качестве индивидуальных предпочтений произвольные порядки. Поэтому естественна мысль рассмотреть ограничения на область допустимых порядков. Об этом и шла речь выше.

Как уже упоминалось, первый класс таких предпочтений был предложен Блэком в 1948. В 1952 Гибо [29] заметил, что однопиковые предпочтения образуют дистрибутивную решетку. В 1973 Блин [10] показал, что цепи относительно слабого порядка Брюа образуют множество Кондорсе. Абелло [5] пошел дальше, пополняя цепь производными перестановками; фактически это приводит к нашим классам  $\Sigma(T)$ . Он же показал, что построенные на этом пути области Кондорсе максимальны и что они являются полумодулярными решетками (на самом деле, дистрибутивными, как доказал Чамени-Намбуа [12] и как мы отмечали выше).

### 6.3 Тотально положительные матрицы

Мы ограничиваемся здесь рассмотрением только квадратных вещественных  $n \times n$  матриц. Для подмножеств  $I, J \subset [n]$  одного размера через  $\Delta_{I,J} = \Delta_{I,J}(A)$  обозначается соответствующий минор матрицы  $A$  – определитель подматрицы  $A_{I,J}$ , строки и столбцы которой взяты из  $I$  и  $J$  соответственно. Матрица  $A$  называется *тотально положительной*, если все ее миноры строго положительны.

Тотально положительные матрицы и операторы встречаются в различных областях математики, таких как комбинаторика и теория графов, теория вероятности и случайных процессов, матроиды, интегральные уравнения и теории представлений, механика (см. [3, 34]). Немного об истории можно почерпнуть из (архивной) заметки Люстига [49] (2007). Фомин и Зелевинский в статье [26] очертили две главные задачи – параметризацию и тестирование.

*Параметризация* – это указание эффективного способа построения тотально положительных матриц. Мы обсудим здесь метод построения с помощью потоков в плоских сетях. Пусть  $\Gamma$  – квадратный орграф (как в потоковой модели из раздела 1.2, только там он был “треугольный”). Сопоставим каждой вершине  $v$  “вес”  $w(v) \in \mathbb{R}$ . Такой взвешенный граф (сеть)  $(\Gamma, w)$  задает матрицу  $A(w) = A = (a_{ij})$ . Число  $a_{ij}$  равно сумме (по всем путям  $P$  из  $i$ -го источника в  $j$ -й сток) мономов  $w^P$ , где  $w^P$  равно произведению  $w(v)$  по всем вершинам на пути  $P$ .

**Замечание.** Вместо квадратного орграфа  $\Gamma$  можно брать любой плоский орграф, и веса приписывать дугам, а не вершинам. В частности, в [26] используется другой плоский граф с весами на дугах.

Польза такого построения матрицы заключается в том, что миноры матрицы  $A$  просто выражаются в терминах потоков. А именно, минор  $\Delta_{I,J}$  равен сумме (теперь уже по потокам  $F$  из  $I$  в  $J$ ) мономов  $w^F$ ; поток – это семейство непересекающихся путей

$(P_i, i \in I)$  из  $I$  в  $J$ , а  $w^F = \prod_i w^{P_i}$ . Это доказано в работах Линдстрема [45] и Карлина и МакГрегора [35]. В частности, если веса  $w(v)$  строго положительны, соответствующая матрица  $A$  имеет все миноры  $> 0$ , то есть тотально позитивна.

Например, матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

тотально положительна, потому что она соответствует квадратному  $4 \times 4$ -орграфу с весами, тождественно равными 1.

Более того, как и в разделе 1.4, эта конструкция дает все тотально позитивные матрицы. Скажем, что минор типа  $(I, J)$  *плотный*, если  $I$  и  $J$  – интервалы в  $[n]$ ; плотный минор называется *начальным*, если  $I \cup J$  содержит 1. Иначе говоря, или  $I$ , или  $J$  прижат к началу.

