О СТАБИЛЬНЫХ СООТВЕТСТВИЯХ КОНЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ ЭВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯХ[1]

А.В.Карзанов, А.А.Шананин
(Москва)

В работе (Петров, Поспелов, Шананин, 1996) исследовался вопрос о существовании агрегированного описания технологической структуры производственных мощностей. Он был сведен к проверке условий вполне монотонности вспомогательной функции, построенной по агрегированной функции прибыли. В случае простейшей технологической цепочки из двух отраслей, одна из которых производит сырье для другой, был построен пример (Петров, Поспелов, Шананин, 1996, с. 509-510]), в котором изменение цен на первичные ресурсы вызывало изменение технологических связей между производственными единицами. В агрегированном описании это выражалось изменением технологической структуры мощностей[2]. Поэтому представляет интерес вопрос об условиях, при которых изменение цен на первичные ресурсы не вызывает разрушения связей между производственными единицами разных отраслей.

Рассмотрим этот вопрос на примере двух отраслей, производящих однородную продукцию и использующих k видов первичных ресурсов. Будем считать, что первая отрасль производит сырье для второй, которая дорабатывает продукцию для конечного потребителя. Опишем отрасли с помощью модели Хаутеккера-Иохансена (Петров, Поспелов, Шананин, 1996, глава 6). Согласно этой модели мощности отраслей распределены по технологиям, каждая из которых описывается k-мерным вектором затрат первичных ресурсов на выпуск единицы продукции. Будем для простоты предполагать, что отрасли состоят из производственных единиц, имеющих единичную мощность. Пусть $X = \{x^1, \ldots, x^n\}$ и $Y = \{y^1, \ldots, y^n\}$ – технологии производственных единиц соответственно в первой и второй отрасли (случай, когда X и Y имеют разные мощности сводится к данному). Каковы бы ни были цены на конечную продукцию и первичные ресурсы, выпуски первой и второй отрасли совпадают. Обозначим через $\xi \in \mathbf{R}^k_+$ вектор цен на первичные ресурсы. При фиксированных ценах на первичные ресурсы производственные единицы в каждой отрасли естественно упорядочиваются по возрастанию стоимости затрат на выпуск единицы продукции. В этом случае между производственными единицами разных отраслей можно установить такое соответствие, что при изменении цен на конечную продукцию соответствующие друг другу производственные единицы оказываются прибыльными или убыточными одновременно (Петров, Поспелов, Шананин, 1996, глава 6). Вопрос об устойчивости этого соответствия (технологических связей) при изменении цен на первичные

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского гуманитарного научного фонда (проект 01-02-00481а).

[2]Этот эффект возможно объясняет наблюдавшиеся резкие изменения технологической структуры в рыночной экономике, которые происходили быстрее, чем процессы физической конверсии производственных мощностей.

ресурсы можно сформулировать следующим образом. Можно ли установить это соответствие так, чтобы оно сохранялось при изменении цен на первичные ресурсы в некотором диапазоне?

Формально эту задачу можно поставить в следующем виде. Пусть задан выпуклый замкнутый конус C в k-мерном евклидовом пространстве $\mathbf{R}^k$. Предполагается, что C не совпадает со всем пространством и является полномерным, т.е. не содержится в линейном подпространстве меньшей размерности. Нам также потребуется рассматривать *двойственный* (антиполярный) конус $C^* := \{x \in \mathbf{R}^k : \ \xi \cdot x \geq 0 \ \forall \xi \in C\}$, где $\xi \cdot x$ обозначает скалярное произведение векторов ξ и x. Этот конус – выпуклый, замкнутый и *точечный* (не содержащий ненулевого линейного подпространства). Способ задания C не уточняется; достаточно, чтобы был явно указан некоторый вектор c, лежащий строго внутри C, и чтобы имелся *оракул* ("черный ящик"), отвечающий на следующее обращение:

$$\text{для данного вектора } \xi \in \mathbf{R}^k \text{ выяснить, принадлежит ли } \xi \text{ конусу } C^*. \tag{1}$$

Пусть $X = \{x^1, \dots, x^n\}$ и $Y = \{y^1, \dots, y^n\}$ – два множества векторов (точек) в $\mathbf{R}^k$. По прикладным соображениям будем допускать возможность совпадения точек в каждом множестве, т.е. не требуем, чтобы $x^i \neq x^j$ и $y^i \neq y^j$ для различных i, j.

