На правах рукописи

КАРЗАНОВ Александр Викторович

СТРУКТУРНЫЕ И АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МУЛЬТИПОТОКОВ И РАСШИРЕНИЙ КОНЕЧНЫХ МЕТРИК

Специальность: 01.01.09

Дискретная математика и математическая кибернетика

Диссертация в виде научного доклада на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Москва – 2001

Оффициальные оппоненты:

академик РАН, профессор **Журавлев Юрий Иванович**

доктор физ.-мат. наук **Гришухин Вячеслав Петрович**

доктор физ.-мат. наук **Кузюрин Николай Николаевич**

Ведущая организация: Институт Проблем Передачи Информации (ИППИ) РАН

Защита состоится "____" ________ 2001 г. в ____часов
на заседании Специализированного Совета Д.002.013.02
Центрального Экономико-Математического Института РАН
(117418, Москва, Нахимовский просп., д. 47)
Телефон Совета: (095) 332 43 39

С диссертацией в виде научного доклада можно ознакомиться
в библиотеке ЦЭМИ РАН

Диссертация в виде научного доклада разослана

"   " апреля 2001 г.

Ученый секретарь
Специализированного Совета

к.ф.-м.н. В.А. Скоков

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Диссертация основывается на большом цикле взаимосвязанных работ, объединенных предметной областью и в совокупности развивающих комбинаторную теорию и эффективные методы точного решения задач о неориентированных мультипотоках (многопродуктовых потоках в неориентированных сетях) и объектах двойственной природы — разрезах и метрических расширениях (расширениях конечных метрических пространств), а также исследующих смежные теоретические и алгоритмические проблемы.

Потоки и мультипотоки в графах и сетях моделируют многие реальные процессы и находят широкие приложения при исследовании и решении задач в сферах экономики, транспортных перевозок, электротехники, связи и др. Изучение таких объектов и задач на них составляет важное направление в математическом программированиии в целом и комбинаторной оптимизации в частности. *Мультипоток* может определяться двумя способами: как совокупность потоковых (внутренне сбалансированных) функций на ребрах сети, подчиняющихся общим ящичным ограничениям, и как взвешенная упаковка множества путей, соединяющих выделенные пары вершин. Теория упаковок объектов, имеющих содержательный комбинаторный смысл, таких как пути, циклы, разрезы, паросочетания и др., занимает одно из центральных мест в комбинаторной оптимизации — дисциплине, выделившейся в самостоятельную ветвь математического программирования и дискретной математики и интенсивно развивающейся в течении последних 30 лет. Выработаные в комбинаторной оптимизации методы оказываются во многих случаях более эффективными и теоретически и практически по сравнению с общими и даже проблемно-ориентированными методами математического программирования.

Теории, методам решения и приложениям однопродуктовых потоковых задач посвящено огромное число работ; эта область стала классической с выходом в свет монографии Форда и Фалкерсона в 60-е годы. Многопродуктовые потоки оказались существенно более трудными для комбинаторного исследования. Первый нетривиальный результат в этом направлении был получен Ху, установившим комбинаторный критерий разрешимости и существование полуцелочисленного решения неориентированной двухпродуктовой задачи. Последующий вклад внесли работы Папернова, Ломоносова, Черкасского, Ловаса, Сеймура, Скрайвера, Франка и др. авторов, в которых были получены важные структурные, алгоритмические и пр. результаты для ряда других случаев мультипотоковых и родственных задач. Однако область в целом оставалась недостаточно исследованной, и многие поставленные вопросы оставались открытыми. Диссертация значительно сокращает этот пробел.

Расширения конечных метрик появляются как двойственные объекты к мультипотокам, и соответствующие оптимизационные и структурные задачи часто исследуются параллельно. Задачи на метрических расширениях возникают и в других ветвях комбинаторной оптимизации, а также в общей теории конечных метрических пространств, и находят теоретические и практические приложения. Важное направление в теории упаковок, начатое работами Эдмондса, Джонсона и Сеймура, рассматривает в качестве пакуемых объектов разрезы графов, метрическим эквивалентом которых являются разрезные полуметрики — 0-расширения метрики графа K_2. Одна из задач этого направления — о реализации расстояний на заданных парах путем упаковки разрезных полуметрик — обобщает классическую задачу о кратчайшем пути, и с ней тесно связана известная проблема вложимости метрики в метрическое пространство ℓ_1. Пример другого рода дает известная задача "о размещении оборудования", допускающая переформулировку как задача минимизации неотрицательной линейной функции над 0-расширениями заданной метрики (*задача о минимальном 0-расширении*). Диссертация содержит целую серию структурных, алгоритмических, полиэдральных и др. результатов о конечных метриках, их расширениях и связанных с ними оптимизационных и иных задачах.

Цель работы. Диссертационная работа охватывает известные и новые задачи о мультипотоках и метрических расширениях и имеет целью существенное развитие комбинаторной теории и методов в данной области.

Значительная часть рассматриваемых задач допускает представление в виде задач линейного программирования с целыми коэффициентами, имеющих, быть может, экспоненциально большое число переменных. Разрабатываемая для них теория и методы направлены прежде всего на решение трех основных вопросов: (а) при каких условиях задача данного класса имеет решение (допустимое или оптимальное) со знаменателями, ограниченными константой, в частности, целочисленное или полуцелочисленное решение (*проблема дробности*); (б) можно ли найти решение соответствующей дробности эффективно, т.е. посредством алгоритма полиномиальной временной сложности (*проблема эффективной алгоритмической разрешимости*); (в) существуют ли специальные (комбинаторные) критерии разрешимости или оптимальности, усиливающие двойственность линейного программирования для данного класса задач (*проблема специальной двойственности*). Проблемы специальной двойственности и эффективной разрешимости являются центральными и при рассмотрении нелинейных задач.

Наиболее существенные результаты и их новизна:

— Для задач о допустимом мультипотоке и о максимальном мультипотоке в произвольных и плоских сетях получены описания множеств неизбегаемых двойственных препятствий, установлены комбинаторные критерии разрешимости и оптимальности и разработаны эффективные алгоритмы построения полу- или четвертьцелочисленных решений. Полностью охарактеризованы потоковые схемы, обеспечивающие дробность 2 (полуцелочисленность). Для двойственной задачи о максимальном мультипотоке определены точные значения дробности для всех потоковых схем;

— В задаче о максимальном мультипотоке минимальной стоимости установлены точные значения дробности для всех потоковых схем. Для класса схем, обеспечивающих ограниченную дробность, разработаны эффективные алгоритмы решения. Для этого же класса эффективно решена более сильная задача о целочисленном максимальном мультипотоке минимальной стоимости, и для нее найдено комбинаторное минимаксное соотношение (обобщение формулы Мадера для максимальной упаковки T-путей). Установлен сложностной статус (в терминах полиномиальной разрешимости или NP-трудности) целочисленной задачи для всех потоковых схем. Получено описание доминанта (T, d)-соединений графа (обобщение теоремы Эдмондса и Джонсона о блокере T-соединений);

— Исследованы задачи об упаковках разрезных и (2,3)-полуметрик, связанные отношениями полярной двойственности с мультипотоками. Для этих задач получены результаты о дробности, установлены комбинаторные критерии разрешимости и оптимальности и найдены эффективные алгоритмы решения. В качестве следствия, указан нетривиальный класс метрик, допускающих вложение в пространство ℓ_1. Показана NP-трудность задачи распознавания ℓ_1-метрики для общего случая;

— Получено полное описание множества метрик, для которых задача о минимальном 0-расширении имеет то же оптимальное целевое значение, что и линейная релаксации задачи. Определен сложностной статус задачи о минимальном 0-расширении для широких классов метрик. Эти результаты потребовали значительного развития теорий модулярных метрик и жестких метрических оболочек;

— Дана комбинаторная характеризация конечных метрик, для которых число примитивных расширений — тоже конечное. Доказано также, что метрика имеет данное свойство т. и т. т., когда топологическая размерность ее жесткой оболочки — не более 2, и описана клеточная структура двумерных оболочек. Получены результаты о дробности примитивных расширений и следствия для мультипотоков.

Теоретическая и практическая ценность. Полученные результаты и разработанные методы и подходы дают существенный вклад как в собственно комбинаторную теорию мультипотоков и метрических расширений, так и в смежные направления комбинаторной оптимизации, полиэдральной комбинаторики и теории метрических пространств. Результаты имеют практический выход и могут применяться при моделировании и решении разнообразных технико-экономических задач.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 42 научно-исследовательских работы (без учета тезисов докладов и кратких сообщений), из которых 30 выполнены без соавторов. Большинство работ опубликовано в ведущих отечественных и международных журналах (Доклады АН СССР, Annals of Combinatorics, Combinatorica, Discrete Math., Discrete Applied Math., European J. of Combinatorics, J. of Combinatorial Theory, Linear Algebra and Appl., Mathematical Programming, Math. of Operations Research, SIAM J. on Computing, SIAM J. on Discrete Math.).

Апробация работы. Результаты диссертации излагались в докладах на многочисленных отечественных и международных конференциях, в частности, в приглашенном 45-мин. докладе на Международном конгрессе математиков (Киото, Япония, 1990) и в докладах на 15 и 16 Международных симпозиумах по математическому программированию (Энн-Арбор, США, 1994; Лозанна, Швейцария, 1997). Результаты также подробно докладывались на многих рабочих семинарах в ведущих научно-исследовательских центрах в нашей стране (в частности, в ЦЭМИ) и за рубежом.

Структура работы. Данный научный доклад состоит из Введения, пяти основных Разделов и Приложения, которые делятся на подразделы (параграфы) и пункты. В конце текста приводится список работ автора по теме диссертации и затем список других цитируемых работ. Ссылки на работы автора по теме диссертации нумеруются числами (например, [15]), а ссылки на другие цитируемые работы даются сокращениями от фамилий авторов в английской транскрипции с возможными дополнительными порядковыми номерами (например, [GLS],[Se2]). Для теорем, лемм и т.п. применяется общая двойная нумерация (например, лемма 3.4 и теорема 3.5 соответствуют четвертому и пятому выделенным утверждениям в разделе III). Аналогично нумеруются выносные выражения и пункты.

Содержание работы

О. Введение

Основные результаты диссертации излагаются в разделах I–V. Ниже мы вводим или напоминаем базовые понятия, формулируем основные рассматриваемые задачи, уточняем проблематику, касаемся источниковых аспектов и даем краткий очерк содержания.

Мультипотоки и задачи о них. Разделы I–III посвящены изложению результатов о мультипотоках в неориентированных сетях, или неориентированных мультипотоках. Далее эпитет "неориентированный" мы будем опускать.

Исходными объектами являются *потоковая сеть* (G, c), состоящая из конечного графа $G = (V, E)$ и неотрицательной целочисленной функции $c : E \to \mathbf{Z}_+$ *пропускных способностей* ребер, и подмножество U неупорядоченных пар вершин в G, которые предполагается соединить потоками. Граф $H = (T, U)$, порожденный этими парами, называют *(потоковой) схемой*, или *графом продуктов*, а его вершины — *полюсами сети*. Для краткости неупорядоченная пара $\{x, y\}$ вершин обозначается xy. В комбинаторной оптимизации обычно придерживаются определения мультипотока в форме (взвешенной) упаковки путей. [Для рассматриваемых задач это эквивалентно используемому в теории сетей определению мультипотока как совокупности двухполюсных потоков, заданных в виде функций на направленных ребрах, см. [FF].] Более точно, обозначим $\mathcal{P}_{st}(G)$ множество простых путей в G, соединяющих вершины s и t, и $\mathcal{P}(G, H)$ — объединение этих множеств по всем парам $st \in U$. *Мультипоток* в сети (G, c) со схемой H — это неотрицательная вещественная функция $f : \mathcal{P}(G, H) \to \mathbf{R}_+$, удовлетворяющая ограничениям по пропускным способностям

$$\zeta^f(e) := \sum(f(P) : e \in P \in \mathcal{P}(G, H)) \le c(e) \quad \text{для всех ребер } e \in E. \tag{0.1}$$

Ограничение f на подмножество $\mathcal{P}_{st}(G)$ $(st \in U)$ понимается как *поток* f_{st} *мощности* $\mathrm{val}(f_{st}) := \sum(f(P) : P \in \mathcal{P}_{st}(G))$ между полюсами s и t. Сумма мощностей потоков считается *общей мощностью* мультипотока f и обозначается $\mathrm{val}(f)$. Наиболее распространены три типа мультипотоковых задач.

(ЗДМ) *Задача о допустимом мультипотоке*: Для заданной функции $d : U \to \mathbf{Z}_+$ (*требований* на мощности потоков) найти мультипоток f, удовлетворяющий $\mathrm{val}(f_{st}) = d(st)$ для всех $st \in U$ (или выяснить, что такого f не существует).

(ЗММ) *Задача о максимальном мультипотоке*: Найти мультипоток максимальной общей мощности, или *максимальный мультипоток.*

(ЗМС) *Задача о максимальном мультипотоке минимальной стоимости*: Для заданной функции $a : E \to \mathbf{Z}_+$ (*удельных стоимостей* ребер) найти максимальный мультипоток f, имеющий минимальную *общую стоимость* $\sum(a(e)\zeta^f(e) : e \in E)$.

Эти задачи вместе с их целочисленными усилениями (задачами о *целочисленных* упаковках путей) обобщают классические задачи о допустимом потоке, о максимальном потоке и о максимальном потоке минимальной стоимости для неориентированных сетей. [Теория, методы решения и приложения однопродуктовых потоковых задач, включая варианты транспортной задачи [Kan], представлены в [FF,ADK,EKK,GTT,AMO] и многих других монографиях и обзорах. В литературе рассматриваются и более общие многопродуктовые транспортные модели, чем указанные выше; см., например, [GY,Ro2].]

Эквивалентное представление потоков как функций на направленных ребрах позволяет записать ЗДМ, ЗММ и ЗМС в виде задач линейного программирования с "компактной" матрицей ограничений размера $O(|V||U|+|E|)\times O(|U||E|)$ с коэффициентами 0, 1, −1. Поэтому задачи решаются в сильнополиномиальное время с помощью усиленной версии [Ta] метода эллипсоидов [Kh]. К ним также применимы достаточно эффективные практически сетевые модификации симплекс-методов (см., например, [AMO]).

Нас, однако, интересует возможность создания более эффективных "комбинаторных" методов при фиксированных потоковых схемах H и получение точных решений с малыми знаменателями в тех случаях, когда их существование гарантировано теорией (аппарат линейного программирования для этого недостаточен). Обозначим ЗДМ(H) множество (класс) частных задач о допустимом мультипотоке при фиксированной схеме H и произвольных G, c, d, и аналогично для ЗММ и ЗМС. Основные направления наших исследований мультипотоковых и других задач сфокусированы на четырех проблемах. Мы формулируем их в общем виде.

Основная проблематика. Пусть $\mathcal{K}$ — некоторый класс задач ("массовая задача") о допустимости: найти элемент в заданном (быть может, неявно) множестве $S \subseteq \mathbf{R}^n$, или оптимизации: максимизировать или минимизировать заданную функцию $g : S \to \mathbf{R}$. Для рационального вектора $x \in \mathbf{Q}^n$ обозначим $\varphi(x)$ наименьшее общее кратное знаменателей его компонент. Для частной задачи $P \in \mathcal{K}$ обозначим $\varphi(P)$ *минимум* чисел $\varphi(x)$ среди всех допустимых (соответственно, оптимальных) рациональных решений x, полагая $\varphi(P) := 0$, если таких решений не существует. Наконец, обозначим $\varphi(\mathcal{K})$ *максимум* чисел $\varphi(P)$ по всем задачам $P \in \mathcal{K}$, полагая $\varphi(\mathcal{K}) := \infty$, если эти числа не ограничены сверху. Величина φ называется *дробностью* (вектора, задачи или класса задач). *Первая* из изучаемых проблем — *проблема дробности* — заключается в определении или, по крайней мере, нетривиальном оценивании сверху значения $\varphi(\mathcal{K})$.

В этих терминах класс абсолютно целочисленных задач линейного программирования имеет дробность 1. Поскольку этот класс включает стандартные потоковые задачи, поставленные мультипотоковые задачи имеют дробность 1 при $|U| = 1$ (или $H \simeq K_2$), а ЗММ и ЗМС — даже при $H \simeq K_{q,r}$ (ввиду сведения к многополюсным однопродуктовым задачам). Уже в случае $|U| = 2$ целочисленные решения не гарантированы, однако Ху [Hu] показал существование *полуцелочисленных* решений для неориентированных двухпродуктовых задач о допустимости и максимальности, из чего следует $\varphi(\text{ЗДМ}(H)) = \varphi(\text{ЗММ}(H)) = 2$ для $H \simeq K_2 + K_2$. Здесь и далее $\Gamma + \Gamma'$ обозначает объединение непересекающихся графов Γ и Γ', K_r — полный граф с r вершинами, $K_{q,r}$ — полный двудольный граф с долями из q и r вершин, и $\simeq$ обозначает изоморфные графы. [В комбинаторной оптимизации существование целочисленных и полуцелочисленных решений было установлено для целого ряда содержательных задач; например, $\varphi = 1$ для задачи об упаковке корневых ветвлений в орграфе [Ed2], и $\varphi = 2$ для линейных релаксаций задач о максимальном паросочетании и о максимальной клике. В то же время для многих известных задач проблема дробности остается открытой. Такими, например, являются релаксации задач о точном покрытии ребер графа простыми циклами и о точном покрытии регулярного графа совершенными паросочетаниями, для которых гипотезы Фалкерсона–Сеймура и Бержа предполагают дробность 2 (см. [Se2,Se3]).]

Вторая проблема касается возможности *эффективного построения* допустимых и оптимальных решений, дробность которых отвечает дробности класса. Общие методы такого рода не известны даже в области задач линейного программирования, и известные эффективные алгоритмы для содержательных классов задач, как правило, весьма нетривиальны и используют средства комбинаторного характера.

Третья проблема (усиливающая предыдущую при $\varphi(\mathcal{K}) > 1$) связана с возможностью эффективного нахождения оптимального *целочисленного* решения. В комбинаторной оптимизации целочисленные задачи являются наиболее распространеными, и вопрос об их сложностном статусе (в смысле полиномиальной разрешимости или NP-трудности) занимает центральное место.

Для рассматриваемых мультипотоковых задач нам удается определить значения дробности и построить эффективные комбинаторные алгоритмы для широких классов потоковых схем, а в случае ЗМС — решить проблему дробности и определить сложностной статус целочисленной стоимостной задачи для всех потоковых схем. [Отметим, что аналогичные *ориентированные* многопродуктовые потоковые задачи имеют существенно более бедные свойства с точки зрения указанных проблем. Например, для общих орсетей задача о допустимом мультипотоке имеет дробность ∞, а соответствующая целочисленная задача — NP-трудная, если потоковая схема не является односторонне ориентированной звездой (в противном случае задача эквивалентна однопродуктовой и имеет дробность 1). Для некоторых частных случаев орсетей все же получены нетривиальные комбинаторные результаты; один из них будет указан в разделе II.]

Четвертая проблема касается существования *специальных* (комбинаторных) *двойственных соотношений и критериев разрешимости*. Простейшим примером этого рода служит классическая теорема о максимальном потоке и минимальном разрезе. Получение комбинаторных минимаксных соотношений и критериев для содержательных задач и изучение природы комбинаторной двойственности составляют ядро комбинаторной оптимизации.

В задачах о допустимом и максимальном мультипотоке теоремы специальной двойственности удается получить при всех схемах H, для которых доказывается существование решения ограниченной дробности, и даже для более широких классов схем. Найденные критерии вовлекают метрики и их расширения. Здесь мы приходим ко второму типу объектов, исследуемых в диссертации.

Метрики, метрические расширения и задачи о них. Напомним, что *полуметрика* на множестве V — это функция $m : V \times V \to \mathbf{R}_+$, устанавливающая *расстояния* на парах элементов (*точек*) в V, удовлетворяющие: (i) $m(x,x) = 0$, (ii) $m(x,y) = m(y,x)$ (симметрия), и (iii) $m(x,y) + m(y,z) \geq m(x,z)$ (неравенство треугольника), для всех $x,y,z \in V$. Учитывая (i) и (ii), расстояние между точками x и y может обозначаться $m(xy)$, и m определяется своими значениями на множестве $\binom{V}{2}$ неупорядоченных пар различных элементов в

V. Поэтому m отождествляют с соответствующим вектором эвклидова пространства $\mathbf{R}^{\binom{V}{2}}$ (координаты которого индексируются элементами в $\binom{V}{2}$). Множество $\mathcal{M}_V$ полуметрик на V образует выпуклый замкнутый многогранный конус в $\mathbf{R}^{\binom{V}{2}}$, называемый *полуметрическим конусом*. Если $m(xy) > 0$ при $x \neq y$, то m называется *метрикой*. Мы не делаем различий между (полу)метрикой m на V и (полу)метрическим пространством (V, m), и называем m *конечной*, если множество V конечное.

Связный граф $G = (V, E)$ с функцией $\ell : E \to \mathbf{R}_+$ *длин* ребер порождает полуметрику $\mathrm{dist}^{G,\ell}$ на V, в которой расстояние между вершинами x, y равно длине кратчайшего пути, соединяющего эти вершины. При $\ell \equiv 1$ получаем *метрику графа* G, обозначаемую dist^G. *Разрезная полуметрика* ρ_V^X определяется собственным подмножеством $X \subset V$ (или разбиением $\{X, V - X\}$) и устанавливает расстояние 0 на парах в X и на парах в $V - X$, и расстояние 1 — на остальных парах в V.

Говорят, что $m \in \mathcal{M}_V$ — *расширение* $\mu \in \mathcal{M}_T$, если существует инъективное отображение $\sigma : T \to V$, при котором $\mu(st) = m(\sigma(s)\sigma(t))$ для всех $s, t \in T$. Если к тому же существует $\gamma : V \to T$ такое, что отображение $\gamma\sigma$ тождественное, и $m(xy) = \mu(\gamma(x)\gamma(y))$ для всех $x, y \in V$, то m называется 0-*расширением* μ. Обычно мы предполагаем, что T — подмножество V, и σ тождественное; другими словами, m является *расширением* μ *на множество* V, если μ — *подполуметрика* m. Такое m является 0-расширением, когда каждая точка $x \in V$ находится на нулевом расстоянии от T, т.е. $m(xs) = 0$ для некоторого $s \in T$. Множества всех расширений и 0-расширений μ на множество V обозначаются $\mathrm{Ext}(\mu, V)$ и $\mathrm{Ext}^0(\mu, V)$, соответственно.

Всякая полуметрика $m \in \mathcal{M}_V$ является 0-расширением некоторой метрики μ. А именно: максимальные подмножества $X \subseteq V$ с нулевыми расстояниями для всех $x, y \in X$ (называемые 0-*множествами*) образуют разбиение V, и μ есть полуметрика на подмножестве $T \subseteq V$, содержащем ровно один элемент из каждого 0-множества. Разрезная полуметрика имеет два 0-множества и является 0-расширением метрики простейшего графа K_2.

Мы будем рассматривать ряд задач о конечных метриках и их расширениях. Часть из них представляет специальные случаи общей задачи минимизации неотрицательной линейной функции над полуметриками заданного вида:

(0.2) *Для конечного множества* V, *функции* $c : \binom{V}{2} \to \mathbf{Z}_+$ *и (неявно заданного) конечного семейства* Ω *полуметрик на* V, *найти* $m \in \Omega$ *с минимальной величиной* $c \cdot m$.

Здесь и далее $a \cdot b$ обозначает скалярное произведение $\sum_{e \in S} a(e)b(e)$ числовых функций a, b на общей части S их областей определений. В частности, задача (0.2) для определенных семейств Ω возникает по линейной двойственности в связи с задачами о допустимых и максимальных мультипотоках. В разделе V исследуется (0.2) следующего типа:

(ЗМНР) *Задача о минимальном 0-расширении*: Для конечного метрического пространства (T, μ), конечного множества $V \supseteq T$ и функции $c : \binom{V}{2} \to \mathbf{R}_+$ найти 0-расширение $m \in \mathrm{Ext}^0(\mu, V)$ с минимальным $c \cdot m$.

Эта задача эквивалентна известной версии *задачи о размещении оборудования*, см. [TFL]. В последней T — это множество пунктов, предназначенных для размещения заводов (или единиц оборудования) $Q_1, \ldots, Q_N$; в одном пункте может размещаться несколько заводов. Для каждой пары $\{Q_i, Q_j\}$ задано число $c_{ij} \geq 0$, выражающее предполагаемый объем обмена продукцией (или степень взаимодействия). Заводы $Q_1, \dots, Q_k$ уже размещены в пунктах $\gamma(1), \dots, \gamma(k) \in T$, и надо разместить оставшиеся, минимизируя ожидаемые "транспортные издержки". Формально: продлить γ до отображения $\gamma : \{1, \dots, N\} \to T$ с минимальной величиной $\sum(c_{ij}\mu(\gamma(i)\gamma(j)) : 1 \leq i < j \leq N)$. Можно привести и другие содержательные интерпретации ЗМНР (например, задача минимизации общей длины проводов при размещении электрической схемы на плате).

Нас прежде всего будет интересовать случай метрик μ, для которых задача о минимальном 0-расширении имеет то же целевое значение, что и ее релаксация. Последняя является задачей линейного программирования (разрешимой в сильнополиномиальное время), имеет собственные приложения и формулируется так:

(ЗМР) *Задача о минимальном расширении*: Для T, μ, V, c как выше минимизировать $c \cdot m$ среди всех расширений $m \in \mathrm{Ext}(\mu, V)$.

В разделе IV исследуются задачи об упаковках разрезных и иных полуметрик. Начало рассмотрению задач такого рода (в терминах упаковок разрезов) было положено работами Эдмондса, Джонсона и Сеймура [EJ,Se1,Se7]. В этих задачах основными объектами являются связный граф $G = (V, E)$ с длинами $\ell(e) \in \mathbf{Z}_+$ ребер $e \in E$ и некоторое конечное множество $\Omega \subset \mathcal{M}_V$. Обычно Ω задается неявно указанием вида полуметрик; например, Ω — множество разрезных полуметрик на V. (Взвешенная) *упаковка* Ω в (G, ℓ) — это функция $\lambda : \Omega \to \mathbf{R}_+$, удовлетворяющая

$$\Lambda^{\Omega,\lambda}(e) \leq \ell(e) \qquad \text{для всех } e \in E, \tag{0.3}$$

где $\Lambda^{\Omega,\lambda}$ обозначает полуметрику $\sum(\lambda(m)m : m \in \Omega)$. Из (0.3) следует $\Lambda^{\Omega,\lambda}(xy) \leq \mathrm{dist}^{G,\ell}(xy)$ для всех $x, y \in V$. Одна из рассматриваемых задач, имеющая полярно-двойственную связь с задачей о допустимом мультипотоке, формулируется так.

(ЗРР) *Задача о реализации расстояний*: Для G, ℓ, Ω и подмножества $U \subset \binom{V}{2}$ найти упаковку λ, *реализующую расстояния* для всех пар $st \in U$, т.е. удовлетворяющую

$$\Lambda^{\Omega,\lambda}(st) = \mathrm{dist}^{G,\ell}(st) \qquad \text{для всех } st \in U, \tag{0.4}$$

(или выяснить, что такого λ не существует).

Если $U = \binom{V}{2}$, то ЗРР превращается в задачу *разложения* полуметрики $\mathrm{dist}^{G,\ell}$ в неотрицательную линейную комбинацию (н.л.к.) полуметрик из Ω. При изучении ЗРР и других задач об упаковках полуметрик центральными вопросами будут по-прежнему вопросы дробности, эффективной алгоритмической разрешимости и специальной двойственности.

Рассматриваемые задачи о мультипотоках и метрических расширениях исследуются во взаимосвязи в рамках единого направления, и результаты и методы для одних задач служат базой при получении результатов и методов для других. Доказательства и методы во многом опираются на новые комбинаторные инструменты и привлекают аргументы стандартной, полярной и блокирующей двойственности, полиэдральной комбинаторики, средства топологического характера и др. При изложении результатов, где это представляется важным, мы кратко поясняем основные идеи доказательств и методов.

Для целого ряда подклассов задач с доказываемой дробностью 2 будет установлена *усиленная полуцелочисленность* — существование *целочисленных* решений в случае, когда числовые функции (пропускных способностей, требований, длин) обладают свойством т.н. *парности*, означающим четность весов определенных коциклов (в матроидном смысле). Феномен усиленной полуцелочисленности для задач на допустимость связывается с тем обстоятельством, что некоторая ассоциированная система векторов образует Гильбертов базис. [В теории векторных решеток конечное множество $X \subset \mathbf{Q}^n$ рациональных векторов называют *Гильбертовым базисом*, если их неотрицательная целочисленная оболочка совпадает с пересечением конической и целочисленной оболочек: $\mathbf{Z}_+(X) = \mathbf{R}_+(X) \cap \mathbf{Z}(X)$; см., например, [Sch1,DL].] В случае стоимостной мультипотоковой задачи природа полуцелочисленности будет иной.

Краткий обзор содержания по разделам. *Раздел I* посвящен задаче о допустимом мультипотоке. Известно, что множество разрешимых задач при фиксированном V представляется в виде конуса, полярного полуметрическому конусу $\mathcal{M}_V$. Поэтому критерий разрешимости ЗДМ для общих сетей и схем состоит в выполнении линейных неравенств относительно полуметрик на V, а именно, $c \cdot m \geq d \cdot m$ для всех $m \in \mathcal{M}_V$. При фиксированной схеме H разрешимость задачи гарантируется выполнением неравенств для полуметрик, лежащих на крайних лучах определенного надконуса $\mathcal{M}_V$; они называются *H-экстремальными* полуметриками, или *препятствиями* для ЗДМ(H). Хорошо известным случаем препятствий являются разрезные полуметрики; для них неравенство эквивалентно *разрезному условию*: общая пропускная способность ребер между $X \subset V$ и $V - X$ должна быть не менее суммы требований на потоки между этими множествами. На актуальный в 70-е годы вопрос, для каких схем H препятствиями служат только разрезные полуметрики, полный ответ был дан Паперновым: ими являются K_4, C_5 (цикл на 5 вершинах) и объединение двух звезд. Позднее было установлено, что в этих случаях для эйлеровых (c, d) разрешимая задача имеет целочисленное решение (эйлеровость соответствует условию парности для ЗДМ). С другой стороны Ломоносов показал, что $\varphi(\text{ЗДМ}(H)) = \infty$, если H имеет три попарно несмежных ребра.

Мы рассматриваем все оставшиеся случаи схем H. Это: (а) K_5, (б) объединение K_3 и звезды, (с) $K_3 + K_3$. Для этих H мы описываем множества препятствий и устанавливаем специальные критерии разрешимости ЗДМ(H). В случаях (а) и (б) неразрезными препятствиями оказываются (2,3)-*полуметрики* (0-расширения метрики графа $K_{2,3}$), дробность ЗДМ(H) равна 2, и имеется сильнополиномиальный комбинаторный алгоритм нахождения полуцелочисленного решения. В случае (с) имеются и более сложные препятствия.

Далее в разделе рассматривается популярный случай плоской сети (G, c) и схемы H, ребра которой (пары "источник–сток") лежат в k гранях G. Окамура [Ok] показала разрезность всех препятствий и полуцелочисленность при $k \leq 2$. Мы описываем множества препятствий и решаем проблему дробности для случаев $k = 3$ и $k = 4$, а также выясняем, что уже при $k = 5$ множество препятствий становится "плохо структурированным". Так при $k = 3$ неразрезными препятствиями оказываются $(2, 3)$-полуметрики, и дробность равна 2, а при $k = 4$ появляется дополнительная серия препятствий, и дробность становится равной 4. В заключительном параграфе решается целочисленная двухпродуктовая задача с единичными требованиями.

Результаты о дробности 2 показываются в форме усиленной полуцелочисленности: для эйлеровых (c, d) разрешимая ЗДМ имеет целочисленное решение, а для случая плоского G и $k = 4$ доказывается усиленная четвертьцелочисленность. В основе доказательств и алгоритмов лежит идея т.н. *вилочной декомпозиции* — последовательности определенных эквивалентных преобразований, упрощающих сеть.

Раздел II посвящен задаче о максимальном мультипотоке. Здесь по сравнению с ЗДМ классы потоковых схем, обеспечивающих хорошие структурные свойства задачи, оказывается значительно шире. Наш подход к ЗММ базируются на углубленном исследовании двойственной задачи ЗММ* (являющейся специальным случаем (0.2)).

Мы обобщаем на произвольную дробность базовый результат Эдмондса и Джайлса [EG] о тотально двойственно-целочисленных системах. Из обобщения следует, что дробность ЗММ не меньше дробности двойственной задачи. Это дает неравенство $\varphi(\text{ЗММ}(H)) \geq \varphi(\text{ЗММ}^*(H))$ для каждой схемы H. В частности, неограниченная дробность $\text{ЗММ}^*(H)$ влечет неограниченную дробность $\text{ЗММ}(H)$. Мы устанавливаем точные значения $\varphi(\text{ЗММ}^*(H))$ для всех схем H; возможными значениями служат $1, 2, 4, \infty$. Классы схем H, обеспечивающих двойственную дробность $1, 2, 4$ оказываются весьма широкими, и для них мы описываем структуру специальных оптимальных двойственных решений. Это дает комбинаторные теоремы двойственности для $\text{ЗММ}(H)$.

Важным типом специального двойственного решения является неотрицательная линейная комбинация разрезных полуметрик. Схемы H, для которых каждая частная задача в $\text{ЗММ}(H)$ имеет оптимальное двойственное решение такого вида, называются *разрезно-обусловленными*, или *РО-схемами*. Нам удается полностью описать этот класс схем: H является РО-схемой т. и т. т., когда каждая вершина H принадлежит не более двум антикликам. Показывается, что $\varphi(\text{ЗММ}(H))$ для РО-схемы H равно 1, 2 или 4 (с уточнением, какие именно схемы дают эти значения дробности), и предлагается сильнополиномиальный комбинаторный алгоритм нахождения оптимальных полу- и четвертьцелочисленных решений. Алгоритм основан на технике вилочной декомпозиции, и для эффективных проверок корректности при декомпозиции используется сведении двойственной задачи к задаче о минимальном разрезе в расширенной сети. Другой предлагаемый эффективный метод решения использует выявленную связь с задачей на обобщениях полиматроидов.