Совокупность начальных миноров (а их ровно  $n^2$  штук) позволяет построить весовую матрицу  $w : [n] \times [n] \rightarrow \mathbb{R}$ . Дело тут обстоит ровно как в 1.4. Пусть  $I = [p]$ , где  $J = [a + 1..a + p]$  (так что мы рассматриваем плотный минор, прижатый кверху). Тогда существует единственный поток  $F$  из  $I$  в  $J$ , и он заполняет прямоугольник  $[p] \times [a + p]$ . Так что мы знаем произведения весов  $w$  по таким прямоугольникам. Дальше все как раньше (только вместо  $\odot$  и  $/$  нужно брать произведение и деление).

Приведенная приведенная выше конструкция дает биекцию (причем рациональными и даже Лорановыми дробями) между множеством  $\mathbb{R}_{>}^{n^2}$  и множеством тотально положительных матриц.

Далее, сети можно компановать естественным образом, и композиция сетей соответствует произведению матриц. В частности, получаем, что произведение тотально положительных матриц тотально положительно (впрочем, это видно и из формул Коши-Бине).

Наш орграф  $\Gamma$  тоже можно разбить на два – до диагонали и после. Это дает разложение матрицы  $A$  в произведение  $A_u A_l$  верхне-треугольной и нижне-треугольной тотально положительных матриц. Тут, правда, надо немного подкорректировать определение тотальной положительности, а именно, потребовать положительность миноров, которые не равны нулю тождественно.

Можно и дальше (с помощью графов) разлагать треугольные матрицы до элементарных матриц Якоби; см. [26] или [7]. Этот путь ведет к теоремам Энн Уитни и Левнера, отталкиваясь от которых Люстиг [48] перенес понятие тотальной положительности на произвольные редуктивные группы и многообразия флагов. Постников [54] исследовал разложение позитивной части грассманиана на клетки и комбинаторику примыкания этих клеток. В частности, он предложил несколько комбинаторных объектов, соответствующих таким клеткам, и среди них плоские ориентированные сети, напоминающие наши проволочные диаграммы; см. раздел 5.4.

Эта же конструкция дает и тест на тотальную положительность. В результате получается следующее

**Предложение 6.4** *Матрица тотально положительна тогда и только тогда, когда все ее начальные миноры (а их  $n^2$  штук) положительны.*

Это усиливает классический критерий Фекете (1912), согласно которому для тотальной положительности достаточно проверить положительность всех плотных миноров. Гаска и Пенья обобщили это предложение на прямоугольные матрицы.

Для определенности ограничимся далее случаем верхне-треугольных матриц. Тогда критерий тотальной положительности, полученный выше, состоит в положительности миноров вида  $\Delta_{[p],J}$ , где  $p = 0, \dots, n$  и  $J$  – интервалы размера  $p$ . Вообще, система  $\mathcal{C}$  подмножеств в  $[n]$  называется *тотально-положительным базисом*, если положительность миноров вида  $\Delta_{[p],J}$ , где  $J$  пробегает  $\mathcal{C}$ , достаточна для тотальной положительности матрицы (и, кроме того, для любого набора положительных значений этих миноров существует соответствующая матрица). Мы видим здесь полное совпадение с определением П-базиса (для полукольца  $\mathbb{R}_{>}$ ). И получаем (пользуясь теоремой **W2**) следующую серию критериев тотальной положительности, предугаданную Леклерком и Зелевинским:

**Теорема 6.5** Пусть  $\mathcal{C}$  – максимальная ЛЗ-система подмножеств в  $[n]$ . Тогда  $\mathcal{C}$  является тотально-положительным базисом.

## 6.4 Кристаллы

Кристаллы Кашивары (см., например [36]) – это некие комбинаторные объекты, нечто вроде ‘скелета’ представлений группы Ли, см. [36]. Кристаллы представлений позволяют изучать вопросы ветвления, разложения тензорных произведений и т.п. Поэтому важно уметь строить модели кристаллов. Известно несколько таких моделей: через таблицы Юнга [37], Литтелмановская модель путей [46], колчаные модели [38], крестовая модель [14], модель циклов Мирковича-Вилонена [50]. Ниже мы предлагаем способ построения кристаллов (в основном типа  $A$ ) с помощью Плюккерových функций.