Определение. Биекцию $\gamma : X \to Y$ назовем *C-стабильным соответствием*, если для любых $x^i, x^j \in X$ и $\xi \in C$ из выполнения неравенства $\xi \cdot x^i < \xi \cdot x^j$ следует, что $\xi \cdot \gamma(x^i) \leq \xi \cdot \gamma(x^j)$.

Другими словами, при соответствии γ каждая линейная функция $\xi(x) := \xi \cdot x$, $\xi \in C$, одинаково упорядочивает X и Y по неубыванию значений.

Задача. Для C, X, Y, определенных как это было сделано выше, найти C-стабильное соответствие или установить его отсутствие.

Нашей целью является построение алгоритма, решающего данную задачу в оракульно-полиномиальное время. Более точно: число арифметических и логических операций и обращений к оракулу (1), используемых алгоритмом, ограничено полиномом от k, n.

Замечание. В реальных приложениях множества C, X, Y обычно лежат в неотрицательном ортанте $\mathbf{R}^k_+$.

Алгоритм основывается на двух утверждениях. Для точек x, x' обозначим $x \preceq x'$, если $\xi \cdot x \leq \xi \cdot x'$ при всех $\xi \in C$. Отношение $\preceq$ задает частичные (квази)порядки на X и Y. Из определения C^* следует, что $x \preceq x'$ эквивалентно $x' - x \in C^*$, и в силу точечности C^* одновременное $x \preceq x'$ и $x' \preceq x$ равносильно совпадению точек x, x'. В случае несравнимости x, x' будем писать $x \not\sim x'$. Две упорядоченные пары точек (x, x') и (y, y') назовем *подобными*, если существуют такие числа $\lambda \geq 0$ и $\mu \geq 0$, $\lambda + \mu > 0$, что $\mu(y' - y) = \lambda(x' - x)$.

Утверждение 1. Биекция $\gamma : X \to Y$ является C-стабильным соответствием тогда и только тогда, когда для любых $x^i, x^j \in X$:

(а) если $x^i \neq x^j$ и $x^i \preceq x^j$, то $\gamma(x^i) \preceq \gamma(x^j)$;

(б) если $x^i \not\sim x^j$, то пары (x^i, x^j) и $(\gamma(x^i), \gamma(x^j))$ подобные.

Доказательство. Пусть γ не является C-стабильным соответствием. Тогда найдутся такие $x^i, x^j \in X$ и $\xi \in C$, что $\xi \cdot x^i < \xi \cdot x^j$ и $\xi \cdot \gamma(x^i) > \xi \cdot \gamma(x^j)$. Ввиду первого неравенства, либо $x^i \neq x^j$ и $x^i \preceq x^j$, либо $x^i \not\sim x^j$. Очевидно, что случай (а) и случай (б) не возможны.

Докажем утверждение в обратную сторону. Пусть γ – C-стабильное соответствие. Свойство (а) очевидно. Рассмотрим несравнимые x^i, x^j и их образы $y^p := \gamma(x^i)$, $y^q := \gamma(x^j)$ в Y. Можно предполагать $y^p \neq y^q$, иначе свойство (б) очевидно. Ввиду $x^i \not\sim x^j$, имеются $\xi', \xi'' \in C$, для которых $\xi' \cdot (x^j - x^i) > 0$ и $\xi'' \cdot (x^j - x^i) < 0$. Отсюда и из полномерности C следует полномерность подконусов $C' := \{\xi \in C :\ \xi \cdot (x^j - x^i) \geq 0\}$ и $C'' := \{\xi \in C :\ \xi \cdot (x^j - x^i) \leq 0\}$, а гиперплоскость $L := \{\xi \in \mathbf{R}^k :\ \xi \cdot (x^j - x^i) = 0\}$, разделяющая C' и C'', пересекает C по подконусу размерности $k-1$. Тогда вектор $x^j - x^i$ принадлежит одномерному линейному подпространству, ортогональному L и, более того, лучу R этого подпространства, лежащему с той же стороны от L, что и C'.

Аналогично, из несравнимости y^p, y^q (ввиду $y^p \neq y^q$ и C-стабильности γ) следует, что $y^q - y^p$ принадлежит соответствующему лучу R', ортогональному гиперплоскости, разделяющей подконуса $\{\xi \in C :\ \xi \cdot (y^q - y^p) \geq 0\}$ и $\{\xi \in C :\ \xi \cdot (y^q - y^p) \leq 0\}$. Ввиду C-стабильности γ, разбиение на подконуса в обоих случаях должно быть одним и тем же, откуда получаем $R' = R$. Это означает, что $y^q - y^p = \lambda(x^j - x^i)$ для некоторого $\lambda > 0$, т.е. справедливо (б). $\blacksquare$

Для указанного выше внутреннего вектора c конуса C обозначим $M(X, c)$ подмножество точек $x^i \in X$ с минимальным значением $c \cdot x^i$, и аналогично определим подмножество $M(Y, c)$ в Y. Зафиксируем упорядоченный ортонормированный базис $(e_1, \ldots, e_k)$ в $\mathbf{R}^k$.