Завершая исследование прямых задач с полуцелочисленными оптимальными решениями, мы показываем, что за пределами класса РО-схем имеется всего одна схема H, для которой $\varphi(\text{ЗММ}(H)) = 2$, а именно, $H \simeq K_2 + K_3$, и предлагаем эффективный комбинаторный алгоритм для этого случая.

Аналогично ЗДМ, в случаях дробности 2 в действительности доказывается свойство усиленной полуцелочисленности.

Раздел III посвящен задаче о максимальном мультипотоке минимальной стоимости и ее целочисленной версии. Мы устанавливаем точные значения дробности $\text{ЗМС}(H)$ для всех H. Как отмечалось выше, для полной двудольной схемы $H \simeq K_{q,r}$ ЗМС сводится к однопродуктовой задаче, поэтому $\varphi(\text{ЗМС}(K_{q,r})) = 1$. Наша основная теорема о ЗМС утверждает, что задача имеет *полуцелочисленное* оптимальное решение, если H — полный граф K_r при любом r. Оказывается, в этом случае оптимальный мультипоток может быть получен при помощи симметризации целочисленного потока в некоторой кососимметрической ориентированной сети, дважды накрывающей подсеть в (G, c), что и обеспечивает полуцелочисленность. Эта идея двойного накрытия развивается в эффективном алгоритме нахождения полуцелочисленного оптимального решения ЗМС(K_r). Теорема и алгоритм обобщаются на *полные многодольные* схемы $H \simeq K_{q,\dots,r}$. С другой стороны показывается, что $\varphi(\text{ЗМС}(H)) = \infty$, если граф H не является полным многодольным (например, $H \simeq K_2 + K_2$).

Результаты о ЗМС служат затем отправной точкой для рассмотрения задачи о максимальном *целочисленном* мультипотоке минимальной стоимости (ЦЗМС). Ее частным случаем (при $c \equiv 1$ и $a \equiv 1$) является задача отыскания наибольшего множества не пересекающихся по ребрам путей, соединяющих выделенные пары вершин графа, и при этом число используемых ребер минимизируется. Мы устанавливаем сложностной статус ЦЗМС(H) при $c \equiv 1$ для всех схем H; оказывается, труднорешаемость имеет место в тех же случаях, что и неограниченная дробность в ЗМС. Более точно: доказывается, что ЦЗМС(H) сильно NP-трудная (т.е. NP-трудная уже при $c \equiv 1$ и $a \equiv 1$), если H не является полным многодольным. С другой стороны, предлагается сильнополиномиальный алгоритм для полных многодольных H и $c \equiv 1$. Алгоритм основывается на полученных теоретических результатах для базового случая $H \simeq K_r$. По аналогии с классическим методом Форда и Фалкерсона для потоков минимальной стоимости мы рассматриваем *параметрическую* версию задачи, объединяя обе целевых функции (мощность и стоимость мультипотока) в единую функцию. Основная теорема дает комбинаторное минимаксное соотношение для параметрической ЦЗМС(K_r). Оно является далеким обобщением известной формулы Мадера [Ma] для наибольшего числа не пересекающихся по ребрам T-путей графа.

Полученные результаты применяются к задаче о *(T, d)-соединении минимального веса*, обобщающей классическую задачу Эдмондса–Джонсона [EJ] о T-соединении минимального веса. Она сводится к ЦЗМС(K_r) и поэтому эффективно решается, а упомянутое минимаксное соотношение используется для описания структуры доминанта (T, d)-соединений графа.

Раздел IV посвящен задачам об упаковках полуметрик. Основные результаты относятся к случаям, когда пакуемым множеством $\Omega \subset \mathcal{M}_V$ служит либо множество $\mathcal{C}_V$ разрезных полуметрик на V, либо $\mathcal{C}_V$ в объединении с множеством $\mathcal{M}_V^{2,3}$ (2,3)-полуметрик на V.

Вначале исследуется задача о реализации расстояний. Она имеет полярно двойственную связь с задачей о допустимом мультипотоке, что позволяет находить разрешимые случаи ЗРР, исходя из критериев разрешимости ЗДМ, и наоборот. Например, из теоремы Папернова о разрешимости ЗДМ при выполнении разрезных условий в случае потоковых схем $H = (T, U)$ вида K_4, C_5 или объединения двух звезд следует, что ЗРР всегда имеет решение для данных U при пакуемом множестве $\mathcal{C}_V$. Аналогичные следствия для ЗРР (при Ω вида $\mathcal{C}_V$, $\mathcal{C}_V \cup \mathcal{M}_V^{2,3}$ и др.) немедленно производятся из теоремы Окамуры и наших теорем о разрешимости ЗДМ, представленных в разделе I. Однако полярная двойственность говорит только о существовании рациональных решений для ЗДМ и ЗРР и не дает механизмов оценки дробности этих задач.

Развивая идеи работ Сеймура [Se7] и Скрайвера [Sch2] и привлекая новые комбинаторные аргументы, мы устанавливаем серию результатов об усиленной полуцелочисленной разрешимости ЗРР для всех рассматриваемых нами случаев G, U, Ω. Здесь и в других задачах об упаковках полуметрик условие парности соответствует *циклической четности* функции длин ℓ, т.е. четности длин всех циклов сети (G,ℓ). Требуемые целочисленные упаковки строятся сильнополиномиальными гриди-алгоритмами.

Результаты о ЗРР применяются для описания нетривиального класса конечных метрик, допускающих изометрическое вложение в векторное пространство с метрикой ℓ_1. С другой стороны мы показываем с помощью метода эллипсоидов, что задача распознавания принадлежности классу ℓ_1-метрик в общем случае NP-трудная.

В разделе также рассматривается задача о максимальной упаковке разрезных полуметрик (или разрезов), отвечающих заданному множеству разбиений полюсов сети, называемому полюсной *конфигурацией*. Ранее были хорошо изучены случаи "нечетнополюсной" [EJ,Se7] и "двухпродуктовой" [Se1] конфигураций (задача для первой имеет важные приложения; см., например, [GLS]). Семейства разрезов для этих случаев обладают *MFMC-свойством*; в теории упаковок это означает целочисленность всех вершин определенного многогранника, ассоциированного с пакуемых семейством подмножеств. Мы вводим понятие *обобщенного MFMC-свойства* и, в качестве основных результатов, даем полные характеризации классов полюсных конфигураций, для которых соответствующие семейства разрезов любого графа обладают стандартным и обобщенным MFMC-свойствами. Неформально говоря, стандартное (обобщенное) MFMC-свойство в нашем случае означает, что максимальная мощность упаковки разрезных полуметрик выражается неотрицательной целочисленной (соответственно, линейной) комбинацией расстояний между полюсами сети. Для данной задачи также представляются результаты о дробности и эффективные комбинаторные алгоритмы.

Раздел V посвящен теоретическому и алгоритмическому исследованию задачи о минимальном 0-расширении метрики и проблем, касающихся примитивных расширений, а также приложениям к мультипотокам. Основные результаты раздела занимают одно из центральных мест в диссертации. В зависимости от метрики μ сложностной статус ЗМНР колеблется от эффективной разрешимости до труднорешаемости. Простейшими случаями с таким поведением являются классические задачи о минимальном двухполюсном разрезе (ЗМНР при $\mu=\mathrm{dist}^{K_2}$) и о минимальном трехполюсном разрезе (ЗМНР при $\mu=\mathrm{dist}^{K_3}$), первая из которых решается в сильнополиномиальное время многими известными алгоритмами, а вторая — сильно NP-трудная.

Мы называем метрику μ *минимизируемой*, если при любых G,c минимальные целевые значения в ЗМНР и ее релаксации ЗМР одинаковы. Для таких метрик ЗМНР разрешима в сильнополиномиальное время (так как ЗМР — "компактная" линейная программа с $(0,\pm1)$-матрицей). Нам удается полностью описать множество минимизируемых метрик, которое оказывается весьма широким. В этом исследовании центральное место занимают метрики графов, и ключевая теорема утверждает, что метрика $\mu=\mathrm{dist}^H$ является минимизируемой т. и т. т., когда граф H наследственно модулярный и может быть определенным образом ориентирован. Как следствие, минимизируемыми являются метрики деревьев, графов $K_{2,r}$, двумерных решеток и более общих планарных графов, и многих других случаев графов. Доказательство теоремы существенно использует новые теоретические результаты о жестких оболочках конечных метрических пространств (являющихся метризованными полиэдральными комплексами), основы теории которых были заложены Избелом и Дрессом.

Мы также устанавливаем существование ретракций определенных модулярных графов, в результате чего ЗМНР удается эффективно решить для широкого класса неминимизируемых модулярных метрик. С другой стороны, обобщая идею доказательства труднорешаемости задачи о минимальном трехполюсном разрезе в работе [DJPSY], мы показываем, что ЗМНР — сильно NP-трудная для любой фиксированной немодулярной метрики, а также для модулярных метрик с неориентируемыми опорными графами.

Далее исследование переносится на т.н. *примитивные* расширения конечных метрик. Свойство минимизируемости метрики эквивалентно тому, что она имеют единственное примитивное расширение. Нас теперь интересуют метрики μ более общего вида, а именно, имеющие произвольное *конечное* число примитивных расширений; такие μ называются *примитивно-конечными*, или *ПК-метриками*. Мы даем полное описание множества этих метрик в комбинаторных терминах и устанавливаем их дополнительные структурные, топологические и алгоритмические свойства. Одна из представленных теорем утверждает, что метрика примитивно-конечная т. и т. т., когда размерность ее жесткой оболочки — не более 2. Показывается также, что все примитивные расширения целочисленной ПК-метрики — четвертьцелочисленные. Последнее свойство дает результат о специальной двойственности для *метрической мультипотоковой задачи* (обобщения задачи о максимальном мультипотоке со схемой K_r).

Диссертация завершается *Приложением*. В то время как раздел III посвящен обобщению задачи о потоке минимальной стоимости (версии сетевой транспортной задачи) на большее число продуктов, в Приложении рассматривается ее обобщение на более широкий класс пространств и целевых функций. А именно, рассматривается задача минимизации *сепарабельной выпуклой функции* $w(x) = \sum_{e \in E} w_e(x_e)$ над *унимодумярным линейным пространством* $L \subseteq \mathbf{R}^E$, т.е. множеством решений системы $Mx = 0$ линейных уравнений с вполне унимодулярной матрицей M. Помимо сетевой транспортной задачи, частными случаями являются задача о коциркуляции (или функции разностей потенциалов) минимальной стоимости, задача определения эвклидова расстояния до многогранника совершенных паросочетаний двудольного графа, и др.

Одним из наиболее эффективных методов решения сетевой транспортной задачи является алгоритм *сокращения минимального среднего цикла* Гольдберга и Таржана [GT]. Мы переносим идею этого алгоритма и его убыстренной версии на рассматриваемый общий случай (оперируя с циклами соответствующего регулярного матроида), и как результат получаем два комбинаторных метода с геометрической двойственной сходимостью. Имплементации наших методов для специальных случаев L (пространства циркуляций и коциркуляций орграфа) и специальных функций w (кусочно линейные, кусочно квадратичные, смешанные) дают быстрые алгоритмы точного решения; они имеют полиномиальные и сильнополиномиальные временные оценки, сравнимые с известными ранее или улучшающие их. Методы развиваются и для эффективного поиска оптимального целочисленного решения. Наконец, методы обобщаются на пространства L *ограниченной дробности* q, т.е. на случай, когда наименьшее общее кратное определителей всех миноров целочисленной матрицы M не превосходит числа q.

Обозначения, терминология и соглашения. Для множеств A, B и элемента $e \in A$ мы для простоты пишем $A - B$ вместо $A \setminus B$, $A - e$ вместо $A - \{e\}$, и $A \cup e$ вместо $A \cup \{e\}$. Полный граф с множеством вершин V, т.е. $(V, \binom{V}{2})$, обозначается K_V. *Разрез* графа $G = (V, E)$, индуцируемый $X \subset V$, — это множество ребер, соединяющих X и $V - X$, обозначаемое $\delta(X) = \delta_G(X)$. Говорят, что разрез $\delta(X)$, или разрезная полуметрика ρ^X, *разделяет* вершины s, t (подмножества $A, B \subset V$), если $|X \cap \{s, t\}| = 1$ (соответственно, X содержит одно и не пересекается с другим из A, B). Конечная последовательность $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ элементов множества V называется *путем на* V, а *путь в графе* $G = (V, E)$ — это чередующаяся последовательность $(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k)$ вершин и ребер, где $e_i = v_{i-1}v_i \in E$. В обоих случаях для пути может применяться сокращенное обозначение $v_0v_1 \ldots v_k$. Путь, начало и конец которого различны и принадлежат выделенному подмножеству $T \subseteq V$, называется T-*путем*. В зависимости от контекста путь (цикл) графа может отождествляться с соответствующим подграфом или множеством ребер.

Мы не делаем различий между вещественными функциями на конечном множестве S и векторами эвклидова пространства $\mathbf{R}^S$, координаты которого индексируются элементами в S. $\operatorname{supp}(a)$ обозначает *носитель* $\{e \in S : a(e) \neq 0\}$ функции $a : S \to \mathbf{R}$. Для $S' \subseteq S$ величина $\sum(a(e) : e \in S')$ обозначается $a(S')$. Например, $c(\delta(X))$ — пропускная способность разреза $\delta(X)$ в сети (G, c), и $\ell(P)$ — длина пути или цикла P в графе G с функцией ℓ длин ребер (здесь P рассматривается как множество ребер с возможными кратностями). Путь $P = v_0v_1 \ldots v_k$ на V называется *кратчайшим путем*, или *геодезической*, полуметрики m на V, если $m(P) := m(v_0v_1) + \ldots + m(v_{k-1}v_k) = m(v_0v_k)$. При выписывании линейных систем знак транспонирования не ставится. Мы можем писать ab вместо $a \cdot b$, если области определения функций a, b заведомо совпадают.

Мы пользуемся стандартными понятиями теории алгоритмической сложности и отсылаем к монографии Гэри и Джонсона [GJ] за уточнением этих понятий. Под *временной оценкой* (временем, сложностью) алгоритма будет всегда пониматься верхняя оценка числа стандартных логических и арифметических операций в наихудшем случае. Вход рассматриваемой задачи будет обычно состоять из *структурных данных* (описание графа сети, потоковой схемы и т.п.) и *числовых данных* (пропускные способности ребер, длины ребер, требования на мощности и т.п.), предполагаемых целочисленными. Неформально говоря, решающий задачу алгоритм называют *сильнополиномиальным*, если число примененных операций оценивается сверху полиномом от количества исходных данных и при этом используемая память в каждый момент времени ограничена полиномом от общей длины записи исходных данных (т.е. нет сильного роста размеров промежуточных данных). (Массовую) задачу называют *сильно* NP-трудной, если она оказывается NP-трудной уже для случая, когда размер каждого числового данного ограничен константой (обычно для данных $0, \pm 1$).

I. Задача о допустимом мультипотоке (ЗДМ)

Первоначальное развитие комбинаторной теории мультипотоков было в основном связано с выявлением случаев, когда разрешимость задачи о допустимом мультипотоке гарантируется выполнением естественных условий относительно разрезов. Нетривиальные случаи схем и сетей, обеспечивающие это свойство *разрезной обусловленности*, были описаны в работах Ху, Папернова, Ломоносова, Сеймура и др., где также было установлено существование получелочисленных решений и предложены комбинаторные методы их нахождения.

Раздел I представляет теоретические и алгоритмические результаты для задачи о допустимом мультипотоке за пределами разрезной обусловленности. Так один из основных результатов в $ 1 (теорема 1.3) утверждает, что множество препятствий для ЗДМ со схемой K_5 состоит из разрезных полуметрик и $(2,3)$-полуметрик. В этом случае разрешимая задача имеет полуцелочисленное решение, которое находится в сильнополиномиальное время. В $ 2 результаты Окамуры и Сеймура о допустимых мультипотоках в плоских сетях обобщаются на более сложные случаи. Здесь также удается описать множество неразрезных препятствий и установить ограниченную дробность. Заключительный $ 3 посвящен критерию разрешимости и эффективному методу решения целочисленной двухпродуктовой задачи с единичными требованиями.

Результаты по данному разделу опубликованы в работах [2, 6, 15, 18, 21, 26, 27, 29, 39].

$ 1 Задача для общей сети

Прежде всего нам нужно кратко изложить, в пунктах 1.1 и 1.2, необходимые сведения и предшествующие результаты о ЗДМ (см. определение на с. 8).

1.1 Критерии разрешимости ЗДМ и ЗДМ(H). Вход ЗДМ (частная задача) определяется потоковой сетью $(G=(V,E),c)$, схемой $H=(T,U)$ и функцией требований d. Вначале будем допускать для c и d неотрицательные *вещественные* значения и продолжать их нулем на $\binom{V}{2}-E$ и $\binom{V}{2}-U$, получая эквивалентную задачу, где и граф сети, и схема — суть полный граф K_V. Тогда задача определяется тройкой (V,c,d), где $c,d:\binom{V}{2}\to\mathbf{R}_+$. Показывается, что задачи (V,c,d) и (V,c',d') эквивалентны, если $c-d=c'-d'$. Поэтому каждый вектор $\eta\in\mathbf{R}^{\binom{V}{2}}$ можно рассматривать как представитель класса эквивалентных задач (V,c,d), где $\eta=c-d$. Обозначим $\mathcal{S}_V$ множество представителей $\eta\in\mathbf{R}^{\binom{V}{2}}$ *разрешимых* задач. Ломоносов [Lom1] установил, что

(1.1) $\mathcal{S}_V$ — выпуклый замкнутый конус, полярный полуметрическому конусу $\mathcal{M}_V$.

[Для конуса $\mathcal{K}\subseteq\mathbf{R}^n$ *полярный конус* $\mathcal{K}^*$ — это $\{x\in\mathbf{R}^n : xy\ge 0\quad\forall y\in\mathcal{K}\}$.] В силу выпуклости и замкнутости, $(\mathcal{S}_V^*)^*=\mathcal{S}_V$, поэтому (1.1) дает следующий критерий разрешимости (первоначально указанный в [Iri,KO]): ЗДМ имеет решение т. и т.т., когда для любой полуметрики m на V выполняется

$$c \cdot m - d \cdot m \geq 0. \tag{1.2}$$

Достаточно требовать выполнения (1.2) для полуметрик $m \neq 0$, лежащих на крайних лучах (образующих) в $\mathcal{M}_V$, называемых *экстремальными* полуметриками, или *препятствиями* для разрешимости ЗДМ. Поскольку такие m можно рассматривать с точностью до нормировки, и каждая образующая в $\mathcal{M}_V$ содержит ненулевой целочисленный вектор, мы далее считаем, что экстремальная полуметрика — целочисленная и без общих делителей $\neq 1$ компонент. Например, экстремальными являются все разрезные полуметрики.

Множество препятствий уменьшается, если фиксировать схему $H = (T, U)$, т.е. рассматривать множество задач (V, c, d) с $\mathrm{supp}(d) \subseteq U$. Пусть $\mathcal{S}_V(H)$ — множество представителей $\eta \in \mathbf{R}^{\binom{V}{2}}$ соответствующих разрешимых задач. Тогда полярный конус $\mathcal{M}_V(H) := (\mathcal{S}_V(H))^*$ образован неотрицательными линейными комбинациями полуметрик в $\mathcal{M}_V$ и единичных базисных векторов для элементов $e \in \binom{V}{2} - U$. Следовательно, для разрешимости задачи достаточно выполнения (1.2) для экстремальных полуметрик m, лежащих на крайних лучах в $\mathcal{M}_V(H)$. Такие полуметрики m называются *H-экстремальными*; их множество на V обозначим $\mathcal{E}_V(H)$, а объединение по всем V — $\mathcal{E}(H)$.

Для выяснения H-экстремальности m применяют критерий (1.3). Обозначим $\mathcal{G}(H, m)$ множество геодезических $P = v_0 v_1 \ldots v_k$ для m с $v_0 v_k \in U$ (*H-геодезических*). Следующие свойства полуметрики $m \neq 0$ эквивалентны (см. [Pa,Lom1]):

(1.3) (i) m (с точностью до нормировки) является H-экстремальной;

(ii) множество $\mathcal{G}(H, m)$ максимальное по включению.

1.2 Разрезные случаи и дробность. Для разрезных полуметрик $m = \rho_V^X$ (1.2) эквивалентно известному *разрезному условию*:

$$c(\delta_G(X)) - d(\delta_H(X \cap T)) \geq 0 \qquad \text{для всех } X \subset V. \tag{1.4}$$

Теорема Папернова [Pa] характеризует множество схем H, для которых выполнение (1.4) достаточно для разрешимости ЗДМ (при всевозможных G, c, d), или, эквивалентно, $\mathcal{E}(H)$ содержит только разрезные полуметрики. Это имеет место т. и т.т., когда

$$H \simeq K_4 \quad \text{или} \quad H \simeq C_5 \quad \text{или} \quad H \in \mathcal{Z}_2, \tag{1.5}$$

где C_k — (простой) цикл на k вершинах, и $\mathcal{Z}_2$ — множество графов, представимых как объединение двух звезд (звезда — это граф, имеющий вершину, инцидентную всем ребрам). В частности, $H \in \mathcal{Z}_2$, если H — собственный подграф в K_4 или C_5.

Теперь вернемся к целочисленным c и d.

Определение. Пара (c, d) называется *эйлеровой*, если левая часть в (1.4) четна для всех $X \subset V$ (при $c \equiv 1$ и $d \equiv 1$ это соответствует эйлеровости графа $(V, E \cup U)$).

Достаточность в теореме Папернова была усилена следующим образом.

Теорема 1.1 [RW,Se4,Lom2] *Если $H \in \{K_4, C_5\} \cup \mathcal{Z}_2$, и (c,d) эйлерова, то при выполнении (1.4) задача имеет* <u>*целочисленное*</u> *решение.*

В частности, разрешимая задача имеет *полуцелочисленное* решение, если c и d просто целочисленные (так как $(2c, 2d)$ эйлерова), т.е. $\varphi(\text{ЗДМ}(H)) \le 2$. Целочисленное решение в условиях теоремы может быть найдено в сильнополиномиальное время [15].

С другой стороны Ломоносов [Lom2] установил:

(1.6) если H содержит три попарно несмежных ребра, то $\varphi(\text{ЗДМ}(H)) = \infty$.

Наши результаты будут относиться к оставшимся случаям H.

Утверждение 1.2 *Если H отличен от графов в (1.5),(1.6), то H — это (а) K_5 или его подграф, или (б) объединение K_3 и звезды, или (с) $K_3 + K_3$.*

Случаи (а) и (с) рассматриваются в пунктах 1.3 и 1.4, соответственно, а случай (б) сводится к случаю (а).

1.3 ЗДМ для схемы $H \simeq K_5$. Исследование этого случая проведено в [15] и идет в следующей последовательности. Вначале выясняется множество препятствий, или K_5-экстремальных полуметрик. Затем, опираясь на знание препятствий, устанавливается существование целочисленного решения в эйлеровом случае, что влечет $\varphi(\text{ЗДМ}(K_5)) = 2$. Наконец, идея доказательства целочисленности развивается для создания эффективного алгоритма нахождения такого решения.

Итак, пусть $H = (T, U) \simeq K_5$. Упорядоченное разбиение (T', T'') множества T при $|T'| = 2$ и $|T''| = 3$ назовем (2,3)-*разбиением.* Свяжем с ним метрику $\mu = \mu_{T',T''}$ полного двудольного графа $K_{T',T''} \simeq K_{2,3}$ с долями T', T'', т.е. $\mu(st) = 1$ при $s \in T', t \in T''$, и $\mu(st) = 2$ при $s \neq t$ и либо $s,t \in T'$, либо $s,t \in T''$. Мы называем 0-расширение μ на множество $V \supseteq T$ (2,3)-*полуметрикой, согласованной с* (T', T'').

Теорема 1.3 *Для $H = (T,U) \simeq K_5$ множеством H-экстремальных полуметрик на $V \supseteq T$ является $\mathcal{C}_{V,T} \cup \mathcal{M}^{2,3}_{V,T}$, где $\mathcal{C}_{V,T}$ — множество разрезных полуметрик на V, разделяющих T, и $\mathcal{M}^{2,3}_{V,T}$ — множество (2,3)-полуметрик на V, согласованных с (2,3)-разбиениями T.*

Следствие 1.4 (критерий разрешимости ЗДМ(K_5)). *Для $H \simeq K_5$ задача имеет решение т. и т. т., когда (1.2) выполняется для всех разрезных и (2,3)-полуметрик m.*

Доказательство теоремы 1.3 опирается на критерий (1.3) и состоит из двух частей. Пусть $m \neq 0$ — полуметрика на V. Сначала доказывается, что либо $\mathcal{G}(H,m) \subseteq \mathcal{G}(H,m')$ для некоторой разрезной метрики m', либо m является расширением метрики $\alpha\mu_{T',T''}$ для некоторого (2,3)-разбиения (T', T'') множества T и числа $\alpha > 0$. Во второй части доказывается

Лемма 1.5 *Пусть $m \in \mathcal{M}_V$ — расширение $\mu_{T',T''}$. Тогда $\mathcal{G}(H,m) \subseteq \mathcal{G}(H,m')$ для некоторого 0-расширения m' метрики $\mu_{T',T''}$ на множество V.*

[Требуемое m' строится следующим образом. Пусть $T' = \{s_1, s_2\}$ и $T'' = \{t_1, t_2, t_3\}$. Определим 5 подмножеств в V:

$$(1.7)\quad X_1 := \{s_1\}; \qquad Y_i := I(s_1, t_i) - X_1,\ \ i = 1,2,3; \qquad X_2 := V - (X_1 \cup Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3);$$

где $I(s,t)$ — множество точек $x \in V$, лежащих на геодезических для m, соединяющих полюса s и t (*интервал* между s и t). Показывается, что $s_i \in X_i$ и $t_j \in Y_j$, $i = 1,2,\ j = 1,2,3$, и что множества в (1.7) дают разбиение V. Индуцируемая этим разбиением полуметрика и есть требуемое m'.]

Замечание 1.6 Из леммы 1.5 выводится свойство *минимизируемости* метрики $\mu = \mathrm{dist}^{K_{2,3}}$, т.е. $\min\{c \cdot m : m \in \mathrm{Ext}(\mu, V)\} = \min\{c \cdot m : m \in \mathrm{Ext}^0(\mu, V)\}$ для любых $V \supseteq T$ и $c : \binom{V}{2} \to \mathbf{R}_+$. Такое свойство будет исследоваться в разделе V; им обладает широкий класс метрик μ. Отметим также, что конструкция разбиения в (1.7) и лемма 1.5 даются в [15] сразу для расширений метрики $\mathrm{dist}^{K_{2,r}}$ при произвольном r.

Далее теорема 1.3 применяется для получения результата о дробности.

Теорема 1.7 *Пусть $H \simeq K_5$, пара (c,d) эйлерова, и ЗДМ для G, H, c, d имеет решение. Тогда задача имеет <u>целочисленное</u> решение. Таким образом, $\varphi(\text{ЗДМ}(K_5)) = 2$.*

Доказательство следует из существования *вилочной декомпозиции* сети. Идея вилочной декомпозиции будет применяется и в ряде других доказательств теорем о дробности мультипотоков и алгоритмах в последующем тексте. Объясним идею для нашего случая. Тройка $\tau = (u, v, u')$ называется *вилкой* в вершине v, если $u = vx$ и $u' = vy$ — инцидентные ей ребра, и $c(\tau) := \min\{c(xv), c(vy)\} > 0$. Можно считать, что $G = K_V$. Операция *отсоединения* τ *с весом* α, где $0 \le \alpha \le c(\tau)$, состоит в уменьшении на α пропускных способностей ребер u, u' и увеличении на α пропускной способности ребра xy. Формально: c преобразуется в $c' := c - \alpha\Delta_\tau$, где

$$(1.8)\qquad \Delta_\tau(e) := \begin{cases} 1 & \text{для } e = u, u', \\ -1 & \text{для } e = xy, \\ 0 & \text{для остальных ребер } e. \end{cases}$$

Скажем, что α *допустимое*, если задача для (c', d) имеет решение. Если $\alpha = 1$ допустимое, то результат следует по индукции, так как в этом случае $c'(E) = c(E) - 1$, пара (c', d) эйлерова, и целочисленное решение для (c', d) легко перестраивается в решение для (c, d). Пусть $\overline{\alpha}(\tau)$ — максимальное допустимое α; очевидно, любое α в интервале $[0, \overline{\alpha}(\tau)]$ допустимое.

Показывается, что если $\overline{\alpha}(\tau) = 0$ для каждой вилки τ, то $c(st) \ge d(st)$ для всех $st \in \binom{T}{2}$. В этом случае целочисленное решение строится очевидным образом. В предположении противного наша цель — показать наличие вилки τ с $\overline{\alpha}(\tau) \ge 1$, что докажет теорему согласно аргументу выше. Для этого используется знание множества препятствий $\mathcal{E}_V(H)$. При $0 < \overline{\alpha}(\tau) < c(\tau)$ невозможность отсоединение τ с большим весом, чем $\overline{\alpha}(\tau)$, означает существование препятствия m такого, что $\Delta_\tau \cdot m > 0$ и $c' \cdot m = d \cdot m$, где $c' := c - \overline{\alpha}(\tau)\Delta_\tau$. Следовательно, $\overline{\alpha}(\tau)$ определяется как

$$(1.9)\qquad \overline{\alpha}(\tau) := \min\{c(\tau), \min\{(c \cdot m - d \cdot m)/(\Delta_\tau \cdot m) : m \in \mathcal{E}_V(H),\ \Delta_\tau \cdot m > 0\}\}.$$

По теореме 1.3 $\mathcal{E}_V(H) = \mathcal{C}_{V,T} \cup \mathcal{M}^{2,3}_{V,T}$. Никакая разрезная метрика m не препятствует отсоединению τ с весом 1, так как $c \cdot m - d \cdot m$ — четное число ≥ 2, а $\Delta_\tau \cdot m \leq 2$. Ключевое место доказательства теоремы 1.7 состоит в предъявлении τ такого, что $c \cdot m - d \cdot m \geq \Delta_\tau \cdot m$ для всех $m \in \mathcal{M}^{2,3}_{V,T}$.

Идея вилочной декомпозиции развивается в эффективном алгоритме построения целочисленного решения в эйлеровом случае. Вначале проверяется разрешимость для исходного (c, d). Далее на каждой итерации выбирается очередная вилка τ, находится число $\overline{\alpha}(\tau)$, и текущая функция c преобразуется как $c := c - \lfloor \overline{\alpha}(\tau)\Delta_\tau \rfloor$. По завершении процесса декомпозиции требуемый целочисленный мультипоток в исходной сети строится при последовательном присоединении вилок в обратном порядке. Ввиду (1.9), определение $\overline{\alpha}(\tau)$ сводится к нахождению $O(1)$ минимальных разрезов и $O(1)$ минимальных (2,3)-полуметрик, и аналогично проверяется разрешимость для исходного (c, d). Здесь задача о минимальном разрезе решается для каждого разбиения (T', T'') множества T: минимизируется $c(\delta_G(X))$ среди $X \subset V$ таких, что $X \cap T = T'$ и $x, y \in X \ni v$ (заметим, что $d(\delta_H(X \cap T))$ — константа). Аналогично, для (2,3)-разбиений (T', T'') нужно минимизировать $c \cdot m$ среди соответствующих (2,3)-полуметрик m на V, согласованных с (T', T''). Ввиду замечания 1.6, последнее сводится к линейной программе ЗМР (см. определение на с. 12), решаемой в сильнополиномиальное время с помощью усиленной версии [Ta] метода эллипсоидов.

Теорема 1.8 *Алгоритм находит целочисленное решение ЗДМ(K_5) для эйлеровой (c, d) за время $O(|V|^3(\eta_{|V|} + \eta'_{|V|}))$, где η_n и η'_n — оценки времени нахождения минимального разреза и минимального расширения $\mathrm{dist}^{K_{2,3}}$ в сети с n вершинами, соответственно.*

Замечание. В [39] задача о минимальном 0-расширениями метрики $\mathrm{dist}^{K_{2,r}}$ решается в полиномиальное (хотя и не сильнополиномиальное) время "чисто комбинаторным" алгоритмом.

Полученные результаты переносятся на ЗДМ(H), где $H = (T, U)$ — объединение треугольника $K_{T''}$ ($|T''| = 3$) и звезды Z (случай (б) в утверждении 1.2). А именно, пусть Z имеет ребра $pq_1, \ldots, pq_k$. Тогда задача для G, H, c, d сводится к задаче для $\overline{G}, \overline{H}, \overline{c}, \overline{d}$, где сеть $(\overline{G}, \overline{c})$ получается из (G, c) добавлением вершины p' и ребер $p'q_i$ пропускной способности $d(pq_i)$, и схема $\overline{H}$ получается из H заменой Z одним ребром pp' с требованием $d(pq_1) + \ldots + d(pq_k)$. Заметим, что $\overline{H}$ — подграф K_5. Кроме того, если (c, d) эйлерова, то $(\overline{c}, \overline{d})$ — тоже эйлерова. Это сведение к ЗДМ(K_5) дает следующий результат (см. [15]).

Теорема 1.9 *Пусть H — объединение K_3 и звезды. Тогда H-экстремальными являются только разрезные и (2,3)-полуметрики. Если ЗДМ для G, H, c, d разрешимая, и пара (c, d) эйлерова, то задача имеет <u>целочисленное</u> решение, и такое решение находится в сильнополиномиальное время.*

Замечание 1.10 Свяжем с G, H множество $X(G, H) \subset \mathbf{R}^E \times \mathbf{R}^U$, состоящее из векторов $(\chi^P, \epsilon^U_{st})$ для простых путей $P \in \mathcal{P}_{st}(G)$, $st \in U$, и векторов $(\epsilon^E_e, 0)$ для $e \in E$, где χ^P — характеристический вектор в $\mathbf{R}^E$ (реберного множества) пути P, и ϵ^A_q обозначает единичный базисный вектор (орт) элемента $q \in A$ в $\mathbf{R}^A$. Тогда теорема 1.7 и вторая часть в теореме 1.9 равносильны следующему: если H есть K_5 или объединение K_3 и звезды, то для любого G множество $X(G, H)$ образует Гильбертов базис (см. определение во Введении).