Формально  $n$ -цветный *кристалл* – это ориентированный граф  $G$ , каждое ребро которого раскрашено в один из  $n$  цветов. Иначе говоря, множество ребер  $E(G)$  разбито на  $n$  подмножеств  $E_1, \dots, E_n$ ; ребро из  $E_i$  считается имеющим цвет  $i$ . Основная аксиома, общая всем типам кристаллов, состоит в том, что каждая вершина  $v \in V(G)$  кристалла имеет не более одного входящего и не более одного выходящего ребра цвета  $i$ . Поэтому движение по  $i$ -ребру можно понимать как действие (частично обратимого) оператора  $E_i$  (если  $i$ -ребро не выходит из  $v$ , можно считать, что  $E_i(v) = v$ ). Предполагается, что монохромный подграф  $G_i = (V(G), E_i)$  не имеет циклов.

Кроме того, предполагаются выполненными аксиомы, уже специфических для каждого типа. В основном они касаются коммутирования операторов разного цвета. В случае кристаллов типа  $A$  требуется, чтобы операторы  $E_i, E_j$  “далеких” ( $|i - j| \geq 2$ ) цветов коммутировали, а операторы “соседних” цветов удовлетворяли соотношениям Верма (и коммутировали при дополнительных условиях). Точнее, если взять соседние цвета  $i$  и  $i + 1$ , то должны выполняться соотношения

$$E_i E_{i+1}^2 E_i = E_{i+1} E_i^2 E_{i+1}.$$

Из этих соотношений следует, что можно определить отображение ‘весов’  $wt : V(G) \rightarrow \mathbb{Z}^n$ , при котором действие (когда оно эффективно) оператора  $E_i$  превращается в прибавление  $i$ -го базисного вектора  $e_i$  в группе  $\mathbb{Z}^n$ .

Пользуясь тропическими Плюккеровыми функциями, можно явно строить такие кристаллы. А именно, пусть как прежде  $\mathcal{P}_n(\mathbb{Z}_{\max})$  – множество целозначных тропических Плюккеровых функций на булевом кубе  $2^{[n]}$ . Определим (для каждого  $i, 0 < i < n$ ) обратимый оператор  $E_i$  на  $\mathcal{P}_n(\mathbb{Z}_{\max})$ ; в результате получим  $(n - 1)$ -цветный кристалл.

Пусть  $Z_n$  – зоногон как раньше. Скажем, что ромбический тайлинг  $T$  приспособлен к ‘кристаллическому цвету’  $i$ , если соседние ребра  $(1 \dots (i - 1), 1 \dots i)$  и  $(1 \dots i, 1 \dots (i + 1))$  левой границы зоногона принадлежат одному ромбу, который обозначим как  $R$  или  $R_i$ . В терминах вайрингов это означает, что проволоки  $w_i$  и  $w_{i+1}$  сначала пересекаются между собой и только потом – с другими проволоками. См. рис. 57.

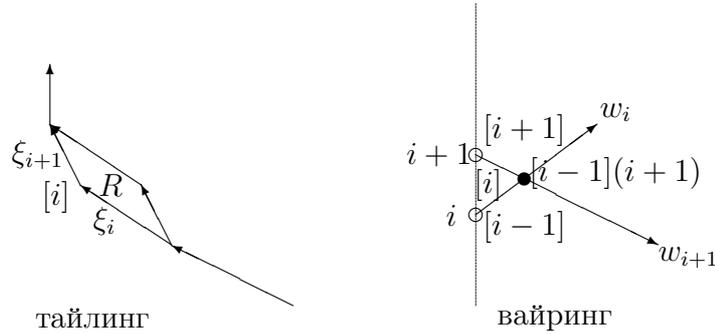


Рис. 57

Скажем теперь, как оператор  $E_i$  действует на тропическую П-функцию  $f$ . Возьмем произвольный тайлинг  $T$ , приспособленный к ‘кристаллическому цвету’  $i$ . Ограничим  $f$  на вершины тайлинга  $T$ . Так как эти вершины образуют ТП-базис, ТП-функцию  $E_i f$  достаточно задать в вершинах  $T$ . Действие предельно простое:

$$(E_i f)(v) = \begin{cases} f(v) + 1, & \text{если } v = [i], \\ f(v) & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Это определение корректно, то есть не зависит от выбора тайлинга  $T$ , приспособленного к цвету  $i$ . В самом деле, делая понижающие флипы вне ромба  $R$ , можно сделать тайлинг ‘стандартным’ вне  $R$ . Очевидно также, что оператор  $E_i$  обратим, и ясно, как написать его обращение  $F_i$ .

Операторы  $E_i$  и  $E_j$  коммутируют, если  $i$  и  $j$  несоседние. Дело в том, что в этом случае существует тайлинг, приспособленный одновременно и к  $i$ , и к  $j$ . Если же  $i$  и  $j$  соседние, то ситуация иная и сводится, по-существу, к случаю  $n = 3$ . Остановимся на нем подробнее.

*Случай  $n = 3$ .* Так как операторы  $E_1$  и  $E_2$  не меняют значения на правой стороне гексагона  $Z_3$ , и так как прибавление аффинной функции сохраняет тропическую плюккеровость, удобно считать, что наши ТП-функции тождественно равны 0 в вершинах правой границы (то есть в точках 123, 23, 3 и  $\emptyset$ ). Остаются 4 параметра,  $a, b, c$  и  $c'$ , – значения  $f$  в точках 1, 12, 2 и 13, соответственно (см. рисунок 58).

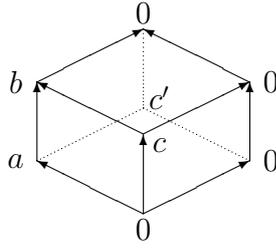


Рис. 58

Эти числа связаны соотношением Плюккера

$$c + c' = \max(a, b). \quad (6.1)$$

Действие оператора  $E_1$  сводится к увеличению  $a$  на 1;  $b$  и  $c$  не меняются. Что касается  $c'$ , то оно увеличивается на 1, если  $a \geq b$ , и не меняется в случае  $a < b$ . Аналогично действует  $E_2$ : увеличивает  $b$  на 1 и увеличивает  $c$ , если  $b \geq a$ . Так что весовое отображение  $wt$  отправляет вершину кристалла с параметрами  $a, b, c, c'$  в  $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ .

Здесь удобно перейти к другим координатам. Введем числа  $\alpha = a - c'$  и  $\beta = b - c$ . Соотношение (6.1) переписывается как неравенства  $\alpha \leq c$  и  $\beta \leq c'$  плюс требование, что одно из этих неравенств является равенством. В этих координатах действие кристаллического оператора  $E_1$  выглядит так: оно увеличивает  $\alpha$  на единицу, если  $\alpha < c$  (то есть  $c + c' > a$ ), и увеличивает  $c'$  на единицу, если  $\alpha = c$ . Аналогично действует оператор  $E_2$ . Таким образом мы получаем полное совпадение с крестовой моделью для  $A_2$ -кристалла из [13].

Вершины, в которых  $a = b$ , называются *главными* или критическими. (Как функции, они квази-сепарабельные, см. Пример 6 из раздела 1.1.) Интерес к таким вершинам состоит в том, что они образуют “коммутативную” подрешетку в кристалле. Образуют операторы  $E_1 E_2$  и  $E_2 E_1$ . Они коммутируют (собственно, в этом и состоят соотношения Верма) и порождают абелеву группу  $\mathbb{Z}^2$ . И совокупность главных вершин – это главное однородное пространство этой группы  $\mathbb{Z}^2$ .