Утверждение 2. Пусть x^{i_0} – лексикографически минимальный вектор в $M(X, c)$ (при разложении по данному базису), и y^{j_0} – лексикографически минимальный вектор в $M(Y, c)$. Пусть имеется C-стабильное соответствие $\gamma : X \to Y$. Тогда найдутся $x^i \in X$ и $y^j \in Y$ такие, что $x^i = x^{i_0}$, $y^j = y^{j_0}$ и $\gamma(x^i) = y^j$.

Доказательство. Поскольку вектор c расположен строго внутри C, существуют $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k > 0$ ($\epsilon_1 \gg \epsilon_2 \gg \ldots \gg \epsilon_k$) такие, что: вектор $c' := c + \epsilon_1 e_1 + \ldots + \epsilon_k e_k$ принадлежит C, соответствующее множество $M(X, c')$ содержит только точки, совпадающие с x^{i_0}, и множество $M(Y, c')$ содержит только точки, совпадающие с y^{j_0}. Предположим $\gamma(x^i) \notin M(Y, c')$ для всех $x^i \in M(X, c')$. Так как $\gamma(X) = Y$, найдется $x^p \in X \setminus M(X, c')$, для которого $\gamma(x^p) \in M(Y, c')$. Тогда для $x^i \in M(X, c')$ получаем $c' \cdot x^i < c' \cdot x^p$ и $c' \cdot \gamma(x^i) > c' \cdot \gamma(x^p)$, вопреки C-стабильности γ. Таким образом, требуемые x^i, y^j

существуют. ■

Заметим, что из утверждения 1 следует существование не более одного C-стабильного соответствия, если в каждом из X, Y нет совпадающих точек. Утверждения 1 и 2 подсказывают алгоритм решения рассматриваемой задачи.

На *первом этапе* алгоритма вычисляем все скалярные произведения $c \cdot x^i, c \cdot y^i$, $i = 1, \ldots, n$, и упорядочиваем элементы в каждом из множеств X, Y по возрастанию этих значений, а затем каждую группу элементов x^i с равными значениями $c \cdot x^i$ упорядочиваем по лексикографическому возрастанию x^i. Аналогичную процедуру проводим для Y. Перенумеровываем элементы в X и Y в соответствии с номерами, полученными после упорядочивания. Полагаем $\gamma(x^i) := y^i$, $i = 1, \ldots, n$. (Из утверждения 2 следует, что если C-стабильное соответствие существует, то полученное γ – одно из них.)

На *втором этапе* алгоритма проверяется, действительно ли γ является C-стабильным. Для этого перебираются все пары (x^i, x^j), $x^i \neq x^j$, и проверяется выполнение свойств (а) и (б) из утверждения 1. Для проверки отношений $x^i \preceq x^j$ и $\gamma(x^i) \preceq \gamma(x^j)$ применяется оракул (1), как объяснялось выше.

Можно убедиться, что при экономной имплементации алгоритма первый этап осуществляется за $O(kn \log n)$ действий, а второй этап – за $O(kn^2)$ действий (при условии, что обращение к оракулу оценивается за $O(1)$ действий). Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема. Алгоритм решает задачу о C-стабильном соответствии с условной временной трудоемкостью $O(kn^2)$.

Замечание. Если конус C полиэдральный и явно задан системой линейных неравенств, то оракул (1) реализуется процедурой с полиномиальной временной сложностью от размера системы (основанной на полиномиальном методе эллипсоидов Хачияна для линейного программирования, или последующих полиномиальных методах). Выяснение полномерности конуса и нахождение внутреннего вектора в нем также осуществляются в полиномиальное время (см., например, (Schrijver, 1998, с. 183)). Наконец, если C является ортантом, то указанные подзадачи становятся тривиальными, и оценка $O(kn^2)$ в теореме справедлива для реальной временной трудоемкости алгоритма.

ЛИТЕРАТУРА

Петров А.А., Поспелов И.Г., Шананин А.А. (1996) Опыт математического моделирования экономики. М.: Энергоатомиздат.

Schrijver A. (1998) Theory of linear and integer programming. N.Y.: J.Wiley Publ.