1.4 ЗДМ для схемы $H \simeq K_3 + K_3$. Теоремы 1.3 и 1.9 вместе с теоремой Папернова полностью описывают множество схем H, для которых препятствиями в ЗДМ(H) могут быть только разрезные и (2,3)-полуметрики — 0-расширения простейших примитивных метрик dist^{K_2} и $\mathrm{dist}^{K_{2,3}}$. [Определение примитивных метрик и результаты о них будут даны в разделе V.] В случае $H \simeq K_3 + K_3$ множество препятствий устроено более сложно, тем не менее все еще остается справедливым свойство: каждая H-экстремальная полуметрика является 0-расширением метрики из некоторого *конечного* множества $\Pi(H)$. В этом смысле $K_3 + K_3$ — последний "хороший" случай схемы: $\Pi(H)$ становится бесконечным для всех оставшихся схем H, т.е. содержащих паросочетание из трех ребер (согласно (1.6) для тех же H имеет место неограниченная дробность ЗДМ(H)).

Описание множества препятствий для ЗДМ($K_3 + K_3$) следует из результатов в [18]. Мы используем сведение к задаче о максимальном мультипотоке с аналогичной схемой. Пусть $T = \{t_1, \dots, t_6\}$ и $H = (T, U) = K_{T'} + K_{T''}$, где $T' = \{t_1, t_2, t_3\}$ и $T'' = \{t_4, t_5, t_6\}$. ЗДМ для G, H, c, d сводится к ЗММ для $\overline{G}, \overline{H}, \overline{c}$, определяемых следующим образом. $\overline{G}$ получается из G добавлением вершин s_i и ребер $e_i = s_i t_i$ для $i = 1, \dots, 6$; пропускная способность $\overline{c}(e_i)$ равна сумме требований $d(t_i t_j) + d(t_i t_k)$ для $t_i t_j, t_i t_k \in U$. Схема $\overline{H} = (\overline{T}, \overline{U})$ порождена парами $s_i s_j$ такими, что $t_i t_j \in U$; тогда $\overline{H} \simeq K_3 + K_3$.

Пусть $\overline{f} : \mathcal{P}(\overline{G}, \overline{H}) \to \mathbf{R}_+$ — максимальный поток для $\overline{G}, \overline{H}, \overline{c}$. Он порождает мультипоток f для G, H, c естественным образом, и справедливо

$$v_{ij} + v_{ik} \le \overline{c}(e_i) = d(t_i t_j) + d(t_i t_k), \qquad \{i, j, k\} \in \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}\}, \tag{1.10}$$

где v_{pq} обозначает $\mathrm{val}(f_{t_p t_q})$. Возможны два случая.

(а) Все ребра e_i насыщены, т.е. каждое из 6 неравенств в (1.10) обращается в равенство. Эта система равенств дает $v_{ij} = d(t_i t_j)$ для всех $t_i t_j \in U$, т.е. f — решение ЗДМ для G, H, c, d.

(б) Некоторое неравенство в (1.10) — строгое. Тогда ЗДМ для G, H, c, d не имеет решения. Более того, полуметрика m, нарушающая (1.2), определяется как ограничение на V оптимального двойственного решения ЗММ для $\overline{G}, \overline{H}, \overline{c}$. Для схемы $\overline{H} \simeq K_3 + K_3$ и любой сети $(\overline{G}, \overline{c})$ ЗММ имеет оптимальное двойственное решение, являющееся (с точностью до множителя) 0-расширением подметрики метрики специального графа Γ; это частный случай общего результата в [18] (см. \$ 3 в разделе II). В нашем случае

(1.11) Γ получается из $K_{3,3}$ заменой каждого ребра $e = xy$ парой последовательных ребер $xz_e, z_e y$, добавлением вершины w и соединением w ребрами со всеми z_e.

Теорема 1.11 *Пусть $H \simeq K_3 + K_3$. Тогда каждая H-экстремальная полуметрика является 0-расширением некоторой подметрики метрики графа Γ в (1.11).*

В частности, значения каждой H-экстремальной полуметрики m не превосходят 4. Вопрос о дробности φ для ЗДМ($K_3 + K_3$) остается открытым; показывается, что $\varphi \ge 4$, и высказана гипотеза, что $\varphi = 4$. Для оставшихся схем следующий результат говорит о "плохой структуре" множества препятствий (см. [15, 18]).

Утверждение 1.12 *Для каждой схемы H, содержащей три попарно несмежных ребра, множество значений H-экстремальных полуметрик не ограничено сверху.*

$ 2 Задача для плоских сетей

Часто рассматривают случаи ЗДМ, когда не только схема $H = (T, U)$, но и граф сети $G = (V, E)$ имеет специальный вид (см., например, обзоры [Sch3,Fr]). Пусть ЗДМ(G, H) обозначает множество частных задач с фиксированными G, H и произвольными c, d. Те полуметрики, которые присутствуют в минимальном наборе H-экстремальных полуметрик, удостоверяющих разрешимость задач в ЗДМ(G, H) через выполнение неравенств (1.2), называются (G, H)-*экстремальными*, или препятствиями для ЗДМ(G, H). Они имеют максимальные множества $\mathcal{G}(G, H, m)$ H-геодезических, являющихся путями в G, и при этом имеют максимальные 0-множества $Z(m) := \{xy \in \binom{V}{2} : m(xy) = 0\}$.

ЗДМ популярна для планарных графов. Сеймур [Se7] доказал разрезность всех препятствий и существование целочисленного решение для эйлеровых (c, d) в случае планарности $G \cup H$. Аналогичные результаты были получены для случая, когда все пары "источник–сток" принадлежат не более двум выделенным граням плоского графа G. В этом параграфе мы представляем результаты для большего числа выделенных граней.

В рассматриваемой постановке $G = (V, E)$ — планарный граф с фиксированной укладкой на плоскость (*плоский граф*). Обозначим $\mathcal{F}_G$ множество граней в G (рассматриваемых вместе с границей), и $V(F)$ — множество вершин G, принадлежащих грани F. Пусть выделено подмножество $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}_G$ граней, называемых *отверстиями*. Все вершины на отверстиях считаются полюсами, а ребрами потоковой схемы $H = (T, U) =: H_{\mathcal{H}}$ считаются такие пары st, что оба s, t принадлежат одному и тому же отверстию, т.е. H — объединение полных графов $K_{V(F)}$, $F \in \mathcal{H}$ (заметим, что H может быть непланарным). Положим $k := |\mathcal{H}|$. Окамура [Ok] доказала следующее: если $k \leq 2$, то ЗДМ разрешима при выполнении разрезного условия (1.4), и разрешимая задача с эйлеровой (c, d) имеет целочисленное решение (это обобщает результат Окамуры и Сеймура для $k = 1$).

Мы описываем множества препятствий и определяем дробность задачи для случаев $k = 3$ (пункт 1.5) и $k = 4$ (пункт 1.6). При $k = 3$ критерий разрешимости уже не сводится к выполнению разрезного условия и вовлекает (2,3)-полуметрики, а при $k = 4$ добавляется еще одна серия препятствий. Оказывается, при $k \leq 4$ все препятствия индуцируются планарными графами с числом граней, не превосходящим k. При $k = 5$ (или больше) возникают планарные препятствия с как угодно большим числом граней.

Препятствия будут иметь топологическую связь с G. Более точно, будем считать G связным и уложенным на сферу $\mathbf{S}^2$. Скажем, что уложенный на $\mathbf{S}^2$ граф Γ получен *правильной деформацией* G, если есть непрерывное отображение $\gamma : \mathbf{S}^2 \to \mathbf{S}^2$, при котором:

(1.12) (i) прообраз $\gamma^{-1}(x)$ каждой точки $x \in \mathbf{S}^2$ — непустое односвязное множество (т.е. множества $\gamma^{-1}(x)$ и $\gamma^{-1}(\mathbf{S}^2 - x)$ связные), и множество $\gamma^{-1}(x) \cap F$ связное для каждой грани $F \in \mathcal{F}_G$;

(ii) каждая вершина G отображается в вершину Γ, каждое ребро G (рассматриваемое как соответствующая кривая) отображается в простой путь в Γ, и Γ — образ G.

Это индуцирует полуметрику m на V с расстояниями $m(xy) := \mathrm{dist}^{\Gamma}(\gamma(x)\gamma(y))$. Для $k = 3, 4$ каждое препятствие m будет индуцироваться правильной деформацией $G \to \Gamma$, при которой каждая грань Γ является образом некоторого отверстия в G; в частности $|\mathcal{F}_{\Gamma}| \leq |\mathcal{H}|$. В этом случае мы говорим, что m *согласована* с $(G,\mathcal{H})$. Например, правильная деформация $G \to K_2$ индуцирует разрезную полуметрику ρ^X, для которой разрез $\delta_G(X)$ пересекает границу каждой грани в G не более двух раз, и пересекает границу хотя бы одного отверстия, если ρ^X согласована с $(G,\mathcal{H})$.

1.5 ЗДМ для плоской сети с тремя отверстиями. Для рассматриваемого в этом пункте случая $|\mathcal{H}|=3$ результаты о препятствиях получены в [26], а результаты о дробности ЗДМ — в [27]. В основе лежит наблюдение, что $K_{2,3}$ является плоским графом с тремя отверстиями и имеет экстремальную метрику. Поэтому для простейшего случая $G \simeq K_{2,3}$ одним из препятствий для разрешимости в ЗДМ$(G,H_{\mathcal{H}})$ служит метрика самого G. Это инспирирует появление в качестве препятствий для общего случая G (2,3)-полуметрик, согласованных с $(G,\mathcal{H})$, т.е. индуцированных правильными деформациями $G \to K_{2,3}$, переводящими каждое из трех отверстий в грань $K_{2,3}$. Первая теорема утверждает отсутствие других неразрезных препятствий.

Теорема 1.13 *Пусть $G=(V,E)$ — плоский граф, $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}_G$, и $|\mathcal{H}|=3$. Пусть $\mathcal{C}(G,\mathcal{H})$ и $\mathcal{M}^{2,3}(G,\mathcal{H})$ обозначают, соответственно, множества разрезных и (2,3)-полуметрик, согласованных с $(G,\mathcal{H})$. Тогда для любой полуметрики m на V существует полуметрика $m' \in \mathcal{C}(G,\mathcal{H}) \cup \mathcal{M}^{2,3}(G,\mathcal{H})$ такая, что $\mathcal{G}(G,H_{\mathcal{H}},m) \subseteq \mathcal{G}(G,H_{\mathcal{H}},m')$ и $Z(m) \subseteq Z(m')$. Таким образом, каждая $(G,H_{\mathcal{H}})$-экстремальная полуметрика m является разрезной или (2,3)-полуметрикой, согласованной с $(G,\mathcal{H})$.*

[В частности, $K_{2,3}$ — единственный планарный граф с тремя гранями, имеющий экстремальную метрику.] Аналогично структуре доказательств для $H \simeq K_5$ в пункте 1.3, знание препятствий существенно используется при доказательстве теоремы о дробности ЗДМ для нашего случая. Обобщая теорему Окамуры, мы показываем следующее (см. [27]).

Теорема 1.14 *Пусть $|\mathcal{H}|=3$, пара (c,d) эйлерова, и ЗДМ для $G,H_{\mathcal{H}},c,d$ разрешима. Тогда задача имеет <u>целочисленное</u> решение. Следовательно, $\varphi(\text{ЗДМ}(G,H_{\mathcal{H}})) \le 2$.*

Кратко поясним идею доказательства. Введением параллельных ребер и заменой звезд вершин определенными плоскими подграфами граф G приводится к виду, когда каждый полюс имеет степень 1, каждая неполюсная вершина имеет степень 2 или 4, а все требования и пропускные способности равны 1. Как и в доказательстве теоремы 1.7, мы применяем метод отсоединения вилок. Однако сейчас при выборе вилок нужно заботиться о сохранении планарности. С этой целью рассматриваются только *плоские вилки* — тройки $\tau=(u,v,u')$, где v — вершина степени 4, а $u=vx$, $u'=vy$ — соседние ребра в укладке G, инцидентные v. Операция отсоединения τ состоит в удалении ребер u,u' и добавлении нового ребра между x и y с пропускной способностью 1. В результате сохраняется планарность и эйлеровость, и число вершин степени 4 уменьшается (некоторое отверстие может расшириться, или два отверстия могут слиться в одно). Для выбранной вилки операция производится, если вилка *допустимая*, т.е. задача для возникающего графа все еще имеет решение; допустимость вилки равносильна выполнению соответствующих неравенств для препятствий относительно новой сети. Если граф становится несвязным, то далее рассматриваются задачи для каждой компоненты.

Структурно-топологические свойства препятствий, указанных в теореме 1.13, позволяют доказать (ключевое место), что при отсутствии допустимых вилок для связного графа G выполняются следующие свойства: (i) имеются три непересекающихся замкнутых региона D_0, D_1, D_2 в $\mathbf{S}^2$, ограниченные простыми циклами C_0, C_1, C_2 в G; (ii) каждый регион D_i содержит ровно одно отверстие $F_i \in \mathcal{H}$; и (iii) вне этих регионов лежат ровно три ребра $e_i = x_{i+1}y_{i-1}$ $(i = 0, 1, 2)$ графа G, причем $x_i, y_i \in C_i$ (индексы берутся по модулю 3). Выбрасывая из G ребра e_0, e_1, e_2 и добавляя к схеме $H_\mathcal{H}$ ребра x_iy_i с требованиями 1, получаем задачу, распадающуюся на три отдельные задачи на графах $G_i := G \cap D_i$. В i-й задаче ребра схемы лежат на двух гранях (F_i и $\mathbf{S}^2 - (D_i - C_i)$), и имеет место эйлеровость. Для нее показывается соблюдение разрезного условия. Следовательно, по теореме Окамуры каждая из трех задач имеет целочисленное решение. Их комбинация дает целочисленное решение для $(G, \mathcal{H})$, что и требуется.

Доказательство преобразуется в алгоритм нахождения целочисленного решения для эйлеровых (c, d) или полуцелочисленного решения для целочисленных c, d. Базовый случай — $c \equiv 1$. Свойство согласованности препятствий с $(G, \mathcal{H})$ дает возможность свести проверку разрешимости исходной задачи и допустимости вилки к нахождению $O(|T|^3)$ минимальных разрезов и (2,3)-метрик. Поэтому базовый случай решается за полиномиальное время. Для общего случая алгоритм имеет псевдополиномиальную временную оценку.

1.6 ЗДМ для плоской сети с четырьмя отверстиями. Идеи и методы, выработанные для предыдущего случая, развиваются для анализа случая $|\mathcal{H}| = 4$ в [26, 29]. Множество препятствий для ЗДМ в этом случае расширяется, хотя все еще поддается обозрению. Пусть $\mathcal{C}(G, \mathcal{H})$ и $\mathcal{M}^{2,3}(G, \mathcal{H})$ — множества, аналогичные указанным в теореме 1.13 (теперь при деформации $G \to K_{2,3}$ прообразами граней $K_{2,3}$ являются три из четырех отверстий G). Виды препятствий выявляет следующая теорема (см. [26]). Здесь $\Psi_4(G, \mathcal{H})$ обозначает множество полуметрик на V, согласованных с $(G, \mathcal{H})$, которые индуцируются правильными деформациями $G \to \Gamma$ для плоских графов Γ с $|\mathcal{F}_\Gamma| = 4$ (т.е. отверстия G соответствуют граням Γ); такие m называются 4F-*полуметриками*, согласованными с $(G, \mathcal{H})$.

Теорема 1.15 *Пусть $G = (V, E)$ — плоский граф, $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}_G$, и $|\mathcal{H}| = 4$. Тогда для любой полуметрики m на V существует полуметрика $m' \in \mathcal{C}(G, \mathcal{H}) \cup \mathcal{M}^{2,3}(G, \mathcal{H}) \cup \Psi_4(G, \mathcal{H})$ такая, что $\mathcal{G}(G, H_\mathcal{H}, m) \subseteq \mathcal{G}(G, H_\mathcal{H}, m')$ и $Z(m) \subseteq Z(m')$. Таким образом, каждая $(G, H_\mathcal{H})$-экстремальная полуметрика m является разрезной, (2,3)- или 4F-полуметрикой, согласованной с $(G, \mathcal{H})$.*

Отметим, что даже множество плоских графов Γ с четырьми гранями, чьи метрики являются экстремальными относительно самих Γ и $\mathcal{F}_\Gamma$, оказывается бесконечным. В [29] устанавливаются дополнительные необходимые условия на согласованные 4F-полуметрики m, чтобы они были препятствиями для ЗДМ$(G, H_\mathcal{H})$. В частности, значения m на ребрах G не превышают 4 (что важно для доказательства последующего результата о дробности). Свойство существования целочисленного решения ЗДМ в эйлеровом случае при $|\mathcal{H}| \leq 3$ уже не обязано выполняться при $|\mathcal{H}| = 4$, что подтверждается примерами. Тем не менее все еще сохраняется ограниченная дробность. Мы показываем следующее (см. [29]).

Теорема 1.16 *Пусть $|\mathcal{H}| = 4$, пара (c,d) эйлерова, и ЗДМ для $G, H_{\mathcal{H}}, c, d$ разрешима. Тогда задача имеет полуцелочисленное решение. Следовательно, $\varphi(\text{ЗДМ}(G, H_{\mathcal{H}})) \le 4$.*

Доказательство этой теоремы (весьма длинное) базируется на комбинаторно-топологическом анализе определенных конфигураций $(G, \mathcal{H})$, возникающих после ряда упрощений, начинающихся со сведения к случаю, когда $c \equiv 1$ и отсутствуют допустимые плоские вилки. Центральным местом является доказательство возможности редуцирования к двум разрешимым задачам $(G_i, \mathcal{H}_i, c_i, d_i)$, $i = 1, 2$, для которых $|\mathcal{H}_i| \le 3$, функции c_i, d_i принимают полуцелые значения, и пара $(2c_i, 2d_i)$ эйлерова. Тогда по теореме 1.14 обе вспомогательные задачи имеют полуцелочисленные решения. Комбинация этих решений дает требуемое полуцелочисленное решение для основной задачи.

Возникает естественный вопрос, насколько сложным становится множество препятствий при дальнейшем увеличении числа отверстий. Уже при $|\mathcal{H}| = 5$ оно едва ли допускает хорошее комбинаторное описание, учитывая следующее (см. [26]).

Утверждение 1.17 *Для любого натурального k существуют плоский граф G и подмножество $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}_G$ такие, что $|\mathcal{F}_G| \ge k$, $|\mathcal{H}| = 5$, метрика dist^G является $(G, H_{\mathcal{H}})$-экстремальной, и имеется $(G, H_{\mathcal{H}})$-экстремальная полуметрика m, принимающая значение $m(e) \ge k$ на некотором ребре e в G.*

$ 3 Задача о двух путях

ЗДМ со схемой $H \simeq K_2 + K_2$ называют задачей о допустимом *двухпродуктовом потоке.* Обобщая теорему Ху, Ротшильд и Уинстон [RW] показали, что для эйлеровой пары (c,d) задача имеет целочисленное решение при выполнении разрезного условия (1.4) (частный случай теоремы 1.1); такое решение строится эффективно. Однако в неэйлеровом случае задача о целочисленном двухпродуктовом потоке становится труднорешаемой даже при $c \equiv 1$. А именно, следующая задача является NP-полной [EIS]:

(1.13) Для графа $G = (V, E)$, различных вершин (полюсов) $s_1, t_1, s_2, t_2 \in V$ и чисел $k, r \in \mathbf{Z}_+$ выяснить существование в G k путей между s_1 и t_1 и r путей между s_2 и t_2, множества ребер которых попарно не пересекаются.

При единичных требованиях ($k = r = 1$) (1.13) превращается в задачу о двух не пересекающихся по ребрам путей, соединяющих предписанные пары вершин. Для этой *задачи о двух путях* уже удается установить комбинаторный критерий разрешимости и предложить эффективный алгоритм. Оказывается, что за пределами тривиальных случаев существование путей связано с отсутствием определенных планарных конфигураций (играющих роль "препятствий" для данной задачи). Дадим краткое изложение этих результатов в [6].

Положим $T_i := \{s_i, t_i\}$ $(i = 1, 2)$ и $T := T_1 \cup T_2$, и для подмножества $X \subset V$ определим $q(X) := |\delta_G(X)|$ и $\Delta(X) := \Delta_1(X) + \Delta_2(X)$, где $\Delta_i(X) := \rho^X(s_i t_i)$. Можно считать, что G связен, и выполняется разрезное условие: $q(X) \ge \Delta(X)$ для всех X (иначе решения нет). Будем также считать, что G не имеет мостов (иначе либо нет решения, либо очевидна редукция G). Далее производится последовательность простых редукций, указанных в (i),(ii).

(i) Предположим, G имеет вершину сочленения v, т.е. является объединением графов G_1, G_2 таких, что $G_1 \cap G_2 = \{v\}$. Если некоторый G_i содержит не более одного полюса, отличного от v, то производим стягивание G_1 в v, что дает эквивалентную задачу.

(ii) Если есть $X \subset V$ такое, что $|X| \geq 2$, $q(X) = 2$ и $|X \cap T| = 1$, то стянем X в одну вершину. (Это уменьшает число вершин и дает эквивалентную задачу, так как через $\delta(X)$ может пройти не более одного из искомых путей.) Аналогично, если есть $X \subset V$ такое, что $|X| \geq 2$, $q(X) \leq 3$ и $X \cap T = \emptyset$, то стянем X в одну вершину.

Теорема 1.18 *Пусть G не содержит мостов, и редукции в (i),(ii) неприменимы. В G не существует двух не пересекающихся по ребрам путей, из s_1 в t_1 и из s_2 в t_2, т. и т. т., когда граф G плоский, все неполюсные вершины имеют степень 3, а все полюса имеют степень 2 и лежат на границе одной грани в порядке s_1, s_2, t_1, t_2.*

Несуществование решения при наличии такой плоской конфигурации достаточно очевидно: как бы мы ни пытались провести путь из s_1 в t_1, удаление его ребер разрежет данный плоский квазикубический граф на компоненты так, что s_2 и t_2 окажутся в разных компонентах. Суть состоит в доказательстве обратного утверждения: если G не имеет указанного вида, то требуемые пути существуют.

Выделение мостов, блоков (2-связных компонент), редукции (i),(ii), проверка планарности и др. осуществляются при помощи хорошо известных эффективных процедур. В [6] доказательство существования требуемых путей в теореме 1.18 проводится конструктивными средствами и основано на последовательной реконструкции графа G, начиная с цикла, содержащего полюса, путем присоединения хордовых путей. В результате все доказательство переделывается в полиномиальный алгоритм для задачи о двух путях.

Замечание. Критерий разрешимости задачи о двух путях был независимо найден Сеймуром [Se5] и Томассеном [Th] в следующем виде: при выполнении разрезного условия требуемой пары путей не существует т. и т. т., когда при стягивании некоторых ребер в G возникающий граф G' плоский, и все его вершины имеют степень 3, кроме полюсов s_1, s_2, t_1, t_2, которые имеют степень 2 и лежат в указанном порядке на границе одной грани. Эта более компактная формулировка (избегающая явных редукций) может быть легко получена из представленной выше. Отметим также, что в выдающейся серии работ, посвященных доказательству гипотезы Вагнера о минорах графа, Робертсон и Сеймур одновременно показывают существование эффективного метода для задачи о гомеоморфном вложении фиксированного мультиграфа в произвольные графы. Как следствие, для фиксированных k, r задача (1.13) может быть решена в полиномиальное время (с большой константой, зависящей от k, r). Это однако не приводит к наглядному комбинаторному критерию даже для задачи о двух путях.

II. Задача о максимальном мультипотоке (ЗММ) и смежные задачи

Раздел II посвящен задаче о максимальном мультипотоке (см. с. 8), ее двойственной задаче (ЗММ*) и некоторым близким задачам. В работах Ху, Ловаса и Черкасского исследовались структурные и алгоритмические свойства ЗММ и ЗММ* для нескольких случаев потоковых схем. Обобщая результаты этих работ, мы даем полное описание класса т.н. *разрезно-обусловленных* схем (*РО-схем*), которые характеризуются наличием оптимальных двойственных решений, выражающихся неотрицательными линейными комбинациями разрезных полуметрик. Класс этих схем оказывается весьма представительным, и для него показывается существование максимальных полу- или четвертьцелочисленных максимальных мультипотоков и разрабатываются эффективные комбинаторные методы их нахождения. К числу других основных результатов относится ответ на вопрос, для каких схем гарантируется оптимальное двойственное решение ограниченной дробности. Более того, мы устанавливаем точное значение дробности ЗММ*(H) для всех схем H.

В параграфе 1 излагаются основные результаты для РО-схем. В $ 2 обсуждается связь ЗММ для РО-схем с задачей о свободном мультипотоке, запирающем определенные минимальное разрезы, с метрической мультипотоковой задачей и с задачей максимизации на пересечении двух бисубмодулярных многогранников (обобщениях полиматроидов). В $ 3 объясняется соотношение между дробностями прямой и двойственной задач, и устанавливаются значения дробности последней. Здесь также завершается описание класса схем, для которых гарантировано существование полуцелочисленного максимального мультипотока.

Результаты опубликованы в работах [1, 2, 3, 5, 9, 10, 16, 17, 18, 21, 22, 30, 32, 36].

$ 1 ЗММ с разрезно-обусловленными схемами

Пусть $\nu(G,H,c)$ обозначает максимальную мощность $\mathrm{val}(f)$ мультипотока f для сети $(G=(V,E),c)$ и схемы $H=(T,U)$. Прежде чем ввести понятие разрезно-обусловленной схемы, рассмотрим двойственную задачу и связанные с ней объекты.

2.1 Двойственность и $(H,1)$-экстремальные полуметрики. ЗММ для G,H,c является задачей линейного программирования, и ее формальная двойственная задача состоит в минимизации $c\cdot\ell$ среди функций $\ell: E\to\mathbf{R}_+$, удовлетворяющих $\ell(P)\ge 1$ для всех путей $P\in\mathcal{P}(G,H)$. Последняя преобразуется к следующему виду:

(2.1) *Минимизировать $c\cdot m$ среди $m\in\mathcal{M}_V$ таких, что $m(st)=1$ для всех $st\in U$.*

Минимум $c\cdot m$ равен $\nu(G,H,c)$. Задача (2.1) и расматривается как двойственная к ЗММ и обозначается ЗММ*. Множество $\mathcal{M}_V(H,1)$ допустимых полуметрик m в (2.1) есть пересечение полуметрического конуса $\mathcal{M}_V$ и гиперплоскостей $m(st)=1$ для $st\in U$. Вершины доминанта $\mathcal{M}_V(H,1)+\mathbf{R}_+^{\binom{V}{2}}$ этого многогранного множества называются $(H,1)$-*экстремальными* полуметриками. По соображениям линейной двойственности (и ввиду неотрицательности c) такие m образуют минимальное множество полуметрик, встречающихся в качестве оптимальных решений ЗММ* для всевозможных сетей (G,c).

2.2 Определение разрезно-обусловленной схемы и примеры. Схема $H=(T,U)$ называется *разрезно-обусловленной*, или *РО-схемой*, если для любого $V\supseteq T$ каждая $(H,1)$-экстремальная полуметрика на V представима как неотрицательная линейная комбинация (н.л.к.) разрезных полуметрик, т.е. для любой сети $(G=(V,E),c)$ существуют разрезные полуметрики $\rho^{X_1},\ldots,\rho^{X_k}$ на V и вещественные числа $\lambda_1,\ldots,\lambda_k>0$ такие, что $m=\lambda_1\rho^{X_1}+\ldots+\lambda_k\rho^{X_k}$ — оптимальное решение ЗММ* для G,H,c. В этом случае мощность максимального мультипотока равна соответствующей взвешенной сумме пропускных способностей разрезов: $\nu(G,H,c)=\lambda_1 c(\delta(X_1))+\ldots+\lambda_k c(\delta(X_k))$. Очевидно, каждый разрез $\delta(X_i)$ минимален по пропускной способности среди разрезов $\delta(Y)$, разделяющих $A_i:=X_i\cap T$ и $T-A_i$ (т.е. удовлетворяющих $X_i\cap T\in\{A_i,T-A_i\}$).

Несколько случаев РО-схем было известно ранее. Простейшими примерами служат схемы $H\simeq K_{q,r}$ и $H\simeq K_2+K_2$ (дающие задачу о максимальном многополюсном однопродуктовом потоке и задачу о максимальном двухпродуктовом потоке); в этих случаях $\nu(G,H,c)$ равно минимальной пропускной способности разреза, разделяющего все пары "источник–сток" [FF,Hu]. Черкасский [Chr2] показал разрезную обусловленность некоторых схем, представимых в виде объединения двух полных двудольных графов. Ловас и Черкасский доказали также, что РО-схемой является полный граф, и получили результат о дробности ЗММ(K_r).

Определение. Функция c (а также сеть (G,c)) называется *внутренне эйлеровой*, если $c(\delta_G(v))$ четно для всех внутренних вершин $v\in V-T$.

Теорема 2.1 [Lov,Chr1] *Пусть $H=K_T$. Тогда $\nu(G,H,c)$ равно $\frac{1}{2}\sum_{s\in T}c(\delta(X_s))$, где $\delta(X_s)$ — минимальный разрез, разделяющий s и $T-s$. Если c внутренне эйлерова, то существует* <u>*целочисленный*</u> *максимальный мультипоток.*

Это дает $\varphi(\text{ЗММ}(K_r))=2$ при $r\ge 3$. Мультипоток для полной схемы K_T называется *свободным*, так как любые два полюса разрешается соединять потоком.

2.3 Основные результаты о РО-схемах. Класс РО-схем оказывается весьма широким, и для его описания нам потребуются некоторые определения. Подмножества X,Y множества S называются *скрещивающимися*, если все четыре подмножества $X-Y$, $Y-X$, $X\cap Y$, $S-(X\cup Y)$ непустые. Скажем, что семейство $\mathcal{A}\subseteq 2^S$ подмножеств множества S $(k+1)$-*скрещивающееся*, если оно содержит $k+1$ попарно скрещивающихся подмножеств; в противном случае $\mathcal{A}$ называется k-*ламинарным*. Частным случаем последнего является семейство, допускающее разбиение на не более k 1-ламинарных (или просто *ламинарных*) подсемейств; оно называется k-*разложимым*.

Обозначим $\mathcal{A}(H)$ семейство *антиклик*, т.е. вершинных множеств максимальных по включению пустых подграфов схемы H. Во всех указанных в п. 2.2 примерах $\mathcal{A}(H)$ — 2-

разложимое (например, схема $H \simeq K_2+K_2$ с ребрами $st, s't'$ имеет 4 антиклики $\{s,s'\}, \{s,t'\}$, $\{t,s'\}, \{t,t'\}$; они разбиваются на ламинарные семейства $\{\{s,s'\},\{t,t'\}\}$ и $\{\{s,t'\},\{t,s'\}\}$). Полное описание класса РО-схем дается двумя теоремами, первая из которых также показывает, что дробность двойственной задачи с такой схемой равна 1,2 или 4.

Теорема 2.2 (i) *Если множество $\mathcal{A}(H)$ 2-ламинарное, то схема H является разрезно-обусловленной, и каждая $(H,1)$-экстремальная полуметрика четвертьцелочисленная.*

(ii) *Каждая $(H,1)$-экстремальная полуметрика полуцелочисленная, если $\mathcal{A}(H)$ 2-разложимое.*

Теорема 2.3 *Схема H — не разрезно-обусловленная, если $\mathcal{A}(H)$ 3-скрещивающееся.*

Заметим, что две антикликлики скрещиваются т. и т. т., когда они пересекаются. Поэтому свойство 2-ламинарности $\mathcal{A}(H)$ равносильно тому, что каждый полюс $s \in T$ принадлежит не более двум антикликам в H; в частности, $|\mathcal{A}(H)| = O(|T|)$. Это подсказывает эффективную процедуру распознавания РО-схем. Для каждой РО-схемы прямая задача также имеет ограниченную дробность; более того, справедлива

Теорема 2.4 (i) *Если множество $\mathcal{A}(H)$ 2-ламинарное, то $\varphi(ЗММ(H)) \in \{1,2,4\}$.*

(ii) *Если $\mathcal{A}(H)$ 2-разложимое, то $\varphi(ЗММ(H)) \in \{1,2\}$.*

Имеется более сильная версия этого результата.

Теорема 2.5 *Пусть сеть (G,c) внутренне эйлерова. Тогда:*

(i) *если $\mathcal{A}(H)$ 2-ламинарное, то ЗММ для G,H,c имеет полуцелочисленное решение;*

(ii) *если $\mathcal{A}(H)$ 2-разложимое, то ЗММ для G,H,c имеет целочисленное решение.*

Эти четыре основные теоремы о РО-схемах установлены в работах [1, 5, 10]. Дадим краткий комментарий к их доказательствам и методам решения соответствующих задач.

2.4 Идеи доказательств теорем и алгоритмы. Теорема 2.3 доказывается в [5]. В первую очередь замечается, что если $H' = (T',U')$ — порожденный подграф $H = (T,U)$, то оптимальные решения m' двойственной задачи (2.1) для заданных G', H', c' есть ограничения оптимальных двойственных решений m для G,H,c, где (G,c) получается из (G',c') добавлением элементов $T - T'$ как изолированных вершин. Разложение m в н.л.к. разрезных полуметрик индуцировало бы аналогичное разложение для соответствующего m'. Поэтому достаточно рассматривать минимальные (по взятию порожденных подграфов) схемы H, содержащие три попарно скрещивающиеся антиклики. Всего имеется 14 таких схем H, и для них удается сконструировать $(H,1)$-экстремальные полуметрики на определенных V, не допускающие разложения в н.л.к. разрезных полуметрик.