Заметим, что построенный  $A_2$ -кристалл “безбрежный” в том смысле, что операторы  $E_1$  и  $E_2$ , как и обратные к ним, действуют эффективно во всех вершинах кристалла (ничего не оставляя на месте). Накладывая граничные условия (как в [13]), можно получать полуограниченные или конечные кристаллы. Остановимся подробнее на одном таком условии:

$$a \geq c', \quad b \geq c,$$

(или  $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ ). Мы получаем в этом случае полуограниченный кристалл, который Кашивара обозначает как  $B(\infty)$ . Тождественно нулевая функция служит источником этого кристалла (в том смысле, что любую другую точку этого кристалла можно получить из источника применением операторов  $E_1$  и  $E_2$ ).

Неравенства  $a \geq c', b \geq c$  эквивалентны, как несложно видеть, требованию субмодулярности функции  $f$ . Более точно, пусть дан один из 6 ромбов потенциального тайлинга нашего гексагона. Субмодулярность для этого ромба означает, что сумма значений в вершинах на одной горизонтали больше или равна сумме в двух оставшихся вершинах. Например, применительно к ромбу  $[2, 12, 23, 123]$  субмодулярность – это неравенство

$b \geq c$ , одно из наших неравенств. Оказывается, что это неравенство эквивалентно неравенствам субмодулярности для двух других “верхних” ромбов, то есть  $c' \geq 0$  и  $c' + b \geq a$ . Несложную проверку с использованием соотношения (6.1) мы оставляем читателю.

*Случай общего  $n$ .* Рассмотренный выше случай  $n = 3$  показывает, что и в общем случае кристалл  $\mathcal{P}_n(Z_{\max})$  является кристаллом типа  $A_{n-1}$ . Связные компоненты этого кристалла параметризуются значениями на правой стороне зоногона. Решетка главных (критических) вершин такого кристалла состоит из функций, для которых в каждом ТП-соотношении все три суммы равны. Иначе говоря, когда кроме ТП-соотношений верны равенства

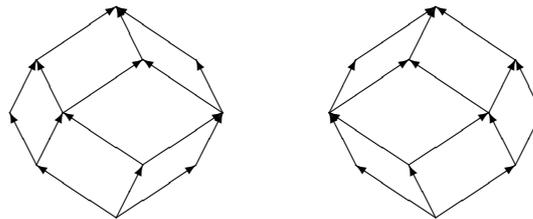
$$f(Xij) + f(Xk) = f(Xjk) + f(Xi).$$

Легко понять, что это просто квази-сепарабельные функции.

Обозначим через  $SubP_n^0(\mathbb{Z}_{\max})$  множество целочисленных субмодулярных тропически Плюккерových функций на  $2^{[n]}$ , нормализованных условием равенства 0 на правой границе зоногона. Снова субмодулярность можно проверять на ромбах любого тайлинга. Дело в том, что все тайлинги связаны между собой строгими флипами. Поэтому все сводится к проверке для одного. Действие  $E_i$  на  $SubP_n^0(\mathbb{Z}_{\max})$  определяется без ограничений, а действие обратных операторов  $F_i$  обуславливается субмодулярностью. И снова полученный кристалл имеет единственный источник – тождественно нулевую функцию.

**Замечание.** Приведенная выше модель тесно связана с кристаллами Мирковича-Вилонена. Краткая история такова. В 1983 г. Люстиг [47] обнаружил, что неприводимые представления группы  $GL$  реализуются когомологиями пересечений некоторых подмногообразий т.н. аффинного грассманиана. Миркович и Вилонен [50] реализовали базисы этих представлений специальными подмногообразиями в аффинном грассманиане, называемыми MV-циклами и обобщающими циклы Шуберта в грассманианах. Браверман и Гайцгори [11] ввели структуру кристалла на множестве MV-циклов. Применяя отображение моментов к MV-циклам, Андерсон [6] получил некоторые многогранники, названные MV-политопами. Камницер [32, 33] дал внутреннее описание MV-политопов, ввел на их множестве структуру кристалла и доказал совпадение этой структуры со структурой Бравермана и Гайцгори. Главное в этом описании то, что они связаны с субмодулярными тропическими Плюккеровыми функциями. Выше мы оставили в стороне все алгебро-геометрические и полиэдральные упоминания и использовали только ТП-функции.