Теоремы 2.2 и 2.4 формулируются в работе [1], где дано краткое изложение структуры их доказательств (подробности приведены в [2] и в [Lom2]). Важная идея состоит в возможности сведения 2-ламинарного случая к 2-разложимому. Сведение увеличивает вдвое дробность прямого и двойственного решений для исходного случая, поэтому утверждения (i) теорем следуют из утверждений (ii). Это делает случай схемы H с 2-разложимым $\mathcal{A}(H)$ базовым для дальнейшего рассмотрения. Вторая идея состоит в возможности решения ЗММ с таким H в два этапа. Сначала решается вспомогательная задача о свободном мультипотоке, запирающем минимальные разрезы сети, отвечающие разбиениям $\{A, T-A\}$ для $A \in \mathcal{A}(H)$ (общий случай подобной *задачи о запирании разрезов* будет рассмотрен в $ 2). Полученный мультипоток ("предрешение") оказывается полуцелочисленным, и на втором этапе он последовательно перестраивается в полуцелочисленный максимальный поток для G, H, c, что и требуется в (ii) теоремы 2.4. Более того, возникающее в конце процесса оптимальное двойственное решение m имеет вид полусуммы разрезных полуметрик, а именно,

(2.2) $m = \frac{1}{2}\sum(\rho_V^{X_A} : A \in \mathcal{A}(H))$, где подмножества $X_A \subset V$ попарно не пересекаются, удовлетворяют $X_A \cap T \subseteq A$ и в совокупности покрывают T.

Это доказывает (ii) в теореме 2.2, а (2.2) уточняет теорему специальной двойственности для ЗММ с 2-разложимым $\mathcal{A}(H)$. Доказательство переделывается в псевдополиномиальный алгоритм нахождения соответствующих прямых и двойственных решений в 2-разложимом и 2-ламинарном случаях.

Доказательство теоремы 2.5 вместе с альтернативным доказательством (ii) в теореме 2.2 представлены в [10, 16]. Как и выше, основным является случай 2-разложимого $\mathcal{A}(H)$. Прежде всего показывается, что среди допустимых решений ЗММ* максимальными множествами H-геодезических обладают полуметрики m как в (2.2); назовем их *регулярными*. Из данного свойства геодезических следует, что каждая $(H,1)$-экстремальная полуметрика является регулярной. Это доказывает (ii) в теореме 2.2. Теорема 2.5 доказывается с помощью вилочной декомпозиции (вариант метода в п. 1.3 раздела I). Пусть $\omega = \omega(G, V, c)$ обозначает минимум $c \cdot m$ среди регулярных полуметрик m на V; тогда $\omega = \nu(G, H, c)$. Отбрасывая тривиальные случаи (где наличие целочисленного максимального мультипотока очевидно), мы показываем существование вилки τ, отсоединение которой с *целым* весом $\alpha > 0$ сохраняет величину ω. Такая операция оставляет сеть внутренне эйлеровой и уменьшает сумму пропускных способностей ребер, что позволяет применить индукцию.

Доказательство преобразуется в алгоритм построения целочисленного максимального мультипотока в рассматриваемом случае. На его итерации производится отсоединение очередной вилки τ с максимально возможным целым весом $\overline{\alpha}(\tau)$; это гарантирует сходимость метода за $O(|V|^3)$ итераций. Нахождение $\overline{\alpha}(\tau)$ сводится к вычислению чисел $\omega(G', H, c')$ для $O(1)$ сетей (G', c'). Ключевая идея, обеспечивающая эффективность алгоритма, заключается в способе вычисления числа ω: оказывается, построение регулярной полуметрики m, минимизирующей $c' \cdot m$, сводится к нахождению минимального разреза в некоторой вспомогательной двухполюсной сети с $O(|T||V|)$ вершинами и $O(|T||E|)$ ребрами. [В частности, двойственная задача для G, H, c может решаться эффективно и независимо от прямой.] В результате имеет место

Теорема 2.6 *Для внутренне эйлеровой сети $(G = (V, E), c)$ и схемы $H = (T, U)$ с 2-разложимым (2-ламинарным) множеством $\mathcal{A}(H)$ целочисленный (соответственно, полуцелочисленный) максимальный мультипоток находится сильнополиномиальным комбинаторным алгоритмом с оценкой числа действий $O(|V|^3 \eta_{|T||V|,|T||E|})$.*

Здесь и далее $\eta_{n,q}$ — оценка времени построения максимального потока и минимального разреза в двухполюсной сети с n вершинами и q ребрами (например, $O(nq\log(n^2/q))$ для алгоритма Гольдберга и Таржана). Отметим, что для частных случаев РО-схем найдены существенно более быстрые алгоритмы. Так в [3] показано, что для произвольной сети полуцелочисленный максимальный мультипоток отыскивается за время $O(\eta_{|V|,|E|})$ в случае $H \simeq K_2 + K_2$, и за время $O(\eta_{|V|,|E|}\log r)$ в случае $H \simeq K_r$. Во втором случае алгоритм рекурсивный, и основан на сведении задачи о максимальном свободном мультипотоке размеров n, q, r (числа вершин, ребер и полюсов) к двум аналогичным задачам размеров n_i, q_i, r_i, $i = 1, 2$, где $n_1 + n_2 = n + 2$, $q_1 + q_2 \leq q + n$, $r_i \leq \lceil r/2 \rceil + 1$ и $r_1 + r_2 = r + 2$. В конечных стадиях рекурсии число полюсов равно 3, и задача решается с помощью $O(1)$ построений максимального потока. Этот алгоритм модифицирован в [36] для внутренне эйлеровых сетей, в результате получена

Теорема 2.7 *Для внутренне эйлеровой сети $(G = (V, E), c)$ и полной схемы $H \simeq K_r$ целочисленный максимальный мультипоток отыскивается за время $O(\eta_{|V|,|E|}\log r)$.*

$ 2 Задача о запирании разрезов, метрическая мультипотоковая задача и бисубмодулярные многогранники

В предыдущем параграфе упоминалось, что первоначальный метод [1] для ЗММ с РО-схемой включал в качестве промежуточного этапа решение специального случая задачи о свободном мультипотоке, запирающем заданное семейство минимальных разрезов сети, или, кратко, *задачи о запирании разрезов* (ЗЗР). Она также представляет самостоятельный интерес и имеет другие приложения. Мы освещаем теоретические и алгоритмические результаты собственного исследования ЗЗР в п. 2.5, и указываем некоторые приложения в п. 2.6. В частности, с помощью ЗЗР решается *метрическая мультипотоковая задача* для представительного класса метрик. Последняя связана отношением линейной двойственности с задачей о минимальном расширении метрики, которая будет рассмотрена в разделе V. Наконец, в п. 2.7 обсуждается связь с бисубмодулярными функциями и многогранниками.

2.5 Постановка ЗЗР и результаты о запираемых семействах. Рассмотрим свободный мультипоток $f : \mathcal{P}(G, K_T) \to \mathbf{R}_+$ в сети (G, c). Для подмножества полюсов $A \subset T$ обозначим f_A совокупность потоков f_{st} между A и $T - A$ (т.е. $|\{s,t\} \cap A| = 1$), и обозначим c_A минимальную пропускную способность $c(\delta(X))$ разреза $\delta(X)$ в G, разделяющего A и $T - A$. Очевидно, общая мощность потоков в f_A не превосходит c_A, и мы говорим, что f *запирает* указанный минимальный разрез $\delta(X)$, а также f *запирает* множество A, если выполняется равенство

$$\mathrm{val}(f_A) = c_A. \tag{2.3}$$

Это равенство равносильно тому, что f_A насыщает ребра минимального разреза $\delta_G(X)$, разделяющего A и $T - A$, и каждый путь $P \in \mathrm{supp}(f_A)$ пересекает $\delta_G(X)$ ровно один раз.

(ЗЗР) *Задача о запирании разрезов*: Для заданных G, T, c и семейства $\mathcal{A} \subset 2^T$ найти свободный мультипоток f, запирающий все множества $A \in \mathcal{A}$ (или установить отсутствие такого f).

Определение. Семейство $\mathcal{A} \subset 2^T$ называется *запираемым*, если ЗЗР имеет решение для любой сети $(G=(V,E),c)$ с $V \supseteq T$.

Полное описание множества запираемых семейств дается следующей теоремой, полученной совместно с М. Ломоносовым, см. [2],[Lom2].

Теорема 2.8 *Семейство $\mathcal{A}$ является запираемым т. и т. т., когда оно 2-ламинарное.*

Заметим, что одноэлементные подмножества $\{s\}$ в T ламинарны любым подмножествам $A \subset T$. Поэтому, если $\mathcal{A}$ 2-ламинарное, то расширенное семейство $\mathcal{A} \cup \{\{s\} : s \in T\}$ — тоже 2-ламинарное. Так как $\mathrm{val}(f)$ ограничено сверху полусуммой пропускных способностей минимальных однополюсных разрезов, то запирание всех одноэлементных множеств влечет максимальность мощности f (ср. теорему 2.1). Таким образом, из теоремы 2.8 получаем

Следствие 2.9 *Если $\mathcal{A} \subset 2^T$ запираемое, то для любой сети (G,c) ЗЗР имеет решение среди максимальных свободных мультипотоков.*

Теорема 2.8 доказывается легче, чем теоремы о РО-схемах 2.2 и 2.3. Поясним идею доказательства. Свойство запираемости семейства наследуется как при переходе к подсемейству, так и при удалении полюсов. Поэтому в доказательстве необходимости можно рассматривать только попарно скрещивающиеся тройки $\mathcal{A}$ на минимальных T. С точностью до взятия дополнений имеются два вида таких $(T,\mathcal{A})$: (а) $T=\{s_1,s_2,s_3,s_4\}$ и $\mathcal{A}=\{\{s_1,s_i\} : i=2,3,4\}$; и (б) $T=\{s_1,\ldots,s_6\}$ и $\mathcal{A}=\{\{s_i,s_{i+1},s_{i+2}\} : i=1,2,3\}$. Для обоих случаев конструируется пример сети (G,c), для которой (2.3) не может выполняться сразу для всех $A \in \mathcal{A}$.

Обратное утверждение в теореме доказывается алгоритмически. В [9] получены более сильные результаты. Здесь рассматривается внутренне эйлеровая сеть (G,c), и применяется метод вилочной декомпозиции. Показывается, что если $\mathcal{A}$ 2-ламинарное, и внутренняя вершина $v \in V-T$ имеет не менее двух инцидентных ребер в $\mathrm{supp}(c)$, то некоторую вилку в v можно отсоединить с целым весом >0, сохраняя величины c_A для всех $A \in \mathcal{A}$ (и тогда применяется индукция). Это доказывает достаточность в теореме 2.8 и влечет существование целочисленного решения для 2-ламинарного $\mathcal{A}$. Доказательство преобразуется в сильнополиномиальный алгоритм, состоящий из $O(|V|^3)$ итераций, на каждой из которых решается $|\mathcal{A}|$ задач о минимальном разрезе. [Певзнер показал, что для 2-ламинарного $\mathcal{A}$ справедлива оценка $|\mathcal{A}|=O(|T|)$.] В результате имеет место

Теорема 2.10 *Если $\mathcal{A} \subset 2^T$ 2-ламинарное, и сеть (G,c) внутренне эйлерова, то существует <u>целочисленный</u> мультипоток, запирающий все множества в $\mathcal{A}$, и такой мультипоток строится за время $O(|T||V|^3\eta_{|V|,|E|})$.*

Замечание 2.11 Обобщая быстрый метод для ЗММ с полной схемой (см. теорему 2.7), мы предлагаем в [36] алгоритм с той же оценкой $O(\eta_{|V|,|E|}\log|T|)$ для нахождения целочисленного решения ЗЗР на внутренне эйлеровой сети в случае *ламинарного* $\mathcal{A}$. Более того, идея алгоритма развивается в [36] для эффективного нахождения (с той же временной оценкой) максимального свободного целочисленного мультипотока в ориентированной *внутренне сбалансированной* сети. Внутренняя сбалансированность означает, что для каждой неполюсной вершины суммы пропускных способностей входящих и исходящих дуг одинаковы. Для несбалансированных орсетей задача — NP-трудная.

2.6 Метрическая мультипотоковая задача и приложения ЗЗР. Задача о максимальном свободном мультипотоке имеет следующее естественное обобщение.

(ММЗ) *Метрическая мультипотоковая задача*: Для заданной метрики μ на множестве T полюсов сети (G, c) найти свободный мультипоток $f : \mathcal{P}(G, K_T) \to \mathbf{R}_+$, максимизирующий взвешенную сумму мощностей потоков $\mathrm{val}(\mu, f) := \sum(\mu(st)\mathrm{val}(f_{st}) : st \in \binom{T}{2})$.

Этот максимум обозначим $\nu(\mu, G, c)$. [В задаче о максимальном свободном мультипотоке $\mu(st) = 1$ для всех $s \neq t$.] В [Lom1] было установлено, что для любого μ оптимальное решение ММЗ можно искать среди максимальных свободных мультипотоков, и что

$$\nu(\mu, G, c) = \min\{c \cdot m : m \in \mathrm{Ext}(\mu, V)\}, \tag{2.4}$$

т.е. *задача о минимальном расширении метрики* (рассматриваемая в разделе V) выступает в роли двойственной для ММЗ.

Проблема дробности ММЗ в зависимости от μ до конца не решена. Однако наши результаты для ЗЗР позволяют выделить класс метрик μ, для которых ММЗ имеет полуцелочисленное оптимальное решение, и эффективно построить такое решение. Это базируется на следующем свойстве, подмеченном совместно с М.В. Ломоносовым, см. [2],[Lom2].

Утверждение 2.12 *Пусть метрика μ на T представима как н.л.к. разрезных полуметрик, порожденных множествами семейства $\mathcal{A} \subset 2^T$:*

$$\mu = \sum(\alpha(A)\rho_T^A : A \in \mathcal{A}), \qquad \text{где } \alpha : \mathcal{A} \to \mathbf{R}_+. \tag{2.5}$$

Предположим ЗЗР для сети (G, c) и семейства $\mathcal{A}$ имеет решение f. Тогда f является оптимальным решением ММЗ для μ, G, c.

Действительно, для каждого $A \in \mathcal{A}$ возьмем соответствующий минимальный разрез $\delta(X)$ в (G, c). Тогда разрезная полуметрика $m_A := \rho_V^X$ удовлетворяет $c \cdot m_A = \mathrm{val}(f_A)$ (ср. (2.3)), и $m := \sum(\alpha(A)m_A : A \in \mathcal{A})$ является расширением метрики μ на множество V. Имеем

$$c \cdot m = \sum\nolimits_{A \in \mathcal{A}} \alpha(A)\mathrm{val}(f_A) = \sum\nolimits_{st \in \binom{T}{2}} \mu(st)\mathrm{val}(f_{st}) = \mathrm{val}(\mu, f),$$

и f оптимален, ввиду (2.4). Из теоремы 2.10 и утверждения 2.12 получаем

Следствие 2.13 *Если метрика μ на T представима в виде (2.5) с 2-ламинарным семейством $\mathcal{A} \subset 2^T$, то ММЗ для μ и внутренне эйлеровой сети $(G = (V, E), c)$ имеет <u>целочисленное</u> оптимальное решение, и оно находится за время $O(|T||V|^3\eta_{|V|,|E|})$.*

Замечание 2.14 Из результатов в [35, 40] (см. раздел V) следует, что для рациональной метрики μ представимость в указанном виде распознается в псевдополиномиальное время. Для этого надо построить модулярное замыкание $\overline{\mu}$ для μ и проверить, что его опорный граф $H(\overline{\mu})$ является наследственно модулярным и не содержит подграфа $K_{2,3}$. Тогда орбиты графа $H(\overline{\mu})$ будут разрезами и определят требуемое 2-ламинарное семейство $\mathcal{A}$. В [30] показывается существование и дается эффективный алгоритм построения целочисленного оптимального решения ММЗ для эйлеровой сети в неразрезном случае, а именно, для метрики $\mu = \mathrm{dist}^{K_{2,r}}$ при произвольном r.

ЗЗР находит применение для решения и других мультипотоковых задач. Укажем один пример. Задача о допустимом мультипотоке для G, H, c, d со схемой $H = (T, U) \simeq C_5$, упомянутая в п. 1.2 раздела I, сводится к ЗЗР следующим образом. Пусть $T = \{s_0, \dots, s_4\}$ и $U = \{s_i s_{i+1} : i = 0, \dots, 4\}$ (беря индексы по модулю 5). Образуем расширенную сеть (G', c'), добавляя вершины s'_i и ребра $s'_i s_i$ пропускной способности $d(s_{i-1}s_i) + d(s_i s_{i+1})$, $i = 0, \dots, 4$. Положим $T' := \{s'_0, \dots, s'_4\}$ и $\mathcal{A} := \{\{s'_i, s'_{i+2}\} : i = 0, \dots, 4\}$. Поскольку $\mathcal{A}$ 2-ламинарное, ЗЗР для $G', T', c', \mathcal{A}$ имеет решение f'. Показывается, что если для каждого i разрез $\delta(\{s'_i, s'_{i+2}\})$ сети (G', c') заперт, то f' индуцирует решение ЗДМ для G, H, c, d, а если нет — то последняя не имеет решения. При этом для эйлеровых пар (c, d) сеть (G', c') — внутренне эйлерова относительно T', и по теореме 2.10 существует целочисленное f' (ср. теорему 1.1).

ЗЗР применяется также для сведения 2-ламинарного случая $\mathcal{A}(H)$ к 2-разложимому при доказательстве теорем 2.2, 2.4 и 2.5; метод сведения описан в [2],[Lom2]. Как отмечалось в п. 2.4, мультипоток, запирающий антиклики в H, строился и в первоначальном алгоритме решения ЗММ для 2-разложимого случая.

2.7 Бисубмодулярные многогранники и связь с ЗЗР и ЗММ.

Обобщая некоторые свойства матроидов, Эдмондс [Ed1] ввел понятие *полиматроида* — многогранника, связанного с субмодулярной функцией на подмножествах. Он обладает свойством, что максимум любой *неотрицательной* линейной функции отыскивается естественным гриди-алгоритмом. Данстан и Уэлш [DW] рассмотрели более широкий класс многогранников, а именно тех, к которым применим гриди-алгоритм при *произвольной* линейной функции. С конца 80-х годов эти многогранники, называемые бисубмодулярными (и иногда псевдополиматроидами, гриди-многогранниками и пр.), подверглись интенсивному изучению. Определим эти объекты и укажем некоторые их базовые свойства.

Рассматривается множество 3^T пар (A, B), где $A, B \subseteq T$ и $A \cap B = \emptyset$. Характеристическая функция $\chi_{A,B} \in \mathbf{R}^T$ пары (A, B) принимает значение 1 на A, –1 на B, и 0 на $T - (A \cup B)$. Для пар $\pi = (A, B)$ и $\pi' = (A', B')$ определим операции "пересечения" $\wedge$ и "объединения" $\vee$:

$$\begin{aligned} \pi \wedge \pi' &:= (A \cap A', B \cap B'), \\ \pi \vee \pi' &:= ((A \cup A') - (B \cup B'), (B \cup B') - (A \cup A')). \end{aligned}$$

Тогда $\chi_\pi + \chi_{\pi'} = \chi_{\pi \wedge \pi'} + \chi_{\pi \vee \pi'}$. Функция $g : 3^T \to \mathbf{Z}$ называется *бисубмодулярной*, если

$$g(\pi) + g(\pi') \geq g(\pi \wedge \pi') + g(\pi \vee \pi') \qquad \text{для всех } \pi \in 3^T,$$

и определяемый ею *бисубмодулярный многогранник* — это множество

$$Q_g := \{x \in \mathbf{R}^T : \chi_\pi x \leq g(\pi) \quad \text{для всех } \pi \in 3^T\}.$$

В независимых работах нескольких авторов (Накамура, Чандрасекаран, Кабади и др.) было показано, что: (i) многогранник Q_g прямо и двойственно целочисленный; и (ii) для $c : T \to \mathbf{Z}$ и (целочисленных) бисубмодулярных функций g, g' на 3^T задача:

(2.6) *Максимизировать* cx *среди* $x \in Q_g \cap Q_{g'}$,

и двойственная задача:

(2.7) *Минимизировать* $gy + g'y'$ *среди* $y, y' : 3^T \to \mathbf{R}_+$ *таких, что* $\sum_\pi (y(\pi) + y'(\pi))\chi_\pi = c$,

имеют *полуцелочисленные* оптимальные решения, если они вообще имеют оптимальные решения.

Аналогичные свойства справедливы, если рассматривать ограничения бисубмодулярных многогранников на положительный ортант. Заметим, что свойство (ii) более слабое по сравнению с полиматроидами, для которых подобные задачи имеют целочисленные оптимальные решения. Полуцелочисленность для (2.7) усиливается следующим результатом в [22] (обобщающимся на любые нечетно-значные c).

Теорема 2.15 *Если* $c \equiv 1$ *и задача (2.7) имеет оптимальное решение, то она имеет* <u>*целочисленное*</u> *оптимальное решение.*

Эффективные методы решения задач (2.6)–(2.7) (при задании g, g' оракулами) для общего случая не известны. В [22] предлагается оракульно-полиномиальный алгоритм при некоторых дополнительных условиях. А именно, рассматривается задача

(2.8) *Максимизировать* $x(T)$ *среди* $x \in Q_g \cap Q_{g'} \cap \mathbf{R}^T_+$ *для совместимых* g, g'.

Здесь бисубмодулярные функции g, g' (и многогранники $Q_g, Q_{g'}$) называются *совместимыми*, если неравенство

$$g(\pi) + g'(\pi') \geq g(\pi - \pi') + g'(\pi' - \pi)$$

выполнено для всех g-замкнутых π и g'-замкнутых π', где $(A, B) - (A', B')$ обозначает пару $(A - (A' \cup B'), B - (A' \cup B'))$, пара (A, B) считается *g-замкнутой*, если $g(A, B) \leq g(A'', B'')$ при $A \subseteq A''$ и $B \supseteq B''$, и аналогично для g'.

Теорема 2.16 *Пусть* g, g' *совместимые бисубмодулярные функции на* 3^T, *принимающие четные значения. Тогда существуют целочисленное оптимальное решение* x^* *задачи (2.8) и функции* $\Delta, \Delta' : T \to \mathbf{Z}_+$ *такие, что функция* $x^* + \Delta + \Delta'$ *принимает четные значения,* $x^* + \Delta \in Q_g$ *и* $x^* + \Delta' \in Q_{g'}$. *Такие* x^*, Δ, Δ' *вместе с целочисленным оптимальным решением задачи, двойственной (2.8), находятся за оракульно-полиномиальное от* $|T|$ *время.*

Этот результат вместе с теоремой 2.10 позволяет получить альтернативное доказательство (ii) в теореме 2.5; близкое по духу доказательство, использующее только полиматроидную технику, дается в [32]. Мы рассматриваем случай полностью эйлеровой сети (G, c) (к нему сводится внутренне эйлеровый случай). Рассмотрим вспомогательную мультипотоковую задачу с требованиями на полюсах:

(2.9) *Для заданной функции* $r : T \to \mathbf{R}_+$ *найти мультипоток* $f : \mathcal{P}(G, H) \to \mathbf{R}_+$ *в* (G, c) *такой, что* $\mathrm{val}(f_s) = r(s)$ *для всех* $s \in T$.

Скажем, что r *допустимое*, если такой мультипоток f существует; тогда $\mathrm{val}(f) = r(T)/2$. Максимальный мультипоток для G, H, c строится в 2 этапа: сначала находится допустимое r с максимальным $r(T)$, затем решается (2.9) для этого r. Задача (2.9) сводится к ЗЗР для $G', T', c_r, \mathcal{A}'$, где $(G' = (V', E'), c_r)$ получается из (G, c) добавлением множества полюсов $T' = \{s' : s \in T\}$ и ребер $s's$ пропускной способности $r(s)$, и $\mathcal{A}'$ состоит из множеств $A' := \{s' : s \in A\}$ для $A \in \mathcal{A}(H)$. ЗЗР имеет решение f', так как $\mathcal{A}'$ 2-разложимое. Замечается, что (2.9) разрешима (и ее решение f индуцируется f') т. и т. т., когда для любых $A' \in \mathcal{A}'$ и $X' \subset V'$ с $X' \cap T' = A'$ выполняется $c_r(\delta_{G'}(X')) \geq r(A)$ $(= c_r(\delta_{G'}(A')))$. В терминах исходной сети это эквивалентно выполнению неравенств

$$(2.10) \qquad r(X \cap A) - r((X \cap T) - A) \leq c(\delta(X)) \qquad \text{для любых } X \subseteq V \text{ и } A \in \mathcal{A}(H).$$

Таким образом, нужно максимизировать $r(T)$ при условии (2.10). Пусть $\mathcal{A}(H)$ разбивается на ламинарные семейства $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$. В [22] объясняется, как ассоциировать неравенства в (2.10), относящиеся к множествам $A \in \mathcal{A}_1$ и $A \in \mathcal{A}_2$, с совместимыми бисубмодулярными функциями g, g', соответственно. В результате рассматриваемая задача сводится к (2.8). Более того, из эйлеровости c следует четность всех значений g, g', и поэтому (2.8) имеет целочисленное оптимальное решение r. Такое r порождает целочисленную функцию c_r, которая однако может не быть внутренне эйлеровой относительно T', и следовательно, при решении ЗЗР для $G', T', c_r, \mathcal{A}'$ гарантируется только полуцелочисленное решение. Это затруднение преодолевается использованием дополнительных функций Δ, Δ' в теореме 2.16 (с $x^* = r$). Функция $r' := r + \Delta + \Delta'$ уже всюду четная, поэтому сеть $(G', c_{r'})$ является внутренне эйлеровой, и теперь ЗЗР для $G', T', c_{r'}, \mathcal{A}'$ имеет целочисленное решение f'. Пусть f — индуцированный мультипоток в (G, c), и h — ограничение f на $\mathcal{P}(G, H)$ ("полезная" часть f). Используя включения $r + \Delta \in Q_g$, $r + \Delta' \in Q_{g'}$, показывается, что $\mathrm{val}(h) \geq r(T)/2$. Тогда h — целочисленный максимальный мультипоток для G, H, c, что и требуется. Более того, из алгоритмических утверждений в теоремах 2.10 и 2.16, следует, что h строится в сильно-полиномиальное время. В [32] для полиматроидной версии этого метода с комбинаторыми усовершенствованиями получена оценка $O(|V|^2|T|\eta_{|V|,|E|})$.

$ 3 Результаты о дробности ЗММ и ЗММ*.

Систему линейных неравенств $Ax \geq b$ с рациональными коэффициентами называют *тотально прямо (двойственно) целочисленной*, если линейная программа $\min\{cx : Ax \geq b\}$ (соответственно, двойственная программа $\max\{yb : y \geq 0,\ yA = c\}$) имеет целочисленное оптимальное решение для каждого вектора c, при котором программа имеет оптимальное решение. Эдмондс и Джайлс [EG] установили, что тотальная двойственная целочисленность влечет тотальную прямую целочисленность — факт, находящий важные применения в комбинаторной оптимизации. Это можно обобщить на случай $1/k$-целочисленности. Для наших целей нужно следующее свойство (см. [18]).

Утверждение 2.17 *Пусть A — неотрицательная $n \times m$ матрица, b — целочисленный n-вектор, и $k \in \mathbf{N}$. Предположим в программе $D(c) := \max\{yb : y \geq 0,\ yA \leq c\}$ значение максимума $1/k$-целочисленное для каждого $c \in \mathbf{Z}^m_+$, при котором имеется опти-*

мальное решение. Тогда каждая вершина многогранника $M := \{x \in \mathbf{R}^m_+ : Ax \geq b\}$ — $1/k$*-целочисленная.*

Действительно, ввиду неотрицательности A, для каждой вершины x в M найдется вектор $c = (c_1, \ldots, c_m) \in \mathbf{Z}^m_+$ такой, что x — оптимальное решение двойственной программы для всех $c' \in \mathbf{R}^m_+$ при $\|c - c'\|_\infty \leq 1$, т.е. $c'x = \max\{yb : y \geq 0,\ yA \leq c'\}$. Для фиксированного i положим $c'_i := c_i + 1$ и $c'_j := c_j$, $j \neq i$, и возьмем оптимальные решения y и y' для $D(c)$ и $D(c')$, соответственно. Тогда $x_i = c'x - cx = y'b - yb \in \frac{1}{k}\mathbf{Z}$.

Если в качестве $D(c)$ рассмотреть задачу о максимальном мультипотоке для G, H, c (т.е. A — это матрица инциденций ребер и путей в $\mathcal{P}(G, H)$, и $b \equiv 1$), то M будет многогранником допустимых решений формальной двойственной задачи, т.е. $M = \{\ell \in \mathbf{R}^E_+ : \ell(P) \geq 1\ \forall P \in \mathcal{P}(G, H)\}$. Обозначая ЗММ$(G, H)$ множество ЗММ с фиксированными $G = (V, E)$, H и любыми $c : E \to \mathbf{Z}_+$, заключаем, что в случае $\varphi(\text{ЗММ}(G, H)) = k < \infty$ двойственная задача имеет $1/k$-целочисленное оптимальное решение для каждого $c \in \mathbf{Z}^E_+$. Это дает

Следствие 2.18 *Для любых* G, H *справедливо* $\varphi(\text{ЗММ}(G, H)) \geq \varphi(\text{ЗММ}^*(G, H))$. *В частности,* $\varphi(\text{ЗММ}(H)) \geq \varphi(\text{ЗММ}^*(H))$, *и неограниченная дробность* ЗММ$^*(H)$ *влечет неограниченную дробность ЗММ(H).*

Исследование двойственной задачи в [18] приводит к определению дробности ЗММ* для всех схем H. Оказывается, ограниченность дробности зависит от следующего условия:

(2.11) $\quad A \cap B = B \cap C = C \cap A$ для любых попарно пересекающихся антиклик A, B, C в H.

Например, этому условию подчиняется PO-схема, так как она вообще не содержит трех попарно пересекающихся антиклик по теореме 2.3.

Теорема 2.19 (i) *Если* H *удовлетворяет (2.11), то каждая* $(H, 1)$*-экстремальная полуметрика — четвертьцелочисленная (и следовательно,* $\varphi(\text{ЗММ}^*(H))$ *равно 1, 2 или 4).*

(ii) *Если* H *не удовлетворяет (2.11), то для любого* $k \in \mathbf{N}$ *имеется* $(H, 1)$*-экстремальная полуметрика дробности* $\geq k$ *(и следовательно,* $\varphi(\text{ЗММ}^*(H)) = \infty$*).*

Эта теорема и следствие 2.18 указывают класс схем, для которых задача о максимальном мультипотоке имеет неограниченную дробность.

Следствие 2.20 $\varphi(\text{ЗММ}(H)) = \infty$, *если* H *не удовлетворяет (2.11).*

В доказательстве (ii) теоремы 2.19 прежде всего замечается, что если схема $H' = (T', U')$ является порожденным подграфом схемы $H = (T, U)$, то всякая $(H', 1)$-экстремальная полуметрика на $V' \supseteq T'$ продолжается до $(H, 1)$-экстремальной полуметрики на $V := V' \cup (T - T')$ (полагая $V' \cap T = T'$), откуда следует $\varphi(\text{ЗММ}^*(H)) \geq \varphi(\text{ЗММ}^*(H'))$. Поэтому достаточно рассмотреть минимальные (по взятию порожденных подграфов) схемы $H = (T, U)$, нарушающие (2.11). Имеется конечное число таких схем (все на 6 вершинах). Дается унифицированный метод, который для каждого такого H и любого $k \geq 3$ строит $(H, 1)$-экстремальную полуметрику дробности $2k$.

Пусть теперь $H = (T, U)$ имеет свойство (2.11). Часть (i) в теореме 2.19 следует из существования единой четвертьцелочисленной полуметрики $h = h_H$ на некотором множестве $W = W_H$, имеющей следующее свойство:

(2.12) для любых $V \supset T$ и $m \in \mathcal{M}_V(H, 1)$ существует отображение $\gamma : V \to W$ такое, что $h(\gamma(s)\gamma(t)) = 1$ для всех $st \in U$, и образ каждой H-геодезической для m является геодезической для h.

Ввиду (2.12), полуметрика m' на V, индуцированная h и γ, принадлежит $\mathcal{M}_V(H, 1)$ и удовлетворяет $m \geq \lambda m' + (1 - \lambda)m''$ для некоторых $m'' \in \mathcal{M}_V(H, 1)$ и $0 < \lambda \leq 1$. Таким образом, все $(H, 1)$-экстремальные полуметрики индуцируются подполуметриками в h, и четвертьцелочисленность h влечет (i).

Требуемое h конструируется так. Пусть $\mathcal{B}$ — множество всех непустых пересечений различных антиклик $A, B \in \mathcal{A}(H) =: \mathcal{A}$. Тогда $h := \frac{1}{4}\mathrm{dist}^{\Gamma}$ для графа $\Gamma = (W, F)$, где:

(2.13) (i) W состоит из вершин v_A и z_A, сопоставляемых антикликам $A \in \mathcal{A}$, вершин p_Q, сопоставляемых множествам $Q \in \mathcal{B}$, и еще одной вершины q;

(ii) F состоит из ребер $v_A z_A$ и $z_A q$ для $A \in \mathcal{A}$ и ребер $z_A p_Q$ при $Q \subset A$.

[Например, при $H \simeq K_3 + K_3$ возникает граф Γ как в (1.11).] В частности, h и обображение $\sigma : T \to W$, переводящее все полюса каждого множества $Q \in \mathcal{B}$ в вершину p_Q и полюса каждого множества $A \in \mathcal{A}$, не покрытые $\mathcal{B}$, — в вершину v_A, устанавливают расстояние 1 на каждом ребре в H. Отображение γ в (2.12) строится как расширение σ (это ключевое место конструкции). Таким образом, графы $\Gamma = (W, F)$ вида (2.13) выявляют комбинаторную структуру оптимальных двойственных решений ЗММ для схем как в (2.11).

Дальнейшее исследование в [18] возможной разложимости указанных полуметрик h_H приводит к точному определению дробности ЗММ$^*(H)$.

Теорема 2.21 (i) $\varphi(\text{ЗММ}^*(H)) = 1$ *т. и т. т., когда H — полный двудольный граф или $H \simeq K_2 + K_2$;*

(ii) $\varphi(\text{ЗММ}^*(H)) = 2$ *т. и т. т., когда $\mathcal{A}(H)$ 2-разложимое (и H отличен от указанных в (i)) или $H \simeq K_2 + K_3$.*

[Для остальных схем дробность ЗММ* равна 4 или ∞ в соответствии с теоремой 2.19.]

Что касается прямой задачи, проблема полного описания схем H, для которых дробность ЗММ(H) конечная, еще до конца не решена. Выдвинута гипотеза, что таковыми являются все схемы, удовлетворяющие (2.11), и для них ЗММ всегда имеет четвертьцелочисленное решение. В то же время удается полностью описать класс схем H с $\varphi(\text{ЗММ}(H)) = 2$. Согласно следствию 2.18 и (ii) в теореме 2.21, помимо схем H с 2-разложимым $\mathcal{A}(H)$, такой схемой может быть только K_2+K_3. В [38] дается утвердительный ответ, и при этом свойство полуцелочисленности усиливается.

Теорема 2.22 *Пусть $H \simeq K_2 + K_3$, и сеть (G, c) полностью эйлерова. Тогда ЗММ для G, H, c имеет <u>целочисленное</u> оптимальное решение, и оно находится в сильнополиномиальное время.*

III. Задача о максимальном мультипотоке минимальной стоимости (ЗМС) и ее целочисленная версия

Раздел III посвящен третьему из основных типов мультипотоковых задач — задаче о максимальном мультипотоке минимальной стоимости (см. с. 8), ее целочисленному усилению — задаче о максимальном целочисленном мультипотоке минимальной стоимости (ЦЗМС), и некоторым приложениям. Как и выше, мы исследуем структурные и алгоритмические свойства задач, зависящие от потоковой схемы H. Простейшей схемой H служит полный двудольный граф $K_{q,r}$; в этом случае ЗМС(H) (равносильная многополюсной версии задачи о максимальном потоке минимальной стоимости) имеет целочисленное оптимальное решение, становясь фактически эквивалентной ЦЗМС(H). Для остальных схем существование целочисленного решения не гарантируется и определение дробности становится более сложным.

Наши основные результаты о ЗМС дают точное описание множество схем H, для которых ЗМС(H) имеет *полуцелочисленное* оптимальное решение, а для остальных схем устанавливают неограниченную дробность. В отношении ЦЗМС полученные результаты точно характеризуют множество схем H, для которых при единичных пропускных способностях задача разрешима в полиномиальное время (в предположении P$\neq$NP). Для обеих задач класс "хороших схем" H оказывается одним и тем же и образован *полными многодольными* графами.

В $ 1 мы объясняем суть метода *двойного накрытия*, при помощи которого доказывается полуцелочисленность ЗМС с базовой схемой $H \simeq K_r$ и конструируются эффективные алгоритмы нахождения полуцелочисленного оптимального решения. Результаты о неограниченной дробности ЗМС и труднорешаемости ЦЗМС представлены в $ 2. Параграф 3 представляет центральное место раздела — минимаксное соотношение для ЦЗМС(K_r) (обобщающее соотношение Мадера для максимальной упаковки T-путей) и эффективный метод нахождения целочисленного решения. Результаты $ 3 применяются в $ 4 для решения обобщения задачи Эдмондса–Джонсона о T-соединениях минимального веса и описания доминанта (T,d)-соединений графа.

Результаты раздела опубликованы в работах [4, 17, 21, 24, 25, 28, 31, 34, 37].

$ 1 Полуцелочисленные оптимальные решения ЗМС с полной многодольной схемой

Напомним, что ЗМС задается графом сети $G=(V,E)$, потоковой схемой $H=(T,U)$ и функциями $c,a: E \to \mathbf{Z}_+$ пропускных способностей и удельных стоимостей ребер. Требуется найти мультипоток f для G,H,c, имеющий максимальную мощность $\mathrm{val}(f)$ и при этом условии минимизирующий общую стоимость $a_f := a\zeta^f$ (скалярное произведение функций a и ζ^f); эквивалентно, $a_f := \sum(a(P)f(P) : P \in \mathcal{P}(G,H))$, где $a(P)$ — стоимость $a(x_0x_1) + \ldots + a(x_{k-1}x_k)$ пути $P = x_0x_1\ldots x_k$. Задача имеет две целевые функции, и, аналогично параметрическому подходу Форда и Фалкерсона [FF] к задаче о максимальном потоке минимальной стоимости, удобно скомбинировать их в единую функцию, рассматривая слегка более общую *параметрическую задачу*:

(3.1) *Для заданного числа* $p \in \mathbf{R}_+$ (параметра), *найти мультипоток* f *для* G, H, c, *максимизирующий* $p\mathrm{val}(f) - a_f$.

При достаточно большом p (3.1) дает решение исходной задачи. Наш основной результат о дробности ЗМС представлен в следующей теореме, установленной в [4].

Теорема 3.1 *Пусть* H *— полный граф* K_T. *Тогда задача (3.1) имеет* <u>*полуцелочисленное*</u> *оптимальное решение при любом* p.

Таким образом, *свободная стоимостная задача* (т.е. ЗМС со схемой K_T) имеет полуцелочисленное оптимальное решение. Это обобщается на полные многодольные схемы. Действительно, ЗМС с графом сети G и схемой $H \simeq K_{q_1,\ldots,q_r}$ сводится к ЗМС с графом сети G' и схемой $H' \simeq K_r$, получаемыми при стягивании множества полюсов каждой доли в H в один полюс.

Следствие 3.2 *ЗМС с полной многодольной схемой* $H \simeq K_{q_1,\ldots,q_r}$ *имеет полуцелочисленное оптимальное решение. Таким образом,* $\varphi(\text{ЗМС}(H)) = 2$ *при* $r \geq 3$ *(и равно 1 при* $r = 2$*).*

В основе доказательства теоремы 3.1 лежит метод двойного накрытия, позволяющий провести редукцию к однопотоковой задаче и использовать тот факт, что последняя имеет целочисленное решение. Мы изложим идею доказательства и затем обсудим алгоритмические результаты. Сперва нам потребуется рассмотреть двойственную задачу.

3.1 Двойственность и оптимальность.

Параметрическая задача (3.1) является задачей линейного программирования с системой линейных ограничений $\zeta^f(e) \leq c(e)$, $e \in E$. Введем для них двойственные переменные $\gamma(e)$. Задача линейного программирования, двойственная (3.1), состоит и минимизации $c\gamma$ среди $\gamma : E \to \mathbf{R}_+$ таких, что $\gamma(P) \geq p - a(P)$ для всех $P \in \mathcal{P}(G,H)$.

Мы интерпретируем редуцированные стоимости $a(e)+\gamma(e)$ как *длины* ребер e и считаем G связным. Для полной схемы $H = K_T$ двойственная задача переписывается так:

(3.2) *Минимизировать* $c\gamma$ *среди* $\gamma : E \to \mathbf{R}_+$ *таких, что* $\mathrm{dist}^{G,a+\gamma}(st) \geq p$ *для всех* $st \in \binom{T}{2}$.

По теореме двойственности линейного программирования допустимые решения f и γ задач (3.1) и (3.2), соответственно, являются оптимальными т. и т. т., когда выполняются следующие соотношения (дополняющей нежесткости):

(3.3) если $f(P) > 0$, то $a(P) + \gamma(P) = p$ (и P — кратчайший путь для $\mathrm{dist}^{G,a+\gamma}$);

(3.4) если $\gamma(e) > 0$, то f насыщает ребро e, т.е. $\zeta^f(e) = c(e)$.

3.2 Метод двойного накрытия. Объясним идею доказательства теоремы 3.1 (следуя [4, 28]). Зафиксируем оптимальное двойственное решение γ. Нужно построить полуцелочисленный мультипоток f, удовлетворяющий (3.3) и (3.4). Достаточно работать со строго положительными функциями a. Тогда функция длин ребер $\ell := a + \gamma$ — тоже положительная (что важно для конструкции ниже).

Согласно (3.3), в носителе требуемого мультипотока можно использовать только T-*пути* P (пути в G, соединяющие различные полюса), для которых $\ell(P) = p$; назовем их *допустимыми*. Подграф в G, являющийся объединением допустимых путей и T, назовем *допустимым* и обозначим $\widetilde{G} = (\widetilde{V}, \widetilde{E})$. Теорема тривиальна, если допустимых путей вообще нет (эквивалентно: $f \equiv 0$ оптимальный; $\widetilde{E} = \emptyset$; $\mathrm{dist}^{G,\ell}(st) > p$ для всех $st \in \binom{T}{2}$).

Для вершин $v \in \widetilde{V}$ обозначим $\pi(v)$ и $T(v)$ расстояние относительно ℓ от v до T и множество ближайших полюсов, соответственно. Тогда $\pi(v) < p/2$, если $|T(v)| = 1$, и $\pi(v) = p/2$, если $|T(v)| \geq 2$. Это определяет разбиение множества $\widetilde{V}$ на подмножества $V_s := \{v : T(v) = \{s\}\}$ $(s \in T)$ и $V^\bullet := \{v : |T(v)| \geq 2\}$; вершины в $V^\bullet$ называются *центральными*. В частности, $\pi(s) = 0$ и $s \in V_s$ для $s \in T$. Из положительности ℓ следует, что центральные вершины не смежны в $\widetilde{G}$, а ребра $\widetilde{G}$ и допустимые пути так связаны с потенциалами π:

(3.5) для ребра $e = uv \in \widetilde{E}$: (i) если $u \in V_s$, $v \in V_s \cup V^\bullet$ и $\pi(u) \leq \pi(v)$, то $\pi(v) - \pi(u) = \ell(e)$; (ii) если $u \in V_s$ и $v \in V_t$, $s \neq t$, то $\pi(u) + \pi(v) + \ell(e) = p$;

(3.6) T-путь $v_0 v_1 \ldots v_k$ в $\widetilde{G}$ с концами $v_0 = s$ и $v_k = t$ является допустимым т. и т. т., когда имеются i, j такие, что $v_0, \ldots, v_i \in V_s$, $\pi(v_0) < \pi(v_1) < \ldots < \pi(v_i)$, $v_j, \ldots, v_k \in V_t$, $\pi(v_j) > \pi(v_{j+1}) > \ldots > \pi(v_k)$, и либо $j = i + 1$, либо $j = i + 2$ и $v_{i+1} \in V^\bullet$.

Пользуясь (3.5), мы строим орграф $\Gamma = (V_\Gamma, E_\Gamma)$ (*двойное накрытие* над $\widetilde{G}$): расщепляем каждую вершину $v \in \widetilde{V}$ на $2|T(v)|$ вершин v_s^1, v_s^2 $(s \in T(v))$ и назначаем следующие дуги:

(a) ребро e в (3.5)(i) порождает две дуги (u_s^1, v_s^1) и (v_s^2, u_s^2);

(b) ребро e в (3.5)(ii) порождает две дуги (u_s^1, v_t^2) и (v_t^1, u_s^2);

(c) вершина $v \in V^\bullet$ порождает дуги (v_s^1, v_t^2) для всех $s, t \in T(v)$, $s \neq t$.

Дугам q в (a),(b) приписываем пропускную способность $c(q) := c(e)$, а дугам q в (c), называемым *центральными*, — пропускную способность $c(q) := \infty$. Мы выделяем в Γ множество *источников* $T^1 := \{s^1 : s \in T\}$ и *стоков* $T^2 := \{s^2 : s \in T\}$ (обозначая s_s^i через s^i). Заметим, что отображения вершин $v_s^i \to v_s^{3-i}$ и дуг $(u_s^i, v_t^j) \to (v_t^{3-j}, u_s^{3-i})$ задают *косую симметрию* σ на Γ. Она естественно распространяется на орпути $Q = x_0 x_1 \ldots x_k$: (косо)симметричный орпуть $\sigma(Q)$ — это $\sigma(x_k)\sigma(x_{k-1}) \ldots \sigma(x_0)$. Показывается, что Γ не имеет орциклов.

Обозначим ω естественное отображение вершин и дуг Γ в вершины и ребра $\widetilde{G}$ (центральные дуги отображаются в соответствующие центральные вершины). Оно естественно распространяется на орпути. Ввиду (3.6), каждый допустимый путь в $\widetilde{G}$ порождает в Γ орпуть Q из T^1 в T^2, и мы имеем $P = \omega(Q)$. Справедливо более сильное свойство.

Лемма 3.3 *ω устанавливает взаимнооднозначное соответствие между множеством $\mathcal{Q}$ орпутей из T^1 в T^2 в орграфе Γ и множеством $\mathcal{P}$ допустимых T-путей в $\widetilde{G}$ (считая противоположно направленные пути в $\widetilde{G}$ различными).*

Это ключевое свойство конструкции двойного накрытия позволяет перейти от мультипотоков, текущим по допустимым путям, к потокам в Γ и доказать теорему 3.1. Возьмем оптимальный мультипоток f. Согласно (3.3)–(3.4), $\mathrm{supp}(f) \subseteq \mathcal{P}$, и f насыщает все ребра множества $E^+ := \{e \in \widetilde{E} : \gamma(e) > 0\}$. Для каждой дуги $b \in E_\Gamma$ определим $g(b)$ как сумму значений $f(\omega(Q))$ по всем орпутям $Q \in \mathcal{Q}$, содержащим b или $\sigma(b)$. Тогда g — поток из T^1 в T^2, и для каждой нецентральной дуги b выполняется $g(b) = g(\sigma(b)) = \zeta^f(\omega(b))$. Следовательно, g не превышает пропускных способностей в Γ и насыщает дуги множества $A := \omega^{-1}(E^+)$. Значит имеется *целочисленный* поток h из T^1 в T^2 с тем же свойством, т.е.

$$h(b) \le c(b) \text{ для всех } b \in E_\Gamma, \quad \text{и} \quad h(b) = c(b) \ \ (= c(\omega(b))), \text{ если } b \in A. \tag{3.7}$$

Заметим, что h уже не обязан быть симметричным, в отличие от g. Разложим h в сумму целочисленных потоков вдоль орпутей из T^1 в T^2, т.е. представим h как $\sum(\alpha(Q)\chi^Q : Q \in \mathcal{Q})$ для некоторого $\alpha : \mathcal{Q} \to \mathbf{Z}_+$ (разложение существует, так как в Γ нет орциклов). Теперь, полагая $f'(\omega(Q)) := \alpha(Q)/2$ для каждого $Q \in \mathcal{Q}$, получаем *полуцелочисленную* функцию f' на $\mathcal{P}$. Ввиду (3.7), для $e \in E$ и $\{b, b'\} = \omega^{-1}(e)$ имеем

$$\zeta^{f'}(e) = (h(b) + h(b'))/2 \le (c(b) + c(b'))/2 = c(e).$$

Следовательно, f' — мультипоток в (G, c), насыщающий ребра в E^+. Таким образом, f' удовлетворяет (3.3) и (3.4) и дает полуцелочисленное оптимальное решение (3.1), что и требуется.

3.3 Алгоритмы и дополнительные результаты. Первоначальное доказательство теоремы 3.1, данное в [4], обеспечивало псевдополиномиальный алгоритм нахождения полуцелочисленных оптимальных решений параметрической задачи (3.1) с полной схемой $H \simeq K_r$ сразу для всего спектра значений параметра p в случае положительных стоимостей a. В нем принцип преобразований прямых и двойственных решений — тот же, что и в параметрическом алгоритме Форда и Фалкерсона [FF] для максимального потока минимальной стоимости, и восходит к прямо-двойственному методу линейного программирования.

Алгоритм стартует с оптимальных решений $f \equiv 0$ и $\gamma \equiv 0$ для $p = 0$ и постепенно увеличивает значение параметра и перестраивает f и γ, поддерживая соотношения нежесткости (3.3)–(3.4). Итерация состоит из двух шагов: преобразования f и преобразования γ и p. На первом шаге для текущих p и γ строится допустимый подграф $\widetilde{G}$ (что сводится к решению $|T|$ задач о кратчайшем пути), строится двойное накрытие Γ над $\widetilde{G}$, находится целочисленный поток h в Γ, насыщающий дуги соотвующего множества $\omega^{-1}(E^+)$ и при этом имеющий максимальную возможную мощность. Определяемый h полуцелочисленный мультипоток в $\widetilde{G}$ делается новым текущим мультипотоком f. На втором шаге итерации с помощью минимального разреза в Γ определяется перестройка текущего γ, и соответственно увеличивается p. Оба шага выполняются эффективно, за полиномиальное от $|V|$ время, а число итераций, увеличивающее параметр "до бесконечности", не превышает $c(E)|V|$. Как результат, имеет место

Теорема 3.4 *Пусть схема H полная многодольная, и функция a положительная. Тогда существуют числа $0 = p_0 \le p_1 < \ldots < p_N$, полуцелочисленные мультипотоки*

$0 \equiv f_0, f_1, \ldots, f_N$ *для* G, H, c *и неотрицательные функции* $0 \equiv \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_N, \gamma_{N+1}$ *на* E *такие, что:* f_i *и* $(1-\epsilon)\gamma_i + \epsilon\gamma_{i+1}$ *— оптимальные решения задач (3.1) и (3.2) с параметром* $p = (1-\epsilon)p_i + \epsilon p_{i+1}$ *для всех* $i = 0, \ldots, N-1$ *и* $0 \le \epsilon \le 1$, *в то время как* f_N *и* $\gamma_N + \lambda\gamma_{N+1}$ *— оптимальные решения (3.1) и (3.2) с параметром* $p = p_N + \lambda$ *для любого* $\lambda \ge 0$. *При этом* $N \le c(E)|V|$, *и имеется полиномиальная от* $|V|$ *процедура преобразования* p_i, f_i, γ_i *в* $p_{i+1}, f_{i+1}, \gamma_{i+1}$ *(и* p_N, γ_N *в* γ_{N+1}*). В частности,* f_N *— полуцелочисленное оптимальное решение ЗМС для* G, H, c, a, *и оно находится за время* $O(c(E)Q(|V|))$, *где* $Q(n)$ *— некоторый полином.*

Замечание. Условие положительности a существенно для алгоритма (оно обеспечивает корректность построения орграфов Г), при этом целочисленности a, вообще говоря, не требуется. В [4] число N итераций (или линейных участков в теореме 3.4) дополнительно оценивается сверху экспонентой от $|V|$, а также величиной $a(E)$ в случае целочисленной a. Если a целочисленная, но допускает нулевые значения, то алгоритм применяется к положительной (возмущенной) функции a', где $a'(e) := a(e) + (4c(E)+1)^{-1}$, $e \in E$, и найденный на последней итерации мультипоток решает ЗМС для исходных стоимостей.

В [28] предложен модифицированный алгоритм, и получены следующие результаты.

Теорема 3.5 (i) *Для полной многодольной схемы* H *и целочисленной стоимостной функции* a *полуцелочисленное оптимальное решение (3.1) при фиксированном* p *находится в сильнополиномиальное время.*

(ii) *Если к тому же* p *целое, то двойственная задача (3.2) имеет* <u>*полуцелочисленное*</u> *оптимальное решение* γ, *и оно отыскивается в сильнополиномиальное время.*

Отметим, что сильнополиномиальный алгоритм в [28] использует метод эллипсоидов для решения некоторой программы. Однако в [31] разработан "чисто комбинаторный" алгоритм полиномиальной (хотя и не сильнополиномиальной) сложности для нахождения полуцелочисленного оптимального решения ЗМС(K_r).

$ 2 Случаи неограниченной дробности ЗМС и труднорешаемости ЦЗМС

Следствие 3.2 вместе со следующей теоремой, установленной в [17], дают точное значение дробности ЗМС(H) для всех схем H. Обозначим $\mathcal{H}^{\text{нпм}}$ множество графов без изолированных вершин, не являющихся полными многодольными.

Теорема 3.6 $\varphi(\text{ЗМС}(H)) = \infty$ *для каждой схемы* $H \in \mathcal{H}^{\text{нпм}}$.

Например, дробность ∞ имеет двухпродуктовая задача ЗМС($K_2 + K_2$). Доказательство теоремы сводится к рассмотрению трех конкретных схем, ввиду двух простых фактов.

Факт 1. Если схема $H' = (T', U')$ является порожденным подграфом схемы $H = (T, U)$, то $\varphi(\text{ЗМС}(H')) \le \varphi(\text{ЗМС}(H))$.

Факт 2. $H \in \mathcal{H}^{\text{нпм}}$ т. и т. т., когда H имеет порожденный подграф $H' = (T', U')$ с вершинами s, t, s', t' такой, что U' содержит $U_1 := \{st, s't'\}$ и содержится в $U_2 := U_1 \cup \{ss', st'\}$.

Таким образом, достаточно установить неограниченную дробность для минимальных (по взятию порожденных подграфов) схем в $\mathcal{H}^{\text{нпм}}$; ими являются (с точностью до изоморфизма) $H_1 = (T', U_1) \simeq K_2+K_2$, $H_2 = (T', U_2)$ и $H_3 = (T', U_1 \cup \{ss'\})$. В [17] для произвольного нечетного числа $k > 0$ строятся G, c, a такие, что:

(i) ЗМС для G, H_2, c, a имеет *единственное* оптимальное решение f;

(ii) $f(P) = 1/k$ для некоторого пути P;

(iii) $f(P) = 0$ для всех путей, соединяющих s и $\{s', t'\}$.

Следовательно, f определяет единственный оптимальный мультипоток f_i для каждой схемы H_i, $i = 1, 2, 3$, и f_i имеет дробность $\geq k$. Это дает $\varphi(\text{ЗМС}(H_i)) = \infty$.

Теперь перейдем к труднорешаемым случаям для целочисленной задачи. Они имеют место для того же множества схем, как показывает следующая теорема (см. [34]).

Теорема 3.7 *Для каждой фиксированной схемы $H \in \mathcal{H}^{\text{нпм}}$ ЦЗМС является NP-трудной уже при единичных пропускных способностях и нулевых стоимостях.*

Таким образом, ЦЗМС(H) для $H \in \mathcal{H}^{\text{нпм}}$ является сильно NP-трудной. Достаточно доказывать теорему для минимальных схем H_1, H_2, H_3 выше, ввиду следующего свойства.

Факт 3. Если схема H' является порожденным подграфом схемы H, то ЦЗМС для H' сводится к ЦЗМС для H; при этом число неполюсных вершин и максимальные значения пропускных способностей и стоимостей ребер не увеличиваются.

Чтобы доказать теорему для схем $H_i = (T', U_i)$, рассмотрим NP-полную задачу о целочисленном допустимом двухпродуктовом потоке (1.13) в разделе I. Добавим к G вершины s, t, s', t' (новые полюса), k параллельных ребер между s и s_1 и между t и t_1, и r параллельных ребер между s' и s_2 и между t' и t_2. Пусть $G' = (V', E')$ — полученный граф. Задача (1.13) имеет решение т. и т. т., когда максимальный целочисленный мультипоток f для $G', c' \equiv 1, H_1$ насыщает добавленные ребра, т.е. $\text{val}(f) = k + r$. Это же свойство верно для H_2, H_3. Поэтому (1.13) сводится к задаче о целочисленном максимальном мультипотоке для каждой схемы H_i, и, следовательно, к ЦЗМС(H_i) при нулевых стоимостях ребер.

$ 3 Эффективная разрешимость ЦЗМС с полной многодольной схемой

В свете теоремы 3.7, даже при единичных пропускных способностях ребер возможность эффективного решения целочисленной стоимостной задачи остается только для полных многодольных схем (в предположении P$\neq$NP). Эффективный алгоритм для этого случая действительно существует.

Теорема 3.8 *Максимальный целочисленной мультипоток минимальной стоимости для G, H, c, a может быть найден в сильнополиномиальное время, если схема H полная многодольная и $c \equiv 1$.*

Сильнополиномиальный алгоритм конструируется в [24] одновременно с доказательством основного теоретического результата — минимаксного соотношения для соответствующей параметрической задачи (теорема 3.9) (в сокращенном виде и с некоторыми техническими усовершенствованиями эти результаты излагаются также в [34]). Аналогично ЗМС, случай полной многодольной схемы сводится к случаю полной схемы (стягиванием полюсов каждой доли в один полюс), и далее мы рассматриваем ЦЗМС для $G = (V, E), H, c, a$, где H — полный граф K_T, $c(e) = 1$ для всех $e \in E$ и $a : E \to \mathbf{Z}_+$. Для краткости множество $\mathcal{P}$ попарно не пересекающихся по ребрам T-путей в G назовем (целочисленной) *упаковкой T-путей*, или просто *упаковкой*; упаковка с наибольшим числом путей $|\mathcal{P}|$ называется *максимальной*. В этих терминах наша задача — это:

(3.8) *Найти максимальную упаковку $\mathcal{P}$ T-путей, минимизирующую суммарную стоимость $a(\mathcal{P}) := \sum_{P \in \mathcal{P}} a(P)$.*

В частном случае $a \equiv 1$ (3.8) превращается в задачу о максимальной упаковке, покрывающей минимальное число ребер. Объединяя целевые функции, введем параметрическую задачу:

(3.9) *Для заданного $p \in \mathbf{R}_+$ (параметра) найти упаковку $\mathcal{P}$ T-путей, максимизирующую величину $\Psi(p, \mathcal{P}) := p|\mathcal{P}| - a(\mathcal{P})$.*

Она становится эквивалентной (3.8) при $p \geq a(E) + 1$. Эта задача и является основным объектом изучения. Для нее удается получить комбинаторную теорему двойственности и сильнополиномиальный алгоритм решения, из чего следует теорема 3.8.

Очевидно, минимум целевой функции $c\gamma = \gamma(E)$ двойственной задачи (3.2) для нецелочисленного параметрического аналога (3.1) дает верхнюю оценку для максимума Ψ в (3.9). Однако между $\max \Psi$ и $\min \gamma(E)$ может быть разрыв. Для уточнения верхней оценки вводятся следующие комбинаторные объекты.

Определение. Назовем *нечетным фрагментом* пару $\phi = (X_\phi, U_\phi)$, где $X_\phi \subseteq V - T$, и U_ϕ — нечетное подмножество ребер разреза $\delta_G(X_\phi)$.

С фрагментом ϕ связывается его *характеристическая функция* на E:

$$\chi_\phi(e) := \begin{cases} 1, & \text{если } e \in U_\phi, \\ -1, & \text{если } e \in \delta(X_\phi) - U_\phi, \\ 0 & \text{— для остальных ребер } e. \end{cases} \tag{3.10}$$

Тогда $\chi_\phi(E') \leq |U_\phi|$ для любого $E' \subseteq E$, и для каждого T-пути P число $\chi_\phi(P)$ (сумма $\chi_\phi(e)$ по ребрам e в P) — четное. Поэтому, по сравнению с нецелочисленными мультипотоками, нечетность $|U_\phi|$ влечет дополнительное неравенство (отсечение) для упаковок, а именно:

$$\sum (\chi_\phi(P) : P \in \mathcal{P}) \leq |U_\phi| - 1 \qquad \text{для любой упаковки } \mathcal{P}. \tag{3.11}$$

Множество нечетных фрагментов обозначим $\mathcal{F}$. Для $\beta : \mathcal{F} \to \mathbf{R}_+$ и $\gamma : E \to \mathbf{R}_+$ определим функцию длин ребер

$$\ell := \ell_{\beta,\gamma} := a + \gamma + \sum (\beta(\phi)\chi_\phi : \phi \in \mathcal{F}), \tag{3.12}$$

назовем пару (β,γ) *p-допустимой*, если ℓ неотрицательная и

$$\mathrm{dist}^{G,\ell}(st)\ge p \quad \text{для всех } s,t\in T,\ s\ne t, \tag{3.13}$$

и определим число

$$\Theta(\beta,\gamma):=\gamma(E)+\sum\nolimits_{\phi\in\mathcal{F}}\beta(\phi)(|U_\phi|-1). \tag{3.14}$$

Мы утверждаем, что Ψ и Θ связаны минимаксным соотношением, тем самым получая теорему двойственности для параметрической задачи (3.9).

Теорема 3.9 *Для любого $p\ge 0$,*

$$\max\Psi(p,\mathcal{P})=\min\Theta(\beta,\gamma), \tag{3.15}$$

где максимум берется по всем упаковкам $\mathcal{P}$, а минимум — по всем p-допустимым (β,γ).

Замечание. При нулевых стоимостях (3.8) вырождается в задачу о максимальной упаковке T-путей в графе. Теорема Ловаса–Черкасского (см. п. 2.2 раздела II) выражает величину $|\mathcal{P}|$ максимальной упаковки T-путей в G через полусумму минимальных мощностей однополюсных разрезов в случае, когда степени всех неполюсных вершин четные. Для общего графа $G=(V,E)$ задача более сложная; Мадер [Ma] установил, что

$$\max|\mathcal{P}|=\frac{1}{2}\min\{\sum\nolimits_{s\in T}\delta_G(Y_s)-\eta\}, \tag{3.16}$$

где минимум берется по всем системам $\{Y_s : s\in T\}$ попарно не пересекающихся подмножеств в V таких, что $Y_s\cap T=\{s\}$, и η — число компонент подграфа, порожденного $V-W$, которые соединены в G нечетным числом ребер с $W:=\cup(Y_s : s\in T)$. В [24] объясняется, как получить (3.16) из (3.15) при достаточно большом p. Отметим, что доказательство теоремы Мадера было неалгоритмическим, и до появления работы [24] эффективный алгоритм нахождения максимальной упаковки T-путей не был известен.

Тот факт, что Θ дает верхнюю оценку для Ψ, можно увидеть из следующей цепочки соотношений для упаковки $\mathcal{P}$ и p-допустимой пары (β,γ):

$$\begin{aligned}
\Psi(p,\mathcal{P}) &= \sum\nolimits_{P\in\mathcal{P}}(p-a(P)) & \\
&\le \sum\nolimits_{P\in\mathcal{P}}\Big(\gamma(P)+\sum\nolimits_{\phi\in\mathcal{F}}\beta(\phi)\chi_\phi(P)\Big) && \text{(ввиду (3.12) и (3.13))}\\
&\le \gamma(E)+\sum\nolimits_{\phi\in\mathcal{F}}\beta(\phi)\sum\nolimits_{P\in\mathcal{P}}\chi_\phi(P) && \text{(так как } \mathcal{P} \text{ – упаковка, и } \gamma\ge 0)\\
&\le \gamma(E)+\sum\nolimits_{\phi\in\mathcal{F}}\beta(\phi)(|U_\phi|-1)=\Theta(\beta,\gamma). && \text{(ввиду (3.11) и (3.14))}
\end{aligned}$$

Доказательство точности данной оценки (весьма длинное) вовлекает главным образом комбинаторные идеи и средства. Мы поясним только первый (элементарный) шаг доказательства. Скажем, что тройка $(\mathcal{P},\beta,\gamma)$ допустимых объектов для данного p — *минимаксная*, если $\Psi(p,\mathcal{P})=\Theta(\beta,\gamma)$, и при этом носитель β образует *гнездовое семейство*. Последнее означает, что для различных фрагментов $\phi,\phi'\in\mathrm{supp}(\beta)$ либо $X_\phi\cap X_{\phi'}=\emptyset$, либо $X_\phi\subset X_{\phi'}$, либо $X_{\phi'}\subset X_\phi$. [В частности, $|\mathrm{supp}(\beta)|=O(|V|)$, и поэтому функция β задается в компактном виде указанием ее носителя и значений на нем, что существенно для алгоритмической эффективности.] Для $p = 0$ минимаксную тройку образуют $\mathcal{P} = \emptyset$, $\beta \equiv 0$, $\gamma \equiv 0$. Показывается, что минимаксные тройки существуют для всех p, если возможен "сдвиг" из каждой минимаксной тройки. Более строго, теорема 3.9 выводится из следующей "локальной" теоремы.

Теорема 3.10 *Пусть для $p \in \mathbf{R}_+$ имеется минимаксная тройка $(\mathcal{P}, \beta, \gamma)$. Тогда либо* (i) *существует упаковка $\mathcal{P}'$ такая, что $|\mathcal{P}'| = |\mathcal{P}| + 1$, и $(\mathcal{P}', \beta, \gamma)$ — минимаксная тройка для p, либо* (ii) *существуют $\beta' : \mathcal{F} \to \mathbf{R}_+$ и $\gamma' : E \to \mathbf{R}_+$ такие, что $(\mathcal{P}, \beta', \gamma')$ — минимаксная тройка для некоторого $p' > p$.*

Теорема 3.10 доказывается конструктивно. Для текущих $p, \mathcal{P}, \beta, \gamma$ сперва пытаемся построить соответствующую упаковку большей мощности, т.е. реализовать случай (i). Если это невозможно ($\mathcal{P}$ максимально для данных p, β, γ), то имеют место дополнительные структурные свойства, которые позволяют преобразовать (β, γ), реализуя случай (ii). Показывается, что в обоих случаях преобразования осуществимы за полиномиальное от $|V|$ число действий (здесь учитывается компактное задание β). Кроме того, преобразования организуются так, что в порождаемом ими процессе ситуации (i) и (ii) чередуются. Учитывая $|\mathcal{P}| \le |E|$, мы получаем эффективный алгоритм решения (3.9) для всего спектра значений параметра (ср. теорему 3.4).

Теорема 3.11 *Существуют числа $0 = p_0 \le p_1 < \ldots < p_k$, упаковки T-путей $\emptyset = \mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_k$, функции $0 \equiv \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k, \beta_{k+1}$ на $\mathcal{F}$ и функции $0 \equiv \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_k, \gamma_{k+1}$ на E такие, что:* (a) *$k \le |E|$ и $|\mathcal{P}_0| < |\mathcal{P}_1| < \ldots < |\mathcal{P}_k|$;* (b) *для $i = 0, \ldots, k-1$ и $0 \le \epsilon \le 1$ упаковка $\mathcal{P}_i$ и пара $(1-\epsilon)(\beta_i, \gamma_i) + \epsilon(\beta_{i+1}, \gamma_{i+1})$ образуют минимаксную тройку для $p = (1-\epsilon)p_i + \epsilon p_{i+1}$;* (c) *для любого $\lambda \ge 0$ упаковка $\mathcal{P}_k$ и пара $(\beta_k, \gamma_k) + \lambda(\beta_{k+1}, \gamma_{k+1})$ образуют минимаксную тройку для $p = p_k + \lambda$. Указанные объекты строятся в сильнополиномиальное время.*

В частности, последняя упаковка $\mathcal{P}_k$ дает оптимальное решение для (3.8). Версия алгоритма для ЦЗМС с полной многодольной схемой строит максимальный целочисленный мультипоток минимальной стоимости в псевдополиномиальное время $O(c(E)Q(|V|))$, где $Q(n)$ — полином.