*Кристаллы типа  $B_2$ .* Здесь мы руководствуемся идеей, что  $B_2$ -кристалл – это симметричная часть  $A_3$ -кристалла. Рассмотрим зоногон  $Z_4$ . На булевом кубе  $2^{[4]}$  действует инволюция  $\tau$ , переводящая цвет 1 в 4, а цвет 2 – в 3. Соответственно возникает инволюция на ТП-функциях. П-функции задаются значениями на вершинах некоторого ромбического тайлинга. Естественно рассматривать  $\tau$ -инвариантные тайлинги, их всего два (см. рисунок 59)



Симметричная  $\Pi$ -функция задается на симметричном тайлинге симметричными начальными данными. Первый симметричный тайлинг приспособлен к кристаллическому цвету 2, тогда как второй – к цветам 1 и 3.

Зададим теперь новые операторы,  $G_1$  и  $G_2$ .  $G_1$  действует как  $E_1E_3 = E_3E_1$ ;  $G_2$  действует как  $E_2$ . Симметричные функции переходят при этом в симметричные. Так мы получаем структуру  $B_2$ -кристалла на множестве (нормированных) симметричных тропических  $\Pi$ -функций на  $2^{[4]}$ . Проверка того, что это действительно  $B_2$ -кристалл (см. [15]), требует некоторых вычислений, которые мы опускаем.

Аналогично можно получить любой  $B_n$ -кристалл.

## Список литературы

- [1] Биркгоф Г. *Теория решеток*. Москва, Наука, 1984.
- [2] Воеводский В.А. и М.М. Капранов, Свободная  $n$ -категория, порожденная кубом, ориентированные матроиды и высшие порядки Брюа. *Функцион. анализ и его прил.* **25** (1991) 62-65.
- [3] Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц*. Физматлит, Москва, 2004.
- [4] Манин Ю.И. и В.В Шехтман, О высших порядках Брюа, связанных с симметрической группой. *Функцион. анализ и его прил.* **20**, вып. 2 (1986) 74-75.
- [5] J.M. Abello. The weak Bruhat order on  $S_n$ , consistent sets, and Catalan numbers, *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, **4** (1991) 1-16.
- [6] J. E. Anderson, A politope calculus for semisimple groups, *Duke Math. J.* **116** (3) (2003) 567-588.
- [7] A. Berenstein, S. Fomin, and A. Zelevinsky, Parametrizations of canonical bases and totally positive matrices, *Adv. Math.* **122** (1996) 49II-149.
- [8] A. Bjorner and F. Brenti, *Combinatorics of Coxeter Groups*, Springer, 2005.
- [9] Black D. On the rationale of group decision-making, *Journal of Political Economy* **56** (1948) 23-34.
- [10] Blin J.-M. The general concept of multidimensional consistency: some algebraic aspects of the aggregation problem. In *Conference Proceedings of the South Carolina Seminar on Multiple Criteria Decision Making*, Univesity of South Carolina Press, 1973.
- [11] A. Braverman and D. Gaitsgory, Crystals via the Affine Grassmanian. *Duke Math. J.* **107** (2001) 561-575.
- [12] Chameni-Nembua C. Règle majoritaire et distributivité dans le permutoèdre. *Mathematiques Informatique et Sciences humaines* **108** (1989) 5-22.