\$ 4 (T,d)-соединения минимального веса

Для графа $G = (V, E)$ и четного множества $T \subseteq V$ полюсов подмножество ребер $B \subseteq E$ называют *T-соединением* (T-join), если оно реализуется упаковкой $\mathcal{P}$ (простых) T-путей и циклов в G (т.е. $B = \cup(P : P \in \mathcal{P})$ такой, что каждый полюс является концом ровно одного пути. Это эквивалентно тому, что степень $\deg_B(v)$ вершины $v \in V$ в подграфе (V, B) — нечетная т. и т. т., когда $v \in T$. Задача о нахождении T-соединения B *минимального веса* $w(B)$ для заданной функции $w : E \to \mathbf{Z}_+$ весов ребер весьма популярна в комбинаторной оптимизации и имеет важные применения (в частности, к ней сводится известная задача "о китайском почтальоне": найти замкнутый маршрут минимальной длины, проходящий через все ребра графа). Эдмондс и Джонсон [EJ] нашли эффективный алгоритм ее решения (с временной оценкой $O(|V|^4)$) и показали, что блокером множества T-соединений является множество минимальных по включению T-*разрезов* — разрезов $\delta_G(X)$ с нечетным $|X \cap T|$. В полиэдральных терминах это равносильно тому, что

(3.17) доминант множества T-соединений образован векторами $x \in \mathbf{R}_+^E$, удовлетворяющими $x(\delta(X)) \geq 1$ для всех T-разрезов $\delta(X)$.

[Более быстрый алгоритм, с оценкой $O(|T||E|\log|V|)$, для нахождения T-соединения минимального веса и оптимального двойственного объекта — максимальной полуцелочисленной упаковки T-разрезов предложен в [14].]

Мы вводим естественное обобщение T-соединений. Пусть $T \subseteq V$, $d : T \to \mathbf{Z}_+$ (функция *требований* на полюсах), и суммарное требование $d(T)$ четное.

Определение. Подмножество $B \subseteq E$ называется (T,d)-*соединением*, если оно реализуется упаковкой T-путей и циклов в G такой, что каждый полюс $s \in T$ является концом ровно $d(s)$ путей.

При единичных требованиях ($d \equiv 1$) это совпадает с определением T-соединения. Обозначим $\mathcal{B}_d$ множество (T,d)-соединений в G, $\mathrm{conv}(\mathcal{B}_d)$ — выпуклую оболочку характеристических векторов (T,d)-соединений в $\mathbf{R}^E$, и $\mathrm{dom}(\mathcal{B}_d)$ — доминант $\mathrm{conv}(\mathcal{B}_d) + \mathbf{R}_+^E$. Мы применяем результаты предыдущего параграфа для эффективного решения *задачи о* (T,d)-*соединении минимального веса*:

(3.18) *Для G, T, d и заданной функции $w : E \to \mathbf{Z}_+$ весов ребер найти $B \in \mathcal{B}_d$ с минимальным весом $w(B)$,*

и для описания доминанта (T,d)-соединений. Мы даем краткое изложение этих результатов из [37].

Образуем граф G' добавлением к G копии s' каждой вершины $s \in T$ и проведением d_s параллельных ребер между s и s'. Ребрам e в G припишем стоимости $a(e) := w(e)$, а добавленным ребрам e — стоимость $a(e) := 0$. Положим $T' := \{s' : s \in T\}$. Тогда (3.18) сводится к задаче (3.8) для G', T', a. [Если $\mathcal{B}_d \neq \emptyset$, то каждое минимальное по включению (T,d)-соединение B в G соответствует максимальной упаковке $\mathcal{P}$ T'-путей в G', и справедливо $|\mathcal{P}| = d(T)/2$ и $w(B) = a(\mathcal{P})$.] Таким образом, теорема 3.8 дает

Следствие 3.12 *При неотрицательных весах ребер задача о (T,d)-соединении минимального веса разрешима в сильнополиномиальное время.*

Далее, ввиду неотрицательности w, минимальный вес (T,d)-соединения равен $\min\{wx : x \in \mathrm{dom}(\mathcal{B}_d)\}$, т.е. (3.18) эквивалентна задаче минимизации линейной функции wx на доминанте (T,d)-соединений. Типичная проблема полиэдральной комбинаторики заключается в выяснении структуры гиперграней выпуклых оболочек, доминантов и др. многогранных множеств, связанных с комбинаторными объектами того или иного вида. Явное описание этих множеств линейными неравенствами во многих случаях позволяет эффективно решать соответствующие оптимизационные задачи, применяя методы линейного программирования и др. Примером такого описания служит (3.17) для доминанта T-соединений. В общем случае d наше описание $\mathrm{dom}(\mathcal{B}_d)$ (в теореме 3.13) имеет несколько иной вид: это сумма

Минковского некоторого явно описанного многогранника и положительного ортанта. Оно выводится при помощи указанного выше сведения и минимаксного соотношения (3.15) для параметрической задачи с G', T', a при большом p. При сведении нечетные фрагменты могут переходить в более общие объекты.

Определение. Назовем *d-фрагментом* пару $\phi = (X_\phi, U_\phi)$, где $X_\phi \subseteq V$, $U_\phi \subseteq \delta(X_\phi)$, и $|U_\phi| + d(X_\phi \cap T) \equiv 1 \pmod 2$.

Множество d-фрагментов обозначим $\mathcal{F}^d$ и определим χ_ϕ как в (3.10). Можно видеть, что $\chi_\phi(B) \leq |U_\phi| - 1$ для любых $B \in \mathcal{B}_d$ и $\phi \in \mathcal{F}^d$ (ср. (3.11)). Другим естественным неравенством является $|B \cap \delta(Y)| \geq d(s) - d(Y \cap T - s)$ для любого $Y \subseteq V$ и $s \in T \cap Y$ (иначе требование $d(s)$ очевидно не реализуется). Перенося эти неравенства на вектора, определим многогранник $D(G, T, d)$ как множество векторов $x \in \mathbf{R}^E$, подчиняющихся ограничениям

(i) $\quad 0 \leq x(e) \leq 1 \quad$ для всех $e \in E$,

(ii) $\quad \chi_\phi x \leq |U_\phi| - 1 \quad$ для всех $\phi \in \mathcal{F}^d$,

(iii) $\quad x(\delta(Y)) \geq d(s) - d(Y \cap T - s) \quad$ для всех $Y \subseteq V$ и $s \in T \cap Y$.

Теорема 3.13 $\mathrm{conv}(\mathcal{B}_d) \subseteq D(G, T, d))$ *и* $\mathrm{dom}(\mathcal{B}_d) = D(G, T, d) + \mathbf{R}_+^E$.

Замечание. Многогранник $D(G, T, 1)$ совпадает с выпуклой оболочкой T-соединений. В [37] показано, что при $d \not\equiv 1$ $\; D(G, T, d)$ и $\mathrm{conv}(\mathcal{B}_d)$ могут не совпадать. Явных описаний $\mathrm{conv}(\mathcal{B}_d)$ и $\mathrm{dom}(\mathcal{B}_d)$ через линейные неравенства не известно. Также открыт вопрос о сложности задачи (3.18) при произвольных $w : E \to \mathbf{Z}$.

Другим объектом, исследуемым в [37], является *максимальное соединение*. Так называется подмножество $B \subseteq E$, реализуемое упаковкой T-путей и циклов в G, в которой число T-путей максимально возможное. Обозначим это число $\nu(G, T)$ и обозначим $\mathcal{B}^{\max}$ множество максимальных соединений для G, T. Задача о нахождении максимального соединения B минимального веса $w(B)$ для заданной функции $w : E \to \mathbf{Z}_+$ фактически совпадает с (3.8), и минимаксное соотношение (3.15) позволяет получить описание доминанта для множества максимальных соединений. Здесь *T-семейством* называется семейство $\pi = \{Y_s : s \in T\}$ попарно не пересекающихся подмножеств $Y_s \subseteq V$ таких, что $Y_s \cap T = \{s\}$, и ξ_π обозначает сумму характеристических функций разрезов $\delta_G(Y_s)$.

Теорема 3.14 $\mathrm{conv}(\mathcal{B}^{\max}) \subseteq Q(G, T)$ *и* $\mathrm{dom}(\mathcal{B}^{\max}) = Q(G, T) + \mathbf{R}_+^E$, *где* $Q(G, T)$ — *множество векторов* $x \in \mathbf{R}^E$, *удовлетворяющих*

(i) $\quad 0 \leq x(e) \leq 1 \quad$ *для всех* $e \in E$,

(ii) $\quad \chi_\phi x \leq |U_\phi| - 1 \quad$ *для всех нечетных фрагментов* ϕ,

(iii) $\quad \xi_\pi x \geq 2\nu(G, T) \quad$ *для всех T-семейств* π.

IV. Задачи об упаковках полуметрик

Раздел IV посвящен задачам о взвешенных упаковках полуметрик. Первая из них — это задача о реализации расстояний (ЗРР) (см. с. 12) путем упаковки полуметрик специального вида. Как упоминалось во Введении, она связана отношением полярной двойственности с задачей о допустимом мультипотоке (простейший пример дает связь задачи о кратчайшем пути между двумя вершинами и задачи о потоке заданной мощности). Параграф 1 исследует разрешимые случаи ЗРР, когда пакуемое семейство Ω образовано разрезными полуметриками. Здесь также представлены результаты по смежной проблеме вложимости метрики в пространство ℓ_1. Результаты о ЗРР с семействами Ω, включающими неразрезные полуметрики, излагаются в \$ 2. Параграф 3 посвящен задаче о максимальной упаковке разрезных полуметрик заданной конфигурации и описывает ситуации, когда соответствующие семейства разрезов обладают стандартным и обобщенным MFMC-свойствами. В разделе представлены и другие теоретические результаты по упаковкам полуметрик, а также результаты об алгоритмической сложности для рассматриваемых задач.

Результаты по данному разделу опубликованы в работах [7, 9, 11, 13, 14, 19, 20, 26].

\$ 1 Реализация расстояний путем упаковки разрезных полуметрик

Напомним, что ЗРР задается связным графом $G=(V,E)$, функцией $\ell : E \to \mathbf{Z}_+$ длин ребер, конечным множеством Ω полуметрик на V и множеством пар $U \subseteq \binom{V}{2}$. Требуется упаковать Ω в сеть (G,ℓ), достигая расстояний на всех парах в U, т.е. найти функцию $\lambda : \Omega \to \mathbf{R}_+$, удовлетворяющую (0.3) и (0.4), или установить невозможность такой упаковки. Граф (T,U), порожденный U, будем обозначать H_U, а его вершины будем считать полюсами в G.

4.1 Связь ЗРР и ЗДМ. ЗРР связана через полярную двойственность с задачей о допустимом мультипотоке. Более точно, при фиксированных $G=(V,E)$ и $H=(T,U)$ множество K пар (c,d), для которых ЗДМ с G,H,c,d имеет решение, образует выпуклый замкнутый конус в $\mathbf{R}^E \times \mathbf{R}^U$. Используя соответствие между описанием K через линейные неравенства и описанием полярного конуса K^* через образующие, а также соотношение $(K^*)^* = K$, можно вывести следующее свойство (указанное в [20] для общего случая Ω):

Утверждение 4.1 *Для G,Ω,U как выше следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *ЗРР имеет решение при любом $\ell : E \to \mathbf{Z}_+$;*

(ii) *при любых $c : E \to \mathbf{Z}_+$ и $d : U \to \mathbf{Z}_+$ ЗДМ для сети (G,c), потоковой схемы H_U и требований d имеет решение, если неравенство $c\cdot m \geq d\cdot m$* (ср. (1.2) в разделе I) *выполнено для каждого $m \in \Omega$.*

Этот род двойственности, позволяющий связать разрешимые случаи ЗРР с критериями разрешимости ЗДМ, был первоначально указан в [Se2], [11], [Sch2] для ряда случаев, где в качестве Ω фигурирует множество $\mathcal{C}_V$ всех разрезных полуметрик на V. В частности, теорема Папернова, упомянутая в разделе I, дает

Следствие 4.2 *ЗРР для $G = (V, E), \ell, U$ и $\Omega := \mathcal{C}_V$ имеет решение, если граф H_U есть K_4, C_5 или объединение двух звезд.*

Отметим, что из теоремы Папернова и утверждения 4.1 также следует, что если $H_U \notin \{K_4, C_5\} \cup \mathcal{Z}_2$, то существуют G, ℓ, для которых ЗРР не имеет решения при $\Omega = \mathcal{C}_V$. В то же время из следствия 1.4 и теоремы 1.13 получаем

Следствие 4.3 *Пусть $\mathcal{M}_V^{2,3}$ обозначает множество всех (2,3)-полуметрик на V. Тогда ЗРР для $G = (V, E), \ell, U$ и $\Omega := \mathcal{C}_V \cup \mathcal{M}_V^{2,3}$ имеет решение в следующих случаях:*

(i) *G произвольный, и $H_U \subseteq K_5$;*

(ii) *G плоский, и каждая пара в U лежит на какой-либо из трех выделенных граней.*

Отметим, что двойственность ЗРР и ЗДМ может применяться в обе стороны; например, следствие 1.4 было получено в [15] как раз при помощи показанной разрешимости ЗРР для случая (i) в следствии 4.3, и аналогично для (ii) в [26]. Подчеркнем также, что эта двойственность ничего не говорит о дробности для данных задач — во всех случаях речь идет лишь о наличии рациональных решений. Для получения более сильных результатов о существовании решений ограниченной дробности каждый раз требуются дополнительные усилия. Проблема дробности ЗРР для $H \in \{K_4, C_5\} \cup \mathcal{Z}_2$ будет рассмотрена в п. 4.3, а для случаев в следствии 4.3 — в \$ 2. Прежде, чем перейти к этой теме мы обсудим связь между упаковками и разложениями полуметрик.

4.2 ℓ_1-полуметрики. В ЗРР вместо функции ℓ длин ребер можно эквивалентно рассматривать ограничение функции $\mathrm{dist}^{G,\ell}$ на E. Если при этом граф $G = (V, E)$ полный, ЗРР превращается в задачу нахождения для заданной полуметрики $m \in \mathcal{M}_V$ таких $m_1, \ldots, m_k \in \Omega$ и $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbf{R}_+$, что

$$(4.1) \qquad \begin{array}{ll} \text{(i)} & \lambda_1 m_1 + \ldots + \lambda_k m_k \le m, \qquad \text{и} \\ \text{(ii)} & \lambda_1 m_1(st) + \ldots + \lambda_k m_k(st) = m(st) \qquad \text{для всех } st \in U \end{array}$$

(мы допускаем вещественно-значные m). Интересна ситуация, когда m *разлагается* в н.л.к. полуметрик в Ω, т.е. имеются $m_1, \ldots, m_k$ и $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, дающие равенство в (i).

В случае $\Omega = \mathcal{C}_V$ разложимость m означает принадлежность *разрезному конусу* CUT_V — подконусу в $\mathcal{M}_V$, являющемуся конической оболочкой разрезных полуметрик на V. Это эквивалентно тому, что m — *ℓ_1-полуметрика*, т.е. для некоторого k существует изометрическое погружение (V, m) в пространство $\mathbf{R}^k$ с метрикой $\sum_{i=1}^k |x_i - y_i|$, $x, y \in \mathbf{R}^k$. В теории метрических пространств изучаются многие аспекты ℓ_1-метрик (см., например, обзор в [DL]). Одна из актуальных задач заключается в распознавании, является ли заданная рациональная конечная полуметрика ℓ_1-полуметрикой. В общем случае эта задача оказывается труднорешаемой. Это следует из полиномиальной эквивалентности задач о *принадлежности* и *отделимости* для определенного класса многогранников и конусов (к которому относится и CUT_V), см. [GLS], и следующего результата в [11].

Теорема 4.4 *Задача распознавания, принадлежит ли рациональная (полу)метрика m конусу CUT_V, и если нет, то предъявления вектора $c \in \mathbf{R}^{\binom{V}{2}}$ такого, что $c \cdot m < 0$ и $c \cdot m' \geq 0$ для всех $m' \in \mathrm{CUT}_V$ (т.е. задача отделимости для CUT_V) является NP-трудной при нефиксированных V.*

Теорема доказывается сведением NP-полной задачи о максимальном разрезе: для графа $G = (V, E)$, вершин s, t, функции $w : E \to \mathbf{Z}_+$ и числа $k \in \mathbf{Z}_+$ выяснить существование $X \subset V$ такого, что $s \in X \not\ni t$ и $w(\delta(X)) \geq k$. Можно считать граф G полным. Для $xy \in E$ определим $g(xy)$ равным $-w(xy)$ при $x, y \in V - \{s,t\}$, равным $-w(xy) + M$ при $x \in \{s,t\}, y \in V - \{s,t\}$, и равным $-w(xy) - M(|V|-2) + k - 1$ при $xy = st$, где M — достаточно большое положительное число. Тогда $g(\delta(X)) = k - 1 - w(\delta(X))$, если st принадлежит разрезу $\delta(X)$, и $g(\delta(X)) \geq 0$ — иначе. Следовательно, требуемое X с $w(\delta(X)) \geq k$ существует т. и т. т., когда для $\Delta := \min\{g\xi : \xi = \rho/\rho(E),\ \rho \in \mathcal{C}_V\}$ выполняется $\Delta < 0$. Таким образом, задача минимизации линейной функции $g\xi$ на многограннике $Q := \mathrm{CUT}_V \cap \{\xi' \in \mathbf{R}^E : \xi'(E) \leq 1\}$ является NP-трудной. Тогда и задача отделимости для Q — NP-трудная (в силу полиномиальной эквивалентности задач оптимизации и отделимости в версии [GLS] метода эллипсоидов для линейного программирования [Kh]). Отсюда следует NP-трудность задачи отделимости для конусов CUT_V.

Замечание. Полярный конус $(\mathrm{CUT}_V)^*$ составлен векторами $\eta \in \mathbf{R}^{\binom{V}{2}}$, для которых задача о допустимом мультипотоке в сети (K_V, c) со схемой $H = K_V$ и требованиями d такими, что $c - d = \eta$, удовлетворяет $c \cdot m \geq d \cdot m$ для всех разрезных полуметрик m (при этом задача может не иметь решение). Ввиду полиномиальной эквивалентности задач отделимости для взаимно полярных конусов определенного класса (см. [GLS]), из теоремы 4.4 получаем

Следствие 4.5 *Задача определения выполнимости разрезного условия в ЗДМ по всем разрезам сети* ((1.4) в разделе I) *является NP-трудной.*

Вместе с тем наши результаты об упаковках разрезных полуметрик позволяют показать ℓ_1-погружаемость и эффективно решать задачу разрезного разложения для нетривиального класса полуметрик. Следуя [Lom1], назовем *графом антиподов* полуметрики m на V минимальный граф $H = (T, U)$ такой, что для любых $x, y \in V$ существует $st \in U$, удовлетворяющее $m(sx) + m(xy) + m(yt) = m(st)$. Для такого H из выполнения (4.1) следует равенство $\lambda_1 m_1 + \ldots + \lambda_k m_k = m$. Таким образом, из следствия 4.2 мы получаем первую часть в следующем утверждении.

Следствие 4.6 *Если полуметрика m имеет граф антиподов вида K_4, C_5 или объединения двух звезд, то m — ℓ_1-полуметрика. Если при этом m циклически четная, то m представима как неотрицательная целочисленная комбинация разрезных полуметрик, и соответствующее разложение строится в сильнополиномиальное время.*

Вторая часть в этом утверждении будет следовать из теорем 4.7 и 4.10 в п. 4.3. Здесь и далее целочисленная функция ℓ на множестве $E \subseteq \binom{V}{2}$ называется *циклически четной*, если длина $\ell(C)$ каждого простого цикла C в (V,E) — четная. Для полуметрик m на V это равносильно четности $m(xy)+m(yz)+m(zx)$ для всех $x,y,z \in V$.

4.3 Целочисленные упаковки разрезных полуметрик. Мы усиливаем следствие 4.2 следующим образом (см. [11]).

Теорема 4.7 *Пусть функция ℓ длин ребер графа $G=(V,E)$ циклически четная, и граф H_U есть K_4, C_5 или объединение двух звезд. Тогда ЗРР для $G,\ell,\mathcal{C}_V,U$ имеет* <u>*целочисленное*</u> *решение. Таким образом, ЗРР для данных Ω,U имеет дробность ≤ 2.*

Идея доказательства теоремы заключается в возможности решении задачи для $H_U \in \{K_4,C_5\}$ в два этапа (случай объединения двух звезд сводится к случаю $H \simeq K_2+K_2$, что является подграфом K_4). Оказывается, можно сначала решить задачу на множестве полюсов T, получая целочисленное "предрешение", а затем преобразовать последнее в целочисленное решение исходной задачи. Более подробно, сначала рассматривается ЗРР для $K_T,\mu,\mathcal{C}_T,U$, где μ — ограничение полуметрики $\mathrm{dist}^{G,\ell}$ на множество T. Циклическая четность ℓ влечет циклическую четность μ. Для этой задачи малого размера непосредственными комбинаторными построениями показывается

Лемма 4.8 *Если $H=(T,U)$ есть K_4 или C_5, и полуметрика μ на T циклически четная, то найдутся подмножества $A_1,\dots,A_k \subset T$ и числа $\alpha_1,\dots,\alpha_k \in \mathbf{Z}_+$ такие, что*

$$\text{(4.2)}\qquad \begin{array}{ll} \text{(i)} & \alpha_1\mu_1+\ldots+\alpha_k\mu_k \le \mu, \\ \text{(ii)} & \alpha_1\mu_1(st)+\ldots+\alpha_k\mu_k(st)=\mu(st) \qquad \textit{для всех } st \in U, \end{array}$$

где μ_i обозначает разрезную полуметрику $\rho_T^{A_i}$. Более того, множество $\mathcal{A} := \{A_1,\dots,A_k\}$ 2-ламинарное (см. п. 2.3 в разделе II). *Указанные $\mathcal{A}$ и α строятся за время $O(1)$.*

На втором этапе полученное "предрешение" $(\mathcal{A},\alpha)$ перестраивается в требуемую упаковку для $G,\ell,\mathcal{C}_V,U$. В общем виде решаемая задача формулируется так.

(ЗУРТ) *Задача упаковки разрезных полуметрик с заданными требованиями*: Для связного графа $G=(V,E)$ с длинами $\ell: E \to \mathbf{Z}_+$, множества полюсов $T \subseteq V$, семейства $\mathcal{A}=\{A_1,\dots,A_k\}$ подмножеств в T и требований $\alpha_1,\dots,\alpha_k \in \mathbf{Z}_+$ найти упаковку $\lambda: \mathcal{C}_V \to \mathbf{R}_+$ в (G,ℓ), удовлетворяющую

$$\sum(\lambda(m')m' : m' \in \mathcal{C}_V(A_i)) = \alpha_i \qquad \text{для } i=1,\dots,k,$$

где $\mathcal{C}_V(A_i)$ — множество разрезных полуметрик $m'=\rho_V^X$ с $X \cap T = A_i$.

Очевидным необходимым условием разрешимости ЗУРТ является выполнение

$$\text{(4.3)}\qquad \alpha_1\rho_T^{A_1}(st)+\ldots+\alpha_k\rho_T^{A_k} \le \mathrm{dist}^{G,\ell}(s,t) \qquad \text{для всех } st \in \tbinom{T}{2},$$

и $\mathcal{A}$ называется *хорошо пакуемым*, если для любых G,ℓ,α, удовлетворяющих (4.3), задача имеет решение. Мы устанавливаем следующий результат о ЗУРТ (см. [7, 9]).

Теорема 4.9 (i) *Семейство $\mathcal{A} \subset 2^T$ хорошо пакуемое т. и т. т., когда $\mathcal{A}$ 2-ламинарное.*

(ii) *ЗУРТ имеет целочисленное решение λ, если $\mathcal{A}$ 2-ламинарное и функция ℓ циклически четная.*

Замечание. Сравнивая эту теорему с теоремой 2.8 в разделе II, можно видеть, что хорошая пакуемость в ЗУРТ и запираемость в мультипотоковой задаче о запирании разрезов имеют место для одних и тех же семейств $\mathcal{A}$. Это совпадение не случайное: ЗУРТ и ЗЗР связаны полярной двойственностью (подобно ЗДМ и ЗРР). В [9] соответствие такого рода устанавливается в общем виде. В [7, 9] указана более широкая сфера приложений ЗУРТ и теоремы 4.9.

Доказательство (ii) теоремы 4.9 дается вместе с гриди-алгоритмом, который строит требуемую целочисленную упаковку за время $O(|\mathcal{A}||T||V|\beta_{|V|,|E|})$, где $\beta_{n,q}$ — время решения задачи о кратчайшем пути в сети с n вершинами и q ребрами. Теперь доказательство теоремы 4.7 завершается применением теоремы 4.9 к данному ℓ и семейству $\{A_1, \dots, A_k\}$ с требованиями $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ как в лемме 4.8. В нашем случае (4.2)(i) эквивалентно (4.3), а (4.2)(ii) вместе с равенствами в ЗУРТ дают (0.4). В результате получаем следующее (см. [11]).

Теорема 4.10 *Целочисленное решение ЗРР для $G, \ell, \mathcal{C}_V, U$ как в теореме 4.7 находится за время $O(|V|\beta_{|V|,|E|})$.*

4.4 Упаковки разрезных полуметрик специального вида. Выше мы имели дело со случаями ЗРР, в которых допускалось участие в упаковке любой разрезной полуметрики на основном множестве V. Сеймур рассмотрел задачу о реализации расстояний упаковками разрезов определенного вида. Она эквивалентна ЗРР для $G = (V, E), \ell, \mathcal{C}_{V,U}, U$, где $U \subseteq \binom{V}{2}$, и $\mathcal{C}_{V,U}$ обозначает множество разрезных полуметрик ρ_V^X таких, что $\rho_V^X(st) = 1$ ровно для одной пары $st \in U$. Эта задача близко связана с задачей построения T-соединения минимального веса и максимальной упаковки нечетно-полюсных разрезов, и из теоремы Эдмондса и Джонсона [EJ] выводится, что: (i) ЗРР для $G, \ell, \mathcal{C}_{V,U}, U$ имеет решение т. и т. т., когда для каждого цикла C графа $(V, E \cup U)$ выполняется

$$\ell(C \cap E) \geq \sum (\mathrm{dist}^{G,\ell}(st) : st \in C \cap U), \tag{4.4}$$

и (ii) при целочисленном ℓ разрешимая задача имеет полуцелочисленное решение. Сеймур усилил свойство (ii).

Теорема 4.11 [Se7] *Если функция ℓ циклически четная, и (4.4) выполняется для всех циклов C, то ЗРР для $G, \ell, \mathcal{C}_{V,U}, U$ имеет целочисленное решение.*

Однако [Se7] не дает эффективного метода решения. В [14] мы предлагаем альтернативное доказательство теоремы. Оно проводится конструктивными средствами и обеспечивает эффективный алгоритм проверки разрешимости (и вообще отсутствия отрицательного цикла во взвешенном неориентированном графе) и построения требуемой упаковки. Эти доказательство и алгоритм получаются как приложения соответствующих результатов в [14] для задачи Эдмондса и Джонсона. Не вдаваясь в детали алгоритма, отметим только, что на его заключительном этапе требуемая упаковка строится путем решения ЗУРТ для G, ℓ, ламинарного семейства $\mathcal{A}$ и целочисленных требований α.

Теорема 4.12 *Пусть T — множество вершин в $G = (V, E)$, встречающихся в нечетном числе пар в U, и пусть функция ℓ циклически четная. Существует алгоритм с временной оценкой $O(|T||E|\log|V| + |T|^3 \log|T|)$, который либо находит целочисленное решение ЗРР для $G, \ell, \mathcal{C}_{V,U}, U$, либо предъявляет цикл C, нарушающий (4.4).*

$ 2 Упаковки разрезных и (2,3)-полуметрик, реализующие расстояния

Следствие 4.3 указывает два случая G, U, для которых задача о реализации расстояний может не иметь решения, если использовать для упаковки только разрезные полуметрики. [Простейший пример для обоих случаев дают граф $G = (V, E) \simeq K_{2,3}$ с единичными длинами ребер и множество $U = \binom{V}{2}$; здесь реализовать все десять расстояний упаковкой только разрезных полуметрик невозможно.] При добавлении (2,3)-полуметрик задача становится разрешимой. Более того, аналогично разрезным случаям выше существуют целочисленные решения при циклически четных длинах ребер.

4.5 ЗРР для $H_U \simeq K_5$. Мы получаем следующий результат (см. [26]).

Теорема 4.13 *Пусть $H_U \simeq K_5$, и функция ℓ длин ребер G циклически четная. Тогда ЗРР для G, ℓ, Ω, U имеет <u>целочисленное</u> решение, где $\Omega := \mathcal{C}_V \cup \mathcal{M}_V^{2,3}$.*

К рассматриваемому случаю сводится ЗРР для множества U, порождающего объединение K_3 и звезды, и при сведении сохраняется циклическая четность функции длин ребер. Это дает усиленный полярно-двойственный результат к теореме 1.9: Если H_U — объединение K_3 и звезды, и функция ℓ циклически четная, то ЗРР для $G, \ell, \mathcal{C}_V \cup \mathcal{M}_V^{2,3}, U$ имеет <u>целочисленное</u> решение. Ввиду сказанного в п. 4.2, получаем

Следствие 4.14 *Если полуметрика m имеет граф антиподов с пятью вершинами или являющийся объединением K_3 и звезды, то m раскладывается в н.л.к. разрезных и (2,3)-полуметрик. Если при этом m циклически четная, то имеется разложение с неотрицательными целыми коэффициентами.*

Доказательство теоремы 4.13 развивает идею доказательства теоремы 1.3 (раздел I). Можно считать, что функция $\mathrm{dist}^{G,\ell}$ — не тождественно нулевая на U. Скажем, что полуметрика m' на V — *вычитаемая с весом* $a \in \mathbf{R}_+$, если для редуцированных длин $\ell'(e) := \ell(e) - am'(e)$, $e \in E$, справедливо

$$(4.5) \qquad \ell' \geq 0, \qquad \text{и} \qquad \mathrm{dist}^{G,\ell}(st) = \mathrm{dist}^{G,\ell'}(st) + am'(st) \quad \text{для всех } st \in U.$$

Вычитаемость с некоторым весом $a > 0$ имеет место т. и т. т., когда каждая H-геодезическая в (G, ℓ) является геодезической для m'. Удается показать существование и явно сконструировать $m' \in \mathcal{C}_V \cup \mathcal{M}_V^{2,3}$, вычитаемое с *целым* весом $a > 0$. Тогда функция ℓ' циклически четная (так как ℓ и все разрезные и (2,3)-полуметрики циклически четные), и ввиду (4.5), требуемая упаковка для ℓ получается добавлением m' с весом a к соответствующей упаковке для ℓ', существующей по индукции.

Доказательство преобразуется в эффективный гриди-алгоритм. В нем сначала последовательно строятся и вычитаются разрезные полуметрики $m_1, \ldots, m_i$ с целыми весами $a_1, \ldots, a_i > 0$ до тех пор, пока это возможно. В результате ℓ редуцируется к циклически четной функции h. Более того, $\mathrm{dist}^{G,h}$ оказывается расширением (полу)метрики на T вида $q\mu_{T',T''}$ для некоторого (2,3)-разбиения (T', T'') множества T и $q \in \mathbf{Z}_+$. При $q > 0$ последовательно строятся 0-расширения $m_{i+1}, \ldots, m_k$ метрики $\mu_{T',T''}$ и целые веса $a_{i+1}, \ldots, a_k > 0$ с суммой, равной q (метод построения этих 0-расширений такой же, как в доказательстве леммы 1.5 в разделе I). Число k оценивается как $O(|V|)$, и каждая пара (m_j, a_j) строится путем решения $O(1)$ задач о кратчайшем пути.

Теорема 4.15 *Для $H = (T, U) \simeq K_5$ и циклически четной функции ℓ на ребрах $G = (V, E)$ целочисленная упаковка разрезных и (2,3)-полуметрик, решающая ЗРР, находится за время* $O(|V|\beta_{|V|,|E|})$.

4.6 ЗРР для плоских графов с отверстиями.

Для плоского графа $G = (V, E)$ и множества $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}_G$ выделенных граней (*отверстий*), обозначим $U_{\mathcal{H}}$ множество пар $st \in \binom{V}{2}$, где оба s, t принадлежат какому-либо отверстию, т.е. $U_{\mathcal{H}} := \cup_{F \in \mathcal{H}} \binom{V(F)}{2}$.

По полярной двойственности из теоремы Окамуры следует, что ЗРР для $G, \ell, \Omega, U_{\mathcal{H}}$ имеет решение, если $|\mathcal{H}| \le 2$, и Ω — множество разрезных полуметрик. Скрайвер [Sch2] доказал, что если к тому же функция ℓ циклически четная, то задача имеет целочисленнное решение. Его доказательство использует сведение к случаю двудольного плоского графа с единичными длинами и, как следствие, дает псевдополиномиальный по времени и памяти алгоритм построения целочисленного решения. В [19] предлагается другое доказательство, оперирующее с исходными G, ℓ и преобразующееся в эффективный алгоритм.

Теорема 4.16 *Целочисленное решение ЗРР для $G, \ell, \mathcal{C}_V, U_{\mathcal{H}}$, где $|\mathcal{H}| \le 2$, и функция ℓ циклически четная, находится за сильнополиномиальное время.*

При $|\mathcal{H}| = 3$ разрезных полуметрик уже не достаточно в общем случае (G, ℓ), и множество Ω следует расширить, добавляя (2,3)-полуметрики, как указано в (ii) следствия 4.3. Мы показываем, что свойство целочисленности сохраняется (см. [26]).

Теорема 4.17 *Пусть $|\mathcal{H}| = 3$, и функция ℓ циклически четная. Тогда ЗРР для $G, \ell, \Omega, U_{\mathcal{H}}$ имеет <u>целочисленное</u> решение, где Ω — множество разрезных и (2,3)-полуметрик, согласованных с $(G, \mathcal{H})$* (см. определение в $ 2 раздела I).

Доказательство этой теоремы развивает метод двойственных путей из работы [Sch2]. Вначале делаются эквивалентные преобразования исходных G, ℓ, в результате чего граф G становится полным двудольным с единичными длинами ребер и имеет следующие свойства: (i) каждая промежуточная грань (не отверстие) ограничивается 4-циклом, и (ii) каждая пара x, y противоположных вершин любой промежуточной грани принадлежит кратчайшему пути из s в t для некоторого $st \in U_{\mathcal{H}}$. *Двойственным путем* для $(G, \mathcal{H})$ называется максимальная чередующаяся последовательность $D = (e_0, F_1, e_1, \dots, F_k, e_k)$ $(k \geq 1)$ ребер и промежуточных граней, где e_{i-1} и e_i — противоположные ребра в F_i, и все $e_0, \dots, e_{k-1}$ различные (двойственные пути определяются однозначно в точностью до обращения). Из (i)–(ii) выводится, что все грани в D различные, и концевые ребра e_0 и e_k различные и принадлежат границам отверстий I, J. Если $I \neq J$, к D далее присоединяется двойственный путь D', начинающийся с определенного ребра $e' \neq e_k$ в J, и т.д., пока не приходим к I. Окончательные (агрегированные) двойственные пути имеют попарно не пересекающиеся множества ребер $E_1, \dots, E_q$. Показывается, что каждое E_i является разрезом, и соответствующая разрезная полуметрика вычитаема с весом 1. "Вычитание" этих полуметрик соответствует стягиванию ребер в $E_1 \cup \ldots \cup E_q$; в результате получается сведение к задаче для $G', \mathcal{H}'$, где $|\mathcal{H}'| \leq 3$ и $\mathcal{F}'_G = \mathcal{H}'$. Для этого случая необходимая целочисленная упаковка разрезных и (2,3)-полуметрик строится легко.

Доказательство обобщается в [26] на случай $|\mathcal{H}| = 4$.

Теорема 4.18 *Пусть $|\mathcal{H}| = 4$, и функция ℓ циклически четная. Тогда ЗРР для $G, \ell, \Omega, U_{\mathcal{H}}$ имеет* <u>*целочисленное*</u> *решение, где Ω — множество разрезных, (2,3)- и 4F-полуметрик, согласованных с $(G, \mathcal{H})$.*

Отметим, что доказательства теорем 4.17 и 4.18 преобразуются в алгоритмы для $|\mathcal{H}| = 3, 4$, имеющие псевдополиномиальное время и память (становящиеся полиномиальными при $\ell \equiv 1$). Более эффективные методы для этих случаев не известны.

$ 3 Максимальные упаковки разрезов и MFMC-свойства

Выше рассматривались два типа задач об упаковках полуметрик: задача о реализации расстояний и задача об упаковке разрезных полуметрик с заданными требованиями, являющиеся аналогами мультипотоковых задач о запирании и о допустимости, соответственно. В свою очередь, аналогом задачи о максимальном мультипотоке является *задача о максимальной упаковке полуметрик*, в которой для связного графа $G = (V, E)$, функции $\ell : E \to \mathbf{Z}_+$ длин ребер и семейства Ω полуметрик на V требуется найти упаковку λ с максимальным значением $\sum_{m' \in \Omega} \lambda(m')$. В данном параграфе мы рассматриваем только случаи разрезных полуметрик и ведем изложение на эквивалентном языке максимальных упаковок разрезов, что более соответствует используемым далее устоявшимся понятиям и терминологии. В рассматриваемой постановке задана пара $(T, \mathcal{A})$, называемая *конфигурацией*, состоящая из множества $T \subseteq V$ полюсов и некоторого семейства $\mathcal{A}$ собственных подмножеств в T. Обозначим $\mathcal{R}_G(\mathcal{A})$ множество разрезов $\delta_G(X)$ таких, что $X \cap T \in \mathcal{A}$.

(ЗМУР) *Задача о максимальной упаковке разрезов* (или *задача о максимальном мультиразрезе* в терминологии [7]): Найти разрезы $R_1, \dots, R_k \in \mathcal{R}_G(\mathcal{A})$ и числа $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbf{R}_+$, максимизирующие $\lambda_1 + \ldots + \lambda_k$, при условии $\sum(\lambda_i : e \in R_i) \leq \ell(e)$ для всех $e \in E$.

4.7 Семейства разрезов с MFMC-свойством. Основной результат в данном пункте состоит в описании конфигураций, для которых множества разрезов имеют т.н. MFMC-свойство. Напомним некоторые определения и факты из теории упаковок.

Пусть $\mathcal{F}$ — некоторое семейство непустых подмножеств конечного множества E. *Блокером* $\mathcal{F}$ называют семейство $b(\mathcal{F})$ всех минимальных подмножеств в E, пересекающих каждое множество в $\mathcal{F}$. Если $\mathcal{F}$ — клаттер (т.е. $F \not\subseteq F'$ для различных $F, F' \in \mathcal{F}$), то $b(b(\mathcal{F})) = \mathcal{F}$. С $\mathcal{F}$ и функцией $\ell : E \to \mathbf{Z}_+$ связывают число $\nu(\mathcal{F}, \ell)$ — максимальную мощность $\sum_{F\in\mathcal{F}} \lambda(F)$ упаковки для $E, \ell, \mathcal{F}$, и число $\tau(\mathcal{F}, \ell)$ — минимальный вес $\ell(B)$ блокирующего множества $B \in b(\mathcal{F})$. Тогда $\nu(\mathcal{F}, \ell) \le \tau(\mathcal{F}, \ell)$, и говорят, что $\mathcal{F}$ обладает (*слабым*) *MFMC-свойством*, если выполняется равенство при всех $\ell : E \to \mathbf{Z}_+$ (аббревиатура введена Сеймуром для свойства типа "max flow = min cut"); эквивалентно: все вершины многогранника $\{x \in \mathbf{R}^E_+ : x(F) \ge 1 \ \ \forall F \in \mathcal{F}\}$ — целые. Если к тому же максимум достигается на целочисленном λ для каждого ℓ (каждого ℓ, при котором $\ell(B)$ четно для всех $B \in b(\mathcal{F})$), то говорят, что $\mathcal{F}$ имеет *сильное* (соответственно, *циклическое*) *MFMC-свойство.* $\mathcal{F}$ обладает слабым MFMC-свойством т. и т. т., когда то же самое верно для $b(\mathcal{F})$. Этот факт, следующий из работы Альфреда Лемана [Le] (с простым доказательством в [Ful]), находит важные применения в комбинаторной оптимизации (см., например, [GLS]). Укажем два примера, относящихся к задаче о максимальной упаковке разрезов.

Пример 1. Пусть $T = \{s, t, s', t'\}$ и $\mathcal{A} = \{\{s, s'\}, \{s, t'\}\}$. Тогда семейство $\mathcal{F} := \mathcal{R}_G(\mathcal{A})$ образовано разрезами в G, разделяющими s и t и одновременно s' и t', а $b(\mathcal{F})$ состоит из простых путей, соединяющих s и t или s' и t'. Задачи о максимальной упаковке для $b(\mathcal{F})$ и для $\mathcal{F}$ — это задачи о максимальном двухпродуктовом потоке и о максимальном двухпродуктовом разрезе, соответственно. Оба семейства имеют циклическое MFMC-свойство: $b(\mathcal{F})$ — по теореме Ротшильда и Уинстона [RW], а $\mathcal{F}$ — по теореме Сеймура [Se1]. Пару $(T, \mathcal{A})$ назовем *двухпродуктовой конфигурацией*. Для этой конфигурации целочисленное оптимальное решение ЗМУР с циклически четной функцией ℓ строится алгоритмом в [9] за время $O(|V|\beta_{|V|,|E|})$.

Пример 2. $|T|$ четно, и $\mathcal{A} := \{A \subset T : |A| \text{ нечетно}\}$. Тогда $\mathcal{F} := \mathcal{R}_G(\mathcal{A})$ образовано *нечетнополюсными разрезами* (или *T-разрезами*), а $b(\mathcal{F})$ — *T-соединениями* в G (определение см. в $ 4 раздела III). По теореме Сеймура [Se7] $\mathcal{F}$ имеет циклическое MFMC-свойство. Назовем $(T, \mathcal{A})$ *нечетнополюсной конфигурацией.* Для нее целочисленное оптимальное решение ЗМУР в циклически четном случае строится в [14] за время $O(|T||E| \log |V| + |T|^3 \log |T|)$.

Имеется еще один пример. Скажем, что конфигурация $(T, \mathcal{A})$ *решеточная*, если $A \cap B, A \cup B \in \mathcal{A}$ для всех $A, B \in \mathcal{A}$. В простейшем случае $|\mathcal{A}| = 1$ задачи о максимальной упаковке для $\mathcal{F} := \mathcal{R}_G(\mathcal{A})$ и для $b(\mathcal{F})$ — это многополюсные версии задач о максимальном однопродуктовом разрезе и о максимальном однопродуктовом потоке, соответственно, и по классическим результатам оба семейства имеют сильное MFMC-свойство. Это обобщается на произвольные решеточные конфигурации (см. [13]).

Утверждение 4.19 *Для решеточной конфигурации $(T, \mathcal{A})$ множество разрезов $\mathcal{R}_G(\mathcal{A})$ обладает сильным MFMC-свойством.*

Доказательство проводится путем сведения ЗМУР для данного $\mathcal{A}$ к задаче о кратчайшем пути из A_0 в $T - A_1$ в смешанном графе $(V, E \cup D)$ с длинами ℓ на E и нулевыми длинами на D. Здесь A_0, A_1 — минимальное и максимальное множества в $\mathcal{A}$, соответственно, и D образовано парами полюсов (s,t) такими, что из $s \in A \in \mathcal{A}$ следует $t \in A$ (т.е. $\mathcal{A}$ состоит из дополнений к идеалам в (T,D)).

Оказывается, данные три примера в определенном смысле исчерпывают все типы конфигураций, обеспечивающих MFMC-свойство для семейств разрезов при произвольном G. Конфигурации $(T,\mathcal{A})$ и $(T,\mathcal{A}')$ назовем *эквивалентными*, если для каждого $A \in \mathcal{A}$ по крайней мере одно из $A, T-A$ содержится в $\mathcal{A}'$, и аналогично для $\mathcal{A}'$ (тогда $\mathcal{R}_G(\mathcal{A}) = \mathcal{R}_G(\mathcal{A}')$ для любого G). Скажем, что конфигурация $(T,\mathcal{A})$ *избыточная*, если существуют различные $s,t \in T$ такие, что $|\{s,t\} \cap A| \neq 1$ для всех $A \in \mathcal{A}$, или существует элемент $v \in T$ такой, что $(T,\mathcal{A})$ эквивалентно конфигурации, образованной множествами $A \cup v$ и $A - v$ для всех $A \in \mathcal{A}$. Для любого $(T,\mathcal{A})$ задача о максимальной упаковке разрезов сводится к задаче с неизбыточной конфигурацией $(T',\mathcal{A}')$, и сведение обеспечивает инвариантность MFMC-свойств. Мы показываем следующее (см. [13]).

Теорема 4.20 *Пусть $(T,\mathcal{A})$ — неизбыточная конфигурация, для которой $\mathcal{R}_G(\mathcal{A})$ имеет MFMC-свойство при любом графе G. Тогда $(T,\mathcal{A})$ эквивалентна либо двухпродуктовой, либо нечетнополюсной, либо решеточной конфигурации.*

Доказательство основано на комбинаторном исследовании блокеров для $\mathcal{R}_G(\mathcal{A})$ при определенных минимальных конфигурациях $(T,\mathcal{A})$ и использует теорему Лемана: $\mathcal{F} \subset 2^E$ имеет MFMC-свойство т. и т. т., когда для любых $c, \ell \in \mathbf{R}_+^E$ выполняется "неравенство ширины–длины" $c\ell \geq \tau(b(\mathcal{F}), c)\tau(\mathcal{F}, \ell)$. Показывается более сильный факт: для неизбыточных $(T,\mathcal{A})$, не относящихся к указанным трем типам, семейство $\mathcal{R}_G(\mathcal{A})$ не имеет MFMC-свойства уже в случае полного графа G с $|T|+2$ вершинами.

Замечание. В [8] дается ответ на вопрос, для каких потоковых схем H семейство путей $\mathcal{P}(G,H)$ (являющееся объектом упаковки в задаче о максимальном мультипотоке) обладает MFMC-свойством. Ими являются только полный двудольный граф H и $H \simeq K_2 + K_2$.

4.8 Семейства разрезов с обобщенным MFMC-свойством.

Теорема 2.2 в разделе II демонстрирует достаточную широту множества PO-схем — потоковых схем H, при которых максимальная мощность мультипотока определяется н.л.к. пропускных способностей разрезов сети. Мультиразрезными аналогами этих схем являются конфигурации $(T,\mathcal{A})$ со следующим свойством: максимальная мощность упаковки разрезов (мультиразреза) определяется н.л.к. расстояний между полюсами. В частности, такими являются конфигурации в теореме 4.20 (здесь расстояния берутся с коэффициентами 0,1). В действительности, класс конфигураций с указанным свойством гораздо шире, и его удается полностью описать. Прежде всего нужно дать формальное определения требуемого свойства для абстрактных семейств.

Пусть $\mathcal{F}$ — некоторое семейство непустых подмножеств множества E с фиксированным разбиением на подсемейства $\mathcal{F}_i$, $i \in I$ (*составное семейство*). Множество $\widehat{b}(\mathcal{F}) := \cup_{i\in I} b(\mathcal{F}_i)$ назовем *частичным блокером* для $\mathcal{F}$. Функцию $\sigma : \widehat{b}(\mathcal{F}) \to \mathbf{R}_+$ назовем *блокирующей*, если

$$\sum(\sigma(B) : B \in b(\mathcal{F}_i)) \geq 1 \qquad \text{для всех } i \in I. \tag{4.6}$$

Из (4.6) следует, что сумма h характеристических функций множеств $B \in \widehat{b}(\mathcal{F})$, взятых с коэффициентими $\sigma(B)$, удовлетворяет $h(F) \geq 1$ для всех $F \in \mathcal{F}$. Поэтому для $\ell : E \to \mathbf{Z}_+$ максимальная мощность упаковки $\nu(\mathcal{F}, \ell)$ не превосходит $\sum(\sigma(B)\ell(B) : B \in \widehat{b}(\mathcal{F}))$. Мы говорим [9], что $\mathcal{F}$ обладает *обобщенным MFMC-свойством*, если для каждого ℓ выполняется

$$\nu(\mathcal{F}, \ell) = \min \{\textstyle\sum(\sigma(B)\ell(B) : B \in \widehat{b}(\mathcal{F}))\}, \tag{4.7}$$

где минимум берется по всем блокирующим функциям σ. Для неразбитых семейств $\mathcal{F}$ (т.е. при $|I| = 1$) понятия обобщенного и обычного (слабого) MFMC-свойств совпадают. Проиллюстрируем введенное понятие на мультипотоках и мультиразрезах.

(а) В задаче о максимальном мультипотоке в сети $G = (V, E)$ со схемой $H = (T, U)$ объектом упаковки является семейство $\mathcal{F} := \mathcal{P}(G, H)$ (пути рассматриваются как множества ребер). $\mathcal{F}$ естественно разбивается на подсемейства $\mathcal{P}_{st}(G)$, $st \in U$. Тогда $\widehat{b}(\mathcal{F})$ образовано минимальными разрезами в G, разделяющими хотя бы одну пару в U. PO-схемы — это те схемы H, для которых при любом G семейство $\mathcal{P}(G, H)$ имеет обобщенное MFMC-свойство.

(б) В задаче о максимальной упаковке разрезов семейство $\mathcal{F} := \mathcal{R}_G(\mathcal{A})$ естественно разбивается на подсемейства $\mathcal{R}_G(A)$, $A \in \mathcal{A}$, состоящие из разрезов в G, разделяющих A и $T - A$. Тогда $\widehat{b}(\mathcal{F})$ образовано простыми путями в G, соединяющими A и $T - A$ хотя бы для одного $A \in \mathcal{A}$. (4.7) эквивалентно тому, что $\nu = \nu(\mathcal{R}_G(\mathcal{A}), \ell)$ равно определенной н.л.к. расстояний между полюсами, а именно, существует $\gamma : \binom{T}{2} \to \mathbf{R}_+$, удовлетворяющее $\nu = \sum(\gamma(st)\mathrm{dist}^{G,\ell}(st) : st \in \binom{T}{2})$ при $\sum(\gamma(st) : st \in \{A, T - A\}) \geq 1$ для каждого $A \in \mathcal{A}$.

Полное описание класса конфигураций, обеспечивающих обобщенное MFMC-свойство в задаче о максимальной упаковке разрезов дает следующая теорема (см. [9]).

Теорема 4.21 *Для конфигурации $(T, \mathcal{A})$ следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $\mathcal{R}_G(\mathcal{A})$ *имеет обобщенное MFMC-свойство для каждого G;*

(ii) *конфигурация $(T, \mathcal{A})$ 3-полная; это означает, что для любых трех попарно скрещивающихся множеств $A_1, A_2, A_3 \in \mathcal{A}$ существуют числа $a_1, a_2, a_3 \in \mathbf{R}_+$ и функция $\varepsilon : \mathcal{A} \to \mathbf{R}_+$ такие, что $a_1 + a_2 + a_3 = \sum_{A \in \mathcal{A}} \varepsilon(A)$ и*

$$\sum\nolimits_{i=1,2,3} a_i \rho_T^{A_i}(st) \geq \sum\nolimits_{A \in \mathcal{A}} \varepsilon(A) \rho_T^A(st) \qquad \text{для всех } st \in \tbinom{T}{2},$$

причем это неравенство — строгое по крайней мере для одного $st \in \binom{T}{2}$.

Для явно заданной 3-полной конфигурации $(T, \mathcal{A})$ в [9] предлагается следующий эффективный метод решения ЗМУР. На первом этапе находится функция $\alpha : \mathcal{A} \to \mathbf{Q}_+$, максимизирующая $\sum_{A \in \mathcal{A}} \alpha(A)$ при условии $\sum(\alpha(A) : st \in \{A, T - A\}) \leq \mathrm{dist}^{G,\ell}(st)$ для всех $s, t \in T$ (ср. (4.3)). На втором этапе α перестраивается в решение α' с 2-ламинарным носителем $\mathcal{A}' := \mathrm{supp}(\alpha')$; существование α' следует из 3-полноты $(T, \mathcal{A})$. Оба этапа выполняются за время, полиномиальное от $|\mathcal{A}|$ и $|T|$, используя сильнополиномиальную версию метода эллипсоидов. На третьем этапе решается ЗУРТ (см. п. 4.3) для G, ℓ, семейства $\mathcal{A}'$ и (рациональных) требований α'. Это дает требуемую максимальную упаковку разрезов. Отметим, что для общего случая 3-полной (и даже ламинарной!) конфигурации ЗМУР имеет неограниченную дробность.

V. Задача о минимальном 0-расширении метрики. Примитивные расширения конечных метрик

Раздел V посвящен результатам теоретического и алгоритмического исследования специальных расширений конечных метрических пространств и задачи минимизации неотрицательной линейной функции над этими расширениями. Центральное место занимает *задача о минимальном 0-расширении* (ЗМНР) (см. с. 11), известная в приложениях как задача о размещении оборудования и являющаяся далеким обобщением задачи о минимальном разрезе. В ней объектами минимизации служат 0-расширения заданной метрики μ. Мы изучаем алгоритмическую сложность ЗМНР в зависимости от μ. В $ 1 дается полное описание класса *минимизируемых* метрик — метрик μ, для которых ЗМНР фактически становится эквивалентной ее линейной релаксации и тем самым эффективно решается. Параграф 2 посвящен труднорешаемым случаям ЗМНР. Класс неминимизируемых метрик, для которых тем не менее ЗМНР разрешима в полиномиальное время, представлен в $ 3. Заключительный параграф 4 посвящен исследованию примитивных расширений и полностью отвечает на вопрос, какие метрики имеют конечное число таких расширений. Здесь также объясняется связь с мультипотоками. Существенная часть полученных результатов о 0-расширениях и примитивных расширениях связана с выявлением структурных и топологических свойств модулярных метрик и их жестких оболочек.

Результаты по данному разделу опубликованы в работах [15, 18, 30, 35, 39, 40, 41, 42].

$ 1 Описание класса минимизируемых метрик в ЗМНР

Напомним, что ЗМНР задается метрикой μ на конечном множестве T (*полюсов*), конечным множеством $V \supseteq T$ и функцией $c : \binom{V}{2} \to \mathbf{Z}_+$. Требуется найти 0-расширение $m \in \mathrm{Ext}^0(\mu, V)$ метрики μ на множество V, минимизирующее $c \cdot m$ (см. определения на с. 11).

Каждое 0-расширение m взаимнооднозначно соответствует: (i) *T-разбиению* — разбиению $\pi = \{X_s : s \in T\}$ множества V, где каждое подмножество X_s содержит ровно один полюс, а именно, s; (ii) отображению $\gamma : V \to T$, тождественному на T. Здесь каждое X_s совпадает с $\gamma^{-1}(s)$ и является 0-множеством $\{x \in V : m(xs) = 0\}$, и выполняется $m(xy) = \mu(st)$ для $x \in X_s$ и $y \in X_t$. Следовательно, ЗМНР эквивалентна задаче нахождения γ, минимизирующего $\sum(c(xy)\mu(\gamma(x)\gamma(y)) : xy \in \binom{V}{2})$, или нахождения T-разбиения $\{X_s : s \in T\}$, минимизирующего сумму величин $c(E_{st})\mu(st)$ по всем $st \in \binom{T}{2}$, где $E_{st} := \{xy : x \in X_s,\ y \in X_t\}$.

В общем случае ЗМНР труднорешаемая [Kol], однако для определенных метрик μ была показана эффективная разрешимость. Мы обозначаем ЗМНР(μ) множество частных задач с фиксированным μ и произвольными V, c. Возникает естественный вопрос о сложности ЗМНР(μ) в зависимости от μ. Прежде всего рассмотрим несколько примеров.

Известная *задача о минимальном многополюсном разрезе* для графа $G = (V, E)$ с неотрицательными весами $c(e)$ ребер $e \in E$ и множества полюсов $T \subseteq V$ состоит в нахождении подмножества ребер $E' \subseteq E$ минимального веса $c(E')$, при удалении которого все полюса окажутся в разных компонентах связности. Иначе говоря, надо найти T-разбиение π множества V с минимальной суммой весов ребер, соединяющих разные подмножества в π. Можно полагать $E = \binom{V}{2}$, поэтому данная задача — суть ЗМНР(μ) для метрики μ с расстояниями 1 на всех парах различных полюсов, т.е. μ — метрика полного графа K_T. Задача является сильно NP-трудной уже при $|T| = 3$ [DJPSY]. Однако при $|T| = 2$ — это классическая задача о (неориентированном) минимальном разрезе, эффективно решаемая многими методами. Также ЗМНР эффективно решается: (а) для метрик произвольных деревьев и "прямоугольных" метрик [Kol,PR], (б) для метрик графов $K_{2,r}$ [15], (с) для любой медианной метрики [Chp].

Наши теория и методы позволяют установить алгоритмическую сложность ЗМНР(μ) для широких классов метрик μ. В данном параграфе излагаются результаты о минимизируемых метриках, частными случаями которых являются (а) и (б) (обобщению (с) будет посвящен $ 3). В п. 5.1 приводятся определения и элементарные свойства. В п. 5.2 формулируются основные теоремы, описывающие класс минимизируемых метрик, а п. 5.3 посвящен краткому изложению идей и методов, лежащих в основе их доказательств.

Далее в разделе графовые (полу)метрики dist^G и $\mathrm{dist}^{G,\ell}$ будут сокращенно обозначаться d^G и $\mathrm{d}^{G,\ell}$.

5.1 Базовые свойства минимизируемых метрик. Понятие минимизируемости вводится в [30] для оценки близости ЗМНР и ее ослабленной версии — *задачи о минимальном расширении* (*ЗМР*), в которой минимизируется $c \cdot m$ среди всевозможных расширений $m \in \mathrm{Ext}(\mu, V)$ метрики μ на множество V. Пусть $\tau(\mu, V, c)$ и $\tau^*(\mu, V, c)$ обозначают минимумы целевой функции в ЗМНР и ЗМР, соответственно. Поскольку каждое 0-расширение является расширением, $\tau^*(\mu, V, c) \leq \tau(\mu, V, c)$.

Определение. Метрика μ на T называется *минимизируемой*, если для любых $V \supseteq T$ и $c : \binom{V}{2} \to \mathbf{R}_+$ ЗМР имеет оптимальное решение, являющееся 0-расширением, т.е. выполняется равенство

$$\tau^*(\mu, V, c) = \tau(\mu, V, c). \tag{5.1}$$

Важность этого понятия подчеркивается следующим свойством (см. [30]).

Утверждение 5.1 *Для минимизируемой метрики μ ЗМНР разрешима в сильнополиномиальное время.*

Действительно, ЗМР для произвольных μ, V, c — это задача линейного программирования:

(5.2) минимизировать $c \cdot m$ при условиях

(i) $m(xy) + m(yz) - m(xz) \geq 0, \quad x, y, z \in V,$

(ii) $m(st) = \mu(st), \quad s, t \in T.$

Число ограничений в (5.2) — $O(|V|^3)$, и все коэффициенты матрицы этих ограничений — это $0, \pm 1$. Поэтому ЗМР разрешима в сильнополиномиальное время при помощи версии [Ta] метода эллипсоидов. Таким образом, если метрика μ минимизируемая, то значение $\tau(\mu, V, c)$

определяется в сильнополиномиальное время, ввиду (5.1). Оптимальное 0-расширение m для заданных μ, V, c строится путем последовательного отождествления точек в $V - T$ с полюсами и вычисления чисел $\tau^*(\mu, V', c')$ для не более, чем $|V - T||T|$ пар (V', c').

Итак, для минимизируемых метрик μ ЗМНР становится "такой же легкой" как и ЗМР. Простейшей минимизируемой метрикой является метрика на двух точках (так как задача о минимальном разрезе записывается как задача целочисленного линейного программирования с вполне унимодулярной матрицей [FF]). Другой пример — метрика графа $K_{2,r}$ [15] (см. замечание 1.6). В [30] указана простая операция, позволяющая строить минимизируемые графовые метрики из уже известных.

Утверждение 5.2 *Пусть графы H_1, H_2 имеют ровно одну общую вершину. Если метрики d^{H_1} и d^{H_2} минимизируемые, то метрика графа $H_1 \cup H_2$ — тоже минимизируемая.*

Применяя последовательность таких операций объединения к графу K_2, можно построить любое дерево, поэтому метрика всякого дерева — минимизируемая.

5.2 Основные теоремы о минимизируемых метриках. Класс минимизируемых метрик удается полностью описать. Ключевая теорема характеризует минимизируемые *графовые* метрики (см. [35]).

Теорема 5.3 *Метрика d^H связного графа $H = (T, U)$ минимизируемая т. и т.т., когда граф H двудольный, ориентируемый и не содержит изометрических k-циклов при $k \geq 6$.*

Объясним используемые здесь понятия. *k-цикл* — это (простой) цикл C_k на k вершинах. Подграф или цикл $H' = (T', U')$ графа H называется *изометрическим*, если $\mathrm{d}^{H'}(st) = \mathrm{d}^H(st)$ для всех $s, t \in T'$ (в общем случае справедливо только $\mathrm{d}^{H'}(st) \geq \mathrm{d}^H(st)$). Граф H называется *ориентируемым*, если его ребра можно ориентировать так, что противоположные ребра любого 4-цикла $(v_0, e_1, v_1, \dots, e_4, v_4 = v_0)$ ориентированы в разные стороны, т.е. для $i = 1, 2$ ребро e_i ориентировано как (v_{i-1}, v_i) т. и т.т., когда e_{i+2} ориентировано как (v_{i+2}, v_{i+1}).

Графы H в теореме 5.3 были названы в [35] *рамочными*, поскольку характерным примером такого графа служит "двумерная решетка" — граф $\Gamma_{p,q}$, вершины которого соответствуют векторам (i, j), $i = 1, \dots, p$, $j = 1, \dots, q$, а ребра — парам $\{(i, j), (i', j')\}$ таким, что $|i - i'| + |j - j'| = 1$. Примерами также являются: (а) объединение двух рамочных графов, пересечение которых состоит из единственной вершины или единственного ребра (ср. утверждение 5.2); (б) связный плоский граф, все внутренние грани которого — четырехугольники, а все внутренние вершины имеют степени ≥ 4 (обобщение двумерной решетки), (в) граф H, полученный из произвольного связного графа без треугольников заменой каждого ребра $e = xy$ парой последовательных ребер xz_e, z_ey, добавлением еще одной вершины t и соединением t ребром с каждой вершиной z_e.

Теорема 5.3 обобщается на общие метрики. Для формулировки результата нам нужны дополнительные определения и факты.

Для метрики μ на T и точек $s, t \in T$ положим $I(s,t) := \{v \in T : \mu(sv) + \mu(vt) = \mu(st)\}$ (*интервал*). *Опорный граф* для μ — это минимальный граф $H(\mu) = (T, U(\mu))$, позволяющий однозначно восстановить метрику μ по ее значениям на ребрах; формально: вершины $s, t \in$

T соединяются ребром в $H(\mu)$ т. и т.т., когда $I(s,t) = \{s,t\}$. Полуметрика μ называется *модулярной*, если для каждых трех точек $s_0, s_1, s_2 \in T$ интервалы $I(s_0,s_1), I(s_1,s_2), I(s_2,s_0)$ имеют хотя бы один общий элемент (*медиану* тройки). Граф H называется *модулярным*, если метрика d^H модулярная, и *наследственно модулярным*, если каждый изометрический подграф в H — модулярный. Показывается, что модулярная метрика имеет модулярный опорный граф. Каждый модулярный граф — двудольный. Простейший немодулярный граф — это K_3, а простейший модулярный, но не наследственно модулярный граф — это C_6.

Замечание 5.4 Бандельт [Ba2] показал, что наследственно модулярные графы — это в точности двудольные графы, не содержащие изометрического k-цикла при $k \geq 6$; эквивалентно: модулярные графы, не содержащие изометрического 6-цикла. Следовательно, рамочные графы — это ориентированные наследственно модулярные графы.

Описание класса минимизируемых метрик дается следующей теоремой (см. [42]).

Теорема 5.5 *Метрика μ минимизируемая т. и т.т., когда μ модулярная, и ее опорный граф $H(\mu)$ рамочный.*

Ввиду утверждения 5.1, имеем

Следствие 5.6 *Если μ — модулярная метрика, и граф $H(\mu)$ рамочный, то задача о минимальном 0-расширении разрешима в сильнополиномиальное время.*

Замечание 5.7 В общем случае минимизируемой метрики эффективный метод решения ЗМНР использует метод эллипсоидов (в соответствии с доказательством утверждения 5.1). В [35] предложен “комбинаторный” эффективный алгоритм для определенного подкласса минимизируемых метрик. А именно: если $H = (T,U)$ — рамочный граф, не содержащий подграфа $K_{2,3}$, то ЗМНР для d^H, V, c сводится к нахождению $O(|T|)$ минимальных разрезов в сети (K_V, c). Такими графами являются, в частности, деревья и двумерные решетки. В [39] найден эффективный комбинаторный метод для более широкого подкласса минимизируемых метрик, включая $\mathrm{d}^{K_{2,r}}$ (см. замечание 5.22(ii) в $ 3).

Естественно спросить: можно ли эффективно распознать свойство минимизируемости метрики μ? Эффективная проверка модулярности μ и построение опорного графа $H(\mu)$ — очевидны. Ввиду замечания 5.4, остается проверить ориентируемость $H(\mu)$ и отсутствие в нем изометрического 6-цикла, что также делается эффективно. Таким образом, справедливо

Утверждение 5.8 *Принадлежность метрики μ на T множеству минимизируемых метрик распознается за время, полиномиальное от $|T|$.*

[Условия модулярности метрики μ и ориентируемости ее опорного графа оказываются существенными для возможности эффективного решения ЗМНР: в $ 2 объясняется, что при нарушении любого из этих условий задача становится труднорешаемой. С другой стороны имеется богатый класс неминимизируемых метрик, для которых ЗМНР все еще разрешима в полиномиальное время, как мы увидим в $ 3.]

В дальнейшем изложении будет использоваться тесная связь между модулярными графами и модулярными метриками. Ребра e, e' модулярного графа $H = (T,U)$ называются *проективными*, если имеется последовательность ребер $e = e_1, e_2, \dots, e_k = e'$ такая, что e_i, e_{i+1} — противоположные ребра некоторого 4-цикла, $i = 1, \dots, k-1$. Максимальное по включению множество взаимно проективных ребер в H называется *орбитой*. Например, граф $\Gamma_{p,q}$ имеет $p+q$ орбит, а граф $K_{2,r}$ при $r \ge 3$ — только одну орбиту. Из результатов в [Ba1] выводятся следующие свойства (см. [40]):

(5.3) (а) модулярная метрика постоянна в пределах каждой орбиты своего опорного графа; (б) если $H = (T, U)$ — модулярный граф, и функция $\ell : U \to \mathbf{R}_+$ — *орбитно-инвариантная* (т.е. постоянная на каждой орбите), то полуметрика $\mu = \mathrm{d}^{H,\ell}$ модулярная, и каждый кратчайший путь в H является геодезической для μ.

Напомним, что *геодезическая* (кратчайший путь) полуметрики d на множестве X — это последовательность $(x_0, \dots, x_k)$ точек в X такая, что $d(x_0x_1) + \dots + d(x_{k-1}x_k) = d(x_0x_k)$.

5.3 Идеи доказательств теорем 5.3 и 5.5. Жесткие оболочки метрик.

Прежде всего свойство минимизируемости переформулируется в полиэдральных терминах. Для любой метрики μ множество расширений $\mathrm{Ext}(\mu, V)$ образует (неограниченный) многогранник в $\mathbf{R}^{\binom{V}{2}}$, описываемый линейными ограничениями в (5.2). Вершины доминанта

$$D(\mu, V) := \mathrm{Ext}(\mu, V) + \mathbf{R}_+^{\binom{V}{2}}$$

этого многогранника называются *экстремальными расширениями* μ на V. В частности, каждое 0-расширение является экстремальным. Из линейного программирования следует, что для каждой вершины m в $D(\mu, V)$ найдется вектор $c \in \mathbf{R}_+^{\binom{V}{2}}$ такой, что $c \cdot m < c \cdot m'$ для любого другого расширения $m' \in \mathrm{Ext}(\mu, V)$, и обратно, для любого $c \in \mathbf{R}_+^{\binom{V}{2}}$ минимум $c \cdot m$ достигается на некоторой вершине в $D(\mu, V)$. Следовательно,

(5.4) метрика μ минимизируемая т. и т.т., когда для любого $V \supseteq T$ каждое экстремальное расширение μ на V является 0-расширением.

Тем самым, чтобы установить неминимизируемость той или иной метрики, достаточно найти ее экстремальное расширение, не являющееся 0-расширением. Для проверки экстремальности расширения применяется легко доказываемый критерий:

(5.5) $m \in \mathrm{Ext}(\mu, V)$ экстремальное т. и т.т., когда m однозначно определяется множеством своих *T-геодезических* — геодезических с обоими концами в T.

Проще всего объяснить, почему всякая минимизируемая метрика μ является модулярной. Рассмотрим тройку $s_0, s_1, s_2 \in T$, и образуем V, добавляя к T одну точку v. Существует расширение $m \in \mathrm{Ext}(\mu, V)$ такое, что $m(s_iv) + m(vs_j) = \mu(s_is_j)$ для $0 \le i < j \le 2$ (числа $m(s_iv)$ единственны и неотрицательны). Более того, полуметрика m может быть построена так, что она однозначно определяется своими T-геодезическими. Ввиду (5.5) и (5.4), m должно быть 0-расширением. Теперь из определения чисел $m(vs_i)$ следует, что полюс $t \in T$, удовлетворяющий $m(vt) = 0$, является медианой для s_0, s_1, s_2, что и требуется.

Таким образом, достаточно работать с модулярными графами (в теореме 5.3) и модулярными метриками (в теореме 5.5). Основные усилия приходятся на доказательство теоремы 5.3. Доказательство необходимости для этой теоремы дается посредством прямых комбинаторных конструкций экстремальных расширений, не являющихся 0-расширениями, в случаях, когда граф H неориентируемый или содержит изометрический 6-цикл. Эти конструкции обобщаются в доказательстве необходимости для теоремы 5.5, используя свойство (5.3).

Доказательство достаточности для теоремы 5.3 существенно опирается на установленные в [35] структурные свойства жесткой оболочки метрики d^H, которую удается построить явно в том случае, когда граф H рамочный. Введем нужные понятия.

Расширение (V,m) (конечного или бесконечного) метрического пространства (T,μ) называется *жестким*, если не существует другого расширения (V,m') для μ такого, что $m'(xy)\le m(xy)$ для всех $x,y\in V$. Каждое экстремальное расширение — жесткое.

Избелл [Is] установил, что для всякого метрического пространства (T,μ) существует и единственно жесткое расширение $\mathcal{T}(\mu)=(X,d)$ такое, что d метрика, и любое жесткое расширение (V,m) для (T,μ) изометрически погружаемо в $\mathcal{T}(\mu)$, т.е. существует отображение $\omega: V\to X$, тождественное на T и удовлетворяющее $d(\omega(x)\omega(y))=m(xy)$ для всех $x,y\in V$. Такое $\mathcal{T}(\mu)$ называется *жесткой оболочкой* (tight span) для μ (в литературе также встречаются названия: инъективная оболочка, T_X-пространство, универсальное жесткое расширение). Важные свойства жестких оболочек были найдены Дрессом в [Dr]. Так при конечном T жесткая оболочка представима в виде метризованного полиэдрального комплекса размерности не более $|T|/2$ (он определяется неявно). Например, $\dim(\mathcal{T}(\mathrm{d}^{C_4}))=2$ и $\dim(\mathcal{T}(\mathrm{d}^{B_3}))=4$, где B_3 — скелетный граф 3-куба. $\mathcal{T}(\mu)$ одномерно для метрик μ взвешенных деревьев и только для них.

Для рамочного графа $H=(T,U)$ мы строим комплекс S^H размерности ≤ 2 следующим образом. Пусть $K(A;B)$ обозначает полный двудольный граф с вершинными долями (независимыми множествами) A и B. Максимальный по включению подграф $K(A;B)$ графа называется *2-кликой*, если $|A|,|B|\ge 2$. Поскольку граф $K_{3,3}$ неориентируемый, H имеет 2-клики только вида $K_{2,r}$. Более того, из двудольности и ориентируемости H следует, что

(5.6) каждый 4-цикл в H содержится ровно в одной 2-клике.

Ввиду отсутствия в H изометрических k-циклов при $k>4$, каждое ребро либо содержится в 4-цикле, либо является *мостом* (не принадлежит никакому циклу). Структура S^H будет определяться множеством 2-клик и мостов в H.

Для построения S^H мы сначала расширяем каждое ребро xy до (гомеоморфной копии) отрезка $[0,1]\subset\mathbf{R}^1$, соединяющего точки x и y. Затем каждый 4-цикл $C=v_0v_1v_2v_3v_0$ расширяется до 2-мерного диска D^C. Формально: D^C — гомеоморфная копия квадрата $[0,1]\times[0,1]\subset\mathbf{R}^2$, вершины v_0,v_1,v_2,v_3 отождествляются с точками (0,0),(0,1),(1,1),(1,0), соответственно, а ребра — с соответствующими отрезками. Наконец, если C и другой 4-цикл $C'=u_0u_1u_2u_3u_0$ имеют три общие вершины, скажем, $v_i=u_i$ для $i=0,1,2$, мы отождествляем соответствующие треугольники в D^C и $D^{C'}$. Формально: считая, что v_0,v_1,v_2 представлены в обоих дисках точками (0,0),(0,1),(1,1), соответственно, каждую точку (ξ,η) в D^C при $0\le\xi\le\eta\le 1$ отождествляем с точкой (ξ,η) в $D^{C'}$. Ввиду (5.6), C и C' принадлежат одной и той же 2-клике, и можно видеть, что при указанных отождествлениях каждая 2-клика $K \simeq K_{2,r}$ превращается в фигуру $F(K)$, называемую *фолдером*, гомеоморфную симплициальному комплексу, получаемому при склейке r копий треугольника $\{(\alpha,\beta) : 0 \le \alpha \le \beta \le 1\}$ вдоль стороны $\{(\alpha,\alpha) : 0 \le \alpha \le 1\}$.

Результирующее образование, фактически имеющее структуру симплициального комплекса, и есть требуемое S^H. Удобнее считать S^H особым двумерным комплексом, в котором двумерными замкнутыми "клетками" являются фолдеры, образованные из 2-клик, а замкнутые одномерные клетки, не входящими в фолдеры, соответствуют мостам в H (внутренности фолдеров не пересекаются, ввиду (5.6)).

Определим метрику $\delta = \delta^H$ на S^H как глобализацию естественных метрик δ_F типа ℓ_1 в фолдерах и мостах F. Метрика δ_F на фолдере F задается так, что для каждой пары точек x, y, принадлежащих одному и тому же диску и имеющему в нем координаты (ξ, η) и (ξ', η'), расстояние $\delta_F(xy)$ равно $|\xi - \xi'| + |\eta - \eta'|$. Тогда $\delta(xy)$ для $x, y \in S^H$ есть $\inf\{\delta_{F^1}(x_0x_1) + \ldots + \delta_{F^k}(x_{k-1}x_k)\}$ по всем конечным последовательностям $(x = x_0, x_1, \ldots, x_k = y)$ точек таким, что каждая пара x_{i-1}, x_i лежит на одном и том же фолдере или мосту F^i. Пусть ψ — естественное вложение T в S^H. Прежде всего показывается, что δ — расширение d^H.

Лемма 5.9 *δ совпадает с δ_F на каждом фолдере или мосту F, и ψ — изометрическое вложение (T, d^H) в (S^H, δ).*

Центральное место всего доказательства теоремы 5.3 занимает

Лемма 5.10 *(S^H, δ) является жесткой оболочкой $\mathcal{T}(\mathrm{d}^H)$ метрики d^H.*

Основываясь на этом факте, мы показываем минимизируемость d^H следующим образом. Рассмотрим экстремальное расширение (V, m) для d^H. Оно является жестким, поэтому имеется отображение $\omega : V \to S^H$, тождественное на T и сохраняющее расстояния: $m(xy) = \delta(\omega(x)\omega(y))$. Наша цель — найти 0-расширение m' метрики d^H с не меньшим множеством T-геодезических; тогда из (5.5) будет следовать $m' = m$. Требуемое m' строится при помощи инвариантного разрывного отображения $\gamma : S^H \to T$ ("сдвиг" S^H в полюса).

Для построения γ выберем допустимую ориентацию ребер H (в соответствии с определением ориентируемости). Тогда каждая 2-клика $K = K(A; B)$ имеет единственную вершину v_K такую, что все ее инцидентные ребра в K ориентированы в направлении к v_K (если $A = \{s_1, s_2\}$ и $|B| \ge 3$, то v_K — это s_1 или s_2). Для $x \in S^H$ положим:

(5.7) (i) если $x \in T$, то $\gamma(x) := x$;
(ii) если x — внутренняя точка на ориентированном ребре (s, t), то $\gamma(x) := t$;
(iii) если x — внутренняя точка в фолдере $F(K)$, то $\gamma(x) := v_K$.

Лемма 5.11 *Для каждой T-геодезической $(x_0, x_1, \ldots, x_k)$ в $\mathcal{T}(\mathrm{d}^H)$ последовательность $(\gamma(x_0), \gamma(x_1), \ldots, \gamma(x_k))$ — тоже T-геодезическая.*

В соответствии с этой заключительной леммой требуемое 0-расширение m' нужно определить как $m'(xy) := m(\gamma(\omega(x))\gamma(\omega(y)))$, $x, y \in V$. Это завершает доказательство теоремы 5.3. Попутно мы получили следующий дополнительный результат.

Следствие 5.12 $\dim(\mathcal{T}(\mu)) \leq 2$ *для каждой минимизируемой графовой метрики* μ.

Достаточность в теореме 5.5 доказывается аналогично, основываясь на связи между модулярными метриками и модулярными графами. Укажем на отличие с предыдущим доказательством.

Пусть μ — модулярная метрика с рамочным опорным графом $H = (T, U)$, и пусть $Q_1, \ldots, Q_k$ — орбиты в H. Согласно (5.3), μ принимает постоянное значение h_i на ребрах в Q_i. Заметим, что все ребра 2-клики $K = K(A; B)$ принадлежат одной орбите при $|A| + |B| \geq 5$. Если же $|A| = |B| = 2$ (т.е. K — 4-цикл), то пары противоположных ребер могут принадлежать разным орбитам. В [40] (см. теорему 5.25 в $ 4) показывается, что жесткая оболочка для μ представляет собой тот же самый комплекс S^H, в котором локальные метрики в фолдерах и мостах должным образом растягиваются по каждой орбите. Более точно, $\mathcal{T}(\mu) = (S^H, \delta^\mu)$, где δ^μ — глобализация следующих локальных метрик δ^μ_F:

(i) Если F — мост или фолдер 2-клики со всеми ребрами в одной орбите O_i, то определяем метрику δ^μ_F как $h_i \delta_F$ (т.е. δ^μ_F получается равномерным растяжением δ_F в h_i раз);

(ii) Если F — фолдер 2-клики, являющейся 4-циклом $v_0 v_1 v_2 v_3 v_0$, $v_0 v_1 \in Q_i$ и $v_1 v_2 \in Q_j$ $(i \neq j)$, то для точек $x = (\xi, \eta)$ и $y = (\xi', \eta')$ в F полагаем $\delta^\mu_F(xy) = h_j |\xi - \xi'| + h_i |\eta - \eta'|$ (т.е. δ^m_F получается растяжением δ_F в h_i раз в "вертикальном направлении" $v_0 - v_1$ и в h_j раз в "горизонтальном направлении" $v_1 - v_2$).

Конструкция отображения $\gamma : S^H \to T$ сохраняется, и лемма 5.11 остается верной и в этой более общей ситуации.

$ 2 Труднорешаемые случаи ЗМНР

Свойства модулярности метрики μ и ориентируемости ее опорного графа оказываются необходимыми для возможности эффективного решения ЗМНР(μ) (в предположении P$\neq$NP). Выше отмечалось, что ЗМНР сильно NP-трудная для простейшей немодулярной метрики d^{K_3}, согласно результату о труднорешаемости задачи о минимальном 3-полюсном разрезе [DJPSY]. Мы обобщаем это следующим образом (см. [41]).

Теорема 5.13 *Для каждой фиксированной рациональной метрики* μ *задача о минимальном 0-расширении является сильно NP-трудной, если метрика* μ *немодулярная или если опорный граф* $H(\mu)$ *неориентируемый.*

Доказательство этой теоремы развивает подход в [DJPSY]. В основе лежит построение определенных примеров *нарушения субмодулярности*, что позволяет свести к рассматриваемым случаям ЗМНР NP-полную задачу о *максимальном разрезе* графа, разделяющем две выделенные вершины (MAX CUT). Поясним идею доказательства в нашем (общем) случае.

Рассмотрим произвольные T, μ, V, c. Для $s, t \in T$ и $x, y \in V - T$ обозначим $\tau(s, x|t, y)$ минимум $c \cdot m$ по всем 0-расширениям $m \in \mathrm{Ext}^0(\mu, V)$ таким, что $m(xs) = m(yt) = 0$. Хорошо известно, что функция пропускной способности разрезов графа является *субмодулярной*. В наших терминах это выражается так: если $T = \{s, t\}$, то

$$\tau(s, x|t, y) + \tau(s, y|t, x) \geq \tau(s, x|s, y) + \tau(t, x|t, y). \tag{5.8}$$

Предположим, для некоторой метрики μ имеется пример (V, c) с выделенными s, t, x, y такой, что для $\widehat{\tau} := \tau(\mu, V, c)$ и некоторого $\alpha > 0$ выполняется

$$
\begin{aligned}
\tau(s,x|t,y) &= \tau(s,y|t,x) = \widehat{\tau}; \\
\tau(s,x|s,y) &= \tau(t,x|t,y) = \widehat{\tau} + \alpha; \\
\tau(s',x|t',y) &\geq \widehat{\tau} + \alpha \qquad \text{для всех других пар } \{s',t'\} \text{ в } T.
\end{aligned} \tag{5.9}
$$

В частности, для s, t, x, y нарушается (5.8). 0-расширение m назовем *квазиоптимальным*, если $c \cdot m = \widehat{\tau} + \alpha$ и $m(px) = m(py) = 0$ для $p = s$ или $p = t$. При наличии указанного примера труднорешаемость ЗМНР(μ) показывается следующим образом. Рассмотрим задачу MAX CUT на графе $\overline{G} = (\overline{V}, \overline{E})$ с выделенными вершинами $\overline{s}, \overline{t}$. Заменим каждое ребро $e = \overline{xy} \in \overline{E}$ копией V_e множества V, производя отождествления $s = \overline{s}$, $t = \overline{t}$, $x = \overline{x}$, $y = \overline{y}$. Также отождествим одноименные полюса в этих $|\overline{E}|$ копиях. В результате получается множество точек $\mathcal{V}$, включающее $\overline{V}$ и T, и c определяет функцию ζ на $\binom{\mathcal{V}}{2}$ естественным образом.

Для полученной сети $(\mathcal{V}, \zeta)$ любое $\{\overline{s}, \overline{t}\}$-разбиение $\{X, \overline{V} - X\}$ множества $\overline{V}$ продолжается до T-разбиения π множества $\mathcal{V}$ со следующим свойством: если ребро $e \in \overline{E}$ принадлежит (не принадлежит) разрезу $\delta(X)$, то проекция π на V_e определяет оптимальное (соответственно, квазиоптимальное) решение для μ, V, c. Ввиду (5.9), это дает равенство $\tau(\mu, \mathcal{V}, \zeta) = |\overline{E}|(\widehat{\tau} + \alpha) - \Delta\widehat{\tau}$, где Δ — максимальная мощность $(\overline{s}, \overline{t})$-разреза в $\overline{G}$. Следовательно, MAX CUT сводится к ЗМНР для $\mu, \mathcal{V}, \zeta$.

Для метрик μ в теореме 5.13 требуемые примеры нарушения субмодулярности действительно удается построить, что отражается в следующей лемме (см. [41]).

Лемма 5.14 *Для каждой фиксированной метрики μ такой, что μ немодулярная или $H(\mu)$ неориентируемый, существуют V, c, s, t, x, y, удовлетворяющие (5.9).*

$ 3 Орбитно-аддитивные модулярные метрики и метод распараллеливания для ЗМНР

Теоремы 5.5 и 5.13 оставляют еще не определенной алгоритмическую сложность ЗМНР(μ) для неминимизируемых модулярных метрик μ с ориентируемым опорным графом $H(\mu)$. Оказывается, для представительного множества таких метрик задача является эффективно решаемой. Они относятся к описываемому в этом параграфе классу орбитно-аддитивных метрик, возникающих как обобщение т.н. медианных метрик. Начнем с определений и известных фактов.

5.4 Свойства медианных метрик. *Медианная метрика* — это модулярная метрика, для которой каждая тройка точек имеет *единственную* медиану. *Медианный граф* — это граф H с медианной метрикой d^H. Из (5.3) следует, что модулярная метрика μ является медианной т. и т.т., когда опорный граф $H(\mu)$ медианный. Медианные графы были введены Мулдером и Скрайвером. Важные для нас свойства, установленные в [MS], переносятся на медианные метрики следующим образом:

(5.10) (i) метрика μ на T является медианной т. и т.т., когда она представима в виде положительной линейной комбинации $h_1\rho^{A_1} + \ldots + h_k\rho^{A_k}$ разрезных полуметрик на T, и семейство $\mathcal{F} = \{A_1, \ldots, A_k, T - A_1, \ldots, T - A_k\}$ обладает свойством Хэлли, т.е. любое подсемейство попарно пересекающихся множеств в $\mathcal{F}$ имеет непустое общее пересечение;

(ii) множества $A_1, \ldots, A_k$ в (i) определяются однозначно с точностью до дополнений, и разрезы $\delta(A_1), \ldots, \delta(A_k)$ графа $H(\mu)$ — это в точности его орбиты.

Простейшим примером модулярного немедианного графа служит $K_{2,3}$; по теореме 5.3, метрика $\mathrm{d}^{K_{2,3}}$ минимизируемая. С другой стороны медианный граф может иметь неминимизируемую метрику; например, скелетный граф B_p куба размерности $p \geq 3$ является медианным, но его метрика не минимизируемая, так как B_3 содержит изометрический 6-цикл. Чепой [Chp] показал, что ЗМНР разрешима в сильнополиномиальное время для любой медианной метрики. Альтернативный и простой алгоритм в [35] использует стандартную технику распараллеливания разрезов. Приведем его с краткими комментариями.

Алгоритм решения ЗМНР для медианной метрики μ. Представим μ как в (5.10)(i). Для заданных V, c и $i = 1, \ldots, k$ найдем минимальный разрез $\delta(X_i)$ в (K_V, c), разделяющий A_i и $T - A_i$. Положим $\mathcal{X} := \{X_1, \ldots, X_k, \overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_k\}$, где $\overline{X}_i := V - X_i$, и образуем комбинацию $m := h_1\rho^{X_1} + \ldots + h_k\rho^{X_k}$ разрезных полуметрик на V. Тогда m — расширение μ на V. Возможны два случая. (а) В $\mathcal{X}$ нет пересекающихся множеств Y, Z таких, что $Y \cap Z \cap T = \emptyset$. Тогда из свойства Хэлли в (5.10) выводится, что m — 0-расширение. Минимальность разрезов $\delta(X_i)$ обеспечивает оптимальность m. (б) В $\mathcal{X}$ есть указанная пара Y, Z. Пусть для определенности $Y \cap T = A_i$ и $Z \cap T = A_j$. Положим $Y' := Y - Z$ и $Z' := Z - Y$. Тогда $Y' \cap T = A_i$, $Z' \cap T = A_j$ и $c(\delta(Y')) + c(\delta(Z')) \leq c(\delta(Y)) + c(\delta(Z))$, вследствии чего $\delta(Y'), \delta(Z')$ — тоже минимальные разрезы для A_i, A_j. Следовательно, мы можем заменить Y, Z на Y', Z' ("распараллелить" разрезы $\delta(Y), \delta(Z)$). Показывается, что независимо от выбора Y, Z, последовательность $O(|T|^2|V|)$ таких операций распараллеливания дает семейство $\mathcal{X}$ как в (а), решая ЗМНР. [Более аккуратный выбор требует лишь $O(k^2)$ распараллеливаний.]

5.5 Основная теорема и орбитная аддитивность. Мы обобщаем вышеуказанный алгоритм на более широкий класс модулярных метрик, определяемый в терминах т.н. орбитных графов. Для орбиты Q модулярного графа $H = (T, U)$ *орбитный граф* H_Q — это граф $H//(U - Q)$, получаемый стягиванием ребер в $U - Q$ и затем отождествлением возникающих кратных ребер. Наш основной результат — следующий (см. [41]).

Теорема 5.15 *Пусть μ — модулярная метрика с опорным графом $H = (T, U)$. Пусть для каждой орбиты Q в H*

(i) *орбитный граф H_Q рамочный, и*

(ii) *H_Q изоморфен некоторому подграфу графа (T, Q).*

Тогда ЗМНР(μ) разрешима в сильнополиномиальное время.

Замечание 5.16 Из (5.10) выводится, что каждый орбитный граф медианного графа — это простейший рамочный граф K_2. Поэтому класс $\mathcal{K}$ метрик μ в данной теореме включает все медианные метрики. Показывается, что каждый орбитный граф рамочного графа —

тоже рамочный. Однако имеются рамочные графы H, для которых условие (ii) в теореме не выполняется для некоторой орбиты Q. Следовательно, $\mathcal{K}$ включает не все минимизируемые метрики.

Доказательство теоремы существенно опирается на теоретико-графовый результат, касающийся существования ретракции декартова произведения орбитных графов H_Q в канонически вложенный основной граф H. Мы даем некоторые пояснения к доказательству, объясняя, в частности, почему операции, используемые в предлагаемом эффективном методе решения ЗМНР(μ) можно считать обобщением распараллеливания разрезов.

Рассмотрим сначала произвольную модулярную метрику μ с опорным графом $H = (T, U)$ и орбитами $Q_1, \ldots, Q_k$ в H. Обозначим: (а) h_i — значение $\mu(e)$, $e \in Q_i$; (б) $H_i = (T_i, U_i)$ — граф H_{Q_i}; (в) $\mathcal{F}_i = \{A_i(t) : t \in T_i\}$ — разбиение T, где $A_i(t)$ — множество вершин в H, стягиваемое в t при образовании H_i; (г) ℓ_i — характеристическую функцию орбиты Q_i в $\mathbf{R}^U$; (д) μ_i — полуметрику d^{H,ℓ_i} на T. С помощью (5.3) показывается, что каждое множество $A_i(t)$ *выпуклое* для d^H, и соответствующие свойства медианных метрик в (5.10) обобщаются на произвольные модулярные метрики.

Лемма 5.17 (i) $\mu = h_1\mu_1 + \ldots + h_k\mu_k$.
(ii) *Семейство* $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{F}_k$ *обладает свойством Хэлли.*

Пусть теперь заданы $V \supseteq T$ и $c : \binom{V}{2} \to \mathbf{R}_+$. Из (i) в лемме следует, что любое $m \in \mathrm{Ext}^0(\mu, V)$ представимо как $h_1 m_1 + \ldots + h_k m_k$, где m_i — 0-расширение μ_i на V. Тогда

$$\tau(\mu, V, c) \geq h_1\tau(\mathrm{d}^{H_1}, V_1, c_1) + \ldots + h_k\tau(\mathrm{d}^{H_k}, V_k, c_k), \tag{5.11}$$

где V_i получается из V стягиванием каждого подмножества $A_i(t)$ в точку t, и c_i индуцируется c. Нас интересует ситуация, когда ЗМНР(μ) сводится к задачам с метриками $\mathrm{d}^{H_1}, \ldots, \mathrm{d}^{H_k}$, которые “выглядят проще”.

Определение. Метрика μ называется *орбитно-аддитивной*, если (5.11) обращается в равенство для любых V, c.

Для такой метрики μ оптимальное значение (а следовательно, и оптимальное 0-расширение) находится эффективно, если ЗМНР(d^{H_i}) эффективно разрешимая для всех i. Последнее имеет место, например, в случае рамочных графов H_i в силу следствия 5.6. Вопрос, какие модулярные метрики являются орбитно-аддитивными, несколько упрощается путем сведения к чисто графовым метрикам.

Лемма 5.18 *Метрика μ орбитно-аддитивная, если опорный граф $H(\mu)$ орбитно-аддитивный (т.е. его метрика орбитно-аддитивная).*

Ввиду сказанного, теорема 5.15 выводится из следующего результата.

Теорема 5.19 *Модулярный граф H, удовлетворяющий (i) и (ii) в теореме 5.15, является орбитно-аддитивным.*

5.6 Ретракция и распараллеливание. Дальнейшая редукция приводит нас к проблеме ретракции (для двудольного графа — это отображение его вершин на вершины выделенного подграфа, сохраняющее ребра). Рассмотрим *декартово произведение* $K = (V(K), E(K)) = H_1 \times \ldots \times H_k$ орбитных графов (т.е. $V(K) = T_1 \times \ldots \times T_k$, и вершины (точки) $z = (z_1, \ldots, z_k)$ и $w = (w_1, \ldots, w_k)$ смежны т. и т.т., когда они различаются ровно в одной, скажем, i-й, компоненте, и при этом $z_i w_i \in U_i$). Каждому полюсу $v \in T$ сопоставим (единственную) вершину $\phi(v) = z$ в K такую, что $v \in A_i(z_i)$, $i = 1, \ldots, k$. Рассмотрим 0-расширения $m_1, \ldots, m_k$ вышеуказанных полуметрик $\mu_1, \ldots, \mu_k$ на одно и то же множество V. Сопоставим каждой точке $x \in V$ (единственную) вершину $\psi(x) = z$ в K такую, что $m_i(xv) = 0$ для (всех) $v \in A_i(z_i)$. Нам важны следующие свойства ϕ и ψ (следующие из $\mathrm{d}^H = \mu_1 + \ldots + \mu_k$ и $\mathrm{d}^K(zw) = \mathrm{d}^{H_1}(z_1 w_1) + \ldots + \mathrm{d}^{H_k}(z_k w_k)$).

Лемма 5.20 (i) $\mathrm{d}^H(st) = \mathrm{d}^K(\phi(s)\phi(t))$ *для всех* $s, t \in T$, *т.е.* ϕ *индуцирует изометрическое вложение* H *в* K. (ii) $m(xy) = \mathrm{d}^K(\psi(x)\psi(y))$ *для всех* $x, y \in V$, *где* $m := m_1 + \ldots + m_k$.

Наша цель — показать следующее.

Теорема 5.21 *Пусть* K *— декартово произведение рамочных графов* $H_i = (T_i, U_i)$, $i = 1, \ldots, k$. *Пусть* K' *— изометрический модулярный подграф в* K, *удовлетворяющий следующему условию* $(*)$: *для некоторого* $s \in V(K')$ *любая вершина в* K, *отличающаяся от* s *только в одной компоненте, принадлежит* K'. *Тогда существует ретракция* K *на* K', *т.е. отображение* $\gamma : V(K) \to V(K')$, *тождественное на* $V(K')$ *и сохраняющая ребра.*

Поясним, почему теорема 5.19 получается из теоремы 5.21. Возьмем $K' = \phi(H)$ (это корректно, так как условие $(*)$ на K' следует из (ii) в теореме 5.15). Поскольку γ не увеличивает, а ϕ сохраняет расстояния, для отображения $\sigma := \phi^{-1}\gamma$ имеем $\mathrm{d}^K(zw) \geq \mathrm{d}^H(\sigma(z)\sigma(w))$ для всех $z, w \in V(K)$. Для заданных V, c пусть m_i — 0-расширение μ_i на V с минимальным $c \cdot m_i$. Тогда $c \cdot m_i = \tau(\mathrm{d}^{H_i}, V_i, c_i) =: \tau_i$, и для расширения $m := m_1 + \ldots + m_k$ метрики d^H имеем

$$c \cdot m = \tau_1 + \ldots + \tau_k. \tag{5.12}$$

Если бы m было 0-расширением, мы сразу же получили бы требуемое равенство в (5.11). В общем случае мы находим 0-расширение m', "не худшее", чем m, используя σ и ψ. А именно: положим $m'(xy) := \mathrm{d}^H(\sigma(\psi(x))\sigma(\psi(y)))$, $x, y \in V$. Это m' — 0-расширение d^H, и поскольку σ нерасширяющее, а ψ изометрическое (по лемме 5.20), имеем $m' \leq m$. Следовательно, $\tau(\mathrm{d}^H, V, c) \leq c \cdot m' \leq c \cdot m$, что вместе с (5.12) дает нужное равенство в (5.11).

При доказательстве теоремы 5.21 достаточно ограничиться случаем двухорбитных графов: $k = 2$. А именно: с помощью свойства Хэлли для $\mathcal{F}$ ((ii) в лемме 5.17), показывается, что

(5.13) ретракция $\gamma : K \to K'$ существует, если для всех $1 \leq i < j \leq k$ существует ретракция γ_{ij} графа $K_{ij} := H_i \times H_j$ на подграф K'_{ij}, являющийся проекцией K' в K_{ij}; для каждой вершины $z \in V(K)$ $\gamma(z)$ эффективно строится при помощи таких γ_{ij}.

Показать справедливость теоремы 5.21 для случая $k = 2$ — ключевое место всего доказательство теоремы 5.15. Требуемая ретракция эффективно конструируется с использованием свойств жестких оболочек метрик рамочных графов.

Замечание 5.22 (i) В случае медианного графа H ретракция γ_{ij} определяется тривиально (ввиду $H_i \simeq H_j \simeq K_2$) и индуцирует операцию распараллеливания соответствующей пары минимальных разрезов. В общем случае γ_{ij} индуцирует преобразование соответствующей пары 0-расширений метрик $\mathrm{d}^{H_i}, \mathrm{d}^{H_j}$, для которого мы используем аналогичный термин "распараллеливание", объясняющий название нашего метода.

(ii) Знание ретракций γ_{ij} позволяет решать ЗМНР(μ) более экономным способом, в котором минимальное 0-расширение определяется только один раз для каждого H_i (что, впрочем, может требовать применения метода эллипсоидов). "Комбинаторный" эффективный алгоритм решения предлагается в [39] для ЗМНР($\mathrm{d}^{K_{2,r}}$) и обобщается на минимизируемые метрики, для которых каждый орбитный граф опорного графа — это K_2 или $K_{2,r}$.

(iii) В [41] выдвинуты гипотезы, что условие (ii) в теореме 5.15 можно исключить, и что задача становится NP-трудной, если хотя бы один орбитный граф H_i нерамочный. Подтверждение этого сделало бы известным сложностной статус ЗМНР(μ) для всех μ. Далее, класс нерамочных модулярных ориентируемых графов с одной орбитой (для которых сложность задачи пока не известна) довольно велик. В частности, он содержит графы решеток подпространств для всех конечных проективных геометрий.

$ 4 Примитивно-конечные метрики и связь с мультипотоками

Примитивным расширением конечной метрики μ называется ее экстремальное расширение (см. п. 5.3), само являющееся метрикой. Обозначим $\Pi(\mu)$ множество всех примитивных расширений μ на конечные множества. Свойство экстремальности полуметрики сохраняется как при стягивании любого ее 0-множества в одну точку, так и при раздувании любой точки в 0-множество. Поэтому каждое $m \in \Pi(\mu)$ служит минимальным представителем соответствующего подмножества экстремальных расширений для μ (а именно, множества всех 0-расширений самого m). Тривиальное примитивное расширение метрики μ — это она сама, и, ввиду (5.4), минимизируемость μ эквивалентна *единственности* этого примитивного расширения: $\Pi(\mu) = \{\mu\}$.

Интересен вопрос: какие μ имеют *конечные* множества $\Pi(\mu)$? Такие метрики называются *примитивно-конечными,* или *ПК-метриками.* Ответ на вопрос дается в [40], и в этом параграфе мы излагаем основные полученные результаты. Класс ПК-метрик будет охарактеризован в п. 5.7 комбинаторно, а также через размерность жестких оболочек. В п. 5.8 мы показываем связь с метрической мультипотоковой задачей (см. п. 2.6) и затрагиваем вопросы дробности.

5.7 Описание и свойства класса ПК-метрик.

Прежде всего дадим некоторые примеры. (а) d^H для $H = (T, U) \simeq K_3$ имеет только одно нетривиальное примитивное расширение, а именно, $\frac{1}{2}\mathrm{d}^G$, где G — звезда с множеством висячих вершин T. (б) В [18] показано, что $|\Pi(\mathrm{d}^{K_{p,q}})|$ конечно и не превосходит 2^{pq+1}. (в) $\Pi(\mathrm{d}^H)$ бесконечно для $H = C_6$ и $H \simeq K_{3,3}^-$ (графа, получаемого удалением одного ребра в $K_{3,3}$).

Наша главная теорема дает два описания ПК-метрик.

Теорема 5.23 *Для рациональной метрики μ на T следующие свойства эквивалентны:*

(i) $\Pi(\mu)$ *конечное;*

(ii) $\lambda\mu$ *— подметрика метрики* d^H *для некоторого рамочного графа H и целого $\lambda > 0$;*

(iii) *опорный граф $H(m)$ модулярного замыкания (V, m) метрики μ двудольный и не содержит в качестве изометрического подграфа ни C_k, $k \geq 6$, ни $K_{3,3}^-$* (такой граф называется *полурамочным*).

Объясним понятие *модулярного замыкания* (V, m). Это примитивное модулярное расширение, определяемое конструктивно с помощью следующего процесса. Вначале положим $V := T$ и $m := \mu$. Если m уже модулярное, процесс оканчивается. Иначе выберем безмедианную тройку $\{s_0, s_1, s_2\}$ для (V, m), добавим к V новую точку v и сделаем ее медианой для s_0, s_1, s_2, определяя соответствующие (единственные) расстояния от нее до этих точек. Затем последовательно задаем расстояния от v до других точек. А именно, пусть расстояния уже определены до точек подмножества