- [13] V. Danilov, A. Karzanov, and G. Koshevoy, Combinatorics of regular  $A_2$ -crystals, *J. Algebra* **310** (2007) 218–234.
- [14] V. Danilov, A. Karzanov, and G. Koshevoy, The crossing model for regular  $A_n$ -crystals, *J. Algebra* **320** (2008) 3398–3424.
- [15] V. Danilov, A. Karzanov, and G. Koshevoy,  $B_2$ -crystals: axioms, structure, models, *J. Combin. Theory, Ser. A* **116** (2009) 265–289.
- [16] V. Danilov, A. Karzanov, and G. Koshevoy, Tropical Plücker functions and their bases, in: *Tropical and Idempotent Mathematics* (ed. G.L. Litvinov and S.N. Sergeev), *Contemporary Mathematics* **495** (2009) pp. 127–158.
- [17] V.I. Danilov, A.V. Karzanov, and G.A. Koshevoy. Plücker environments, wiring and tiling diagrams, and weakly separated set-systems, *Adv. Math.* 224 (2010) 1-44.
- [18] V. Danilov, A. Karzanov, and G. Koshevoy, On maximal weakly separated set-systems, *ArXiv:0909.1423v1[math.CO]*, 2009; в печати *J. Algebraic Combinatorics*.
- [19] V. Danilov and G. Koshevoy, Discrete convexity and unimodularity, I, *Adv. Math.* **189** (2004) 301–324.
- [20] V. Danilov and G. Koshevoy, The octahedron recurrence and RSK-correspondence, *Séminaire Lotharingien de Combinatoire* **54A**, Article B54An, 2007.
- [21] A. M. Dress and W. Wenzel, Valuated matroids, *Adv. Math.* **91** (1992) 158–208.
- [22] P.H. Edelman and V. Reiner, Free arrangements and rhombic tilings, *Discrete Comput. Geometry* **15** (1996) 307–340.
- [23] S. Elnitsky, Rhombic tilings of polygons and classes of reduced words in Coxeter groups, *J. Comb. Theory, Ser. A* **77** (1997) 193–221.
- [24] V. Fock, A. Goncharov, Moduli space of local systems and higher Teichmüller theory, *Publ. Math. IHES*, **103** (2006) 1–211; *ArXiv:math.AG/9909.077*.
- [25] S. Fomin, and A. Zelevinsky, The Laurent phenomenon, *Adv. Applied Math.* **28** (2) (2002) 119–144.
- [26] S. Fomin, and A. Zelevinsky, Total positivity: Tests and parametrizations. *Math. Intelligencer*, **22** (2000) 23-33.
- [27] W. Fulton, *Young tableaux*, London Math. Soc. Student Text, Vol. **35**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997. Рус. пер.: У. Фултон, *Таблицы Юнга и их Приложения к Теории Представлений и Геометрии*, М.: изд-во МЦНМО, 2006.
- [28] J. E. Goodman, Pseudoline arrangements, in *Handbook of Discrete and Computational Geometry*, Goodman and O'Rourke, eds., CRC Press, 1997, 83–110.
- [29] Guilbaud G.-Th. Les théories de l'intérêt général et le problème logique de l'agrégation. *Économie Appliquée*, **5** (1952) 501-584. Имеется русский перевод в книге "Математические методы в социальных науках", Прогресс, Москва (1973), 196-250.

- [30] A. Henriques, An action of the cactus group, *ArXiv:math.AG/0705.3000*, 2007.
- [31] A. Henriques and D. E. Speyer, The multidimensional cube recurrence, *Advances in Mathematics* **223** (2010) 1107-1136. *ArXiv:0708.2478v1[math.CO]*, 2007.
- [32] J. Kamnitzer, Mirkovic-Vilonen cycles and polytopes, *ArXiv:math.AG/0501365*, 2005.
- [33] J. Kamnitzer, The crystal structure on the set of Mirkovic-Vilonen polytopes. *Advances in Mathematics* **215** (2007) 66–93.
- [34] S. Karlin, *Total positivity*, Stanford Univ. Press, 1968.
- [35] S. Karlin and G. McGregor, Coincidence probabilities. *Pacific J. Math.*, **9** (1959) 1141–1164.
- [36] M. Kashiwara, *Bases cristallines des groupes quantiques*, Société Mathématique de France, 2002.
- [37] M. Kashiwara and T. Nakashima, Crystal graphs for representations of the  $q$ -analogue of classical Lie algebras, *J. Algebra*, **165** (1994) 295-345.
- [38] M. Kashiwara and Y. Saito, Geometric construction of crystal bases. *Duke Math. J.* **89** (1997) 9–36.
- [39] R. Kenion, Tiling a Polygon with Parallelograms, *Algorithmica*, **9** (1993), 382-397.
- [40] R. Kenyon and J.-M. Schlenker, Rhombic embeddings of planar graphs with faces of degree 4, *Trans. Amer. Math. Soc.* **357** (2005), 3443-3458.
- [41] D. E. Knuth, *Axions and Hulls*, vol. 606 of Lect. Notes Comput. Sci., Springer-Verlag, 1992.
- [42] E. H. Kuo, Graphical Condensation Generalizations Involving Pfaffians and Determinants. *ArXiv:math/0605154*, 2008.
- [43] A. Lascoux, Ordonner le groupe symétrique: pourquoi utiliser l’algèbre de Iwahori-Hecke? *Proceedings of the ICM, Vol. III* (Berlin, 1998), *Doc. Math.* (electronic), Extra Vol. III, 1998, 355–364.
- [44] B. Leclerc and A. Zelevinsky: Quasicommuting families of quantum Plücker coordinates, *Amer. Math. Soc. Trans., Ser. 2* **181** (1998), 85–108.
- [45] B. Lindström, On the vector representation of induced matroids. *Bull. London Math. Soc.* **5** (1973) 85-90.
- [46] P. Littelmann, Path and root operators in representation theory. *Ann. of Math.* **142** (1998) 499–525.
- [47] G. Lusztig, Singularities, character formulas and a  $q$ -analog of weight multiplicities, *Asterisque* **101-102** (1983) 208–229.
- [48] G. Lusztig, Total positivity in reductive groups, in: *Lie Theory and Geometry, Progr. in Math.*, vol. 123, Birkhauser Boston, Boston, 1994, 531–568.

- [49] G. Lusztig, A survey of total positivity, *Milan Journal of Mathematics*, 76 (2008) 125–134. *ArXiv:0705.3842*, 2007.
- [50] I. Mirkovic and K. Vilonen, Perverse sheaves on affine Grassmannians and Langlands duality, *Math. Research Lett.* **7** (2000) 13–24.
- [51] Monjardet B. Acyclic domains of linear orders: a survey. In *The Mathematics of Preference, Choice and Order*. (Eds. S.Brams, W.Gehrlein, F.Roberts), Springer, 2009, pp. 136-160.
- [52] K. Murota, *Discrete Convex Analysis*, SIAM, Philadelphia, 2003.
- [53] R. C. Penner and G. Mcshane, Stable curves and screens on fatgraphs, *ArXiv:0707.1468 [math.GT]*, 2007.
- [54] A. Postnikov, Total positivity, Grassmannians, and networks, *ArXiv:math.CO/0609764*, 2006.
- [55] J. Scott, Quasi-commuting families of quantum minors, *J. Algebra* **290** (2005) 204–220.
- [56] J. Scott, Grassmannians and cluster algebras, *Proc. Lond. Math. Soc.* **92** (2006) 345–380.
- [57] D. Speyer, Perfect matchings and the octahedron recurrence, *J. Alg. Combin.* **25** (2007) 309–348.
- [58] E. Taft and J. Tauber, Quantum deformation of flag schemes and Grassmann schemes, I. A  $q$ -deformation of the shape-algebra for  $GL(n)$ , *J. Algebra* **142** (1) (1991) 1–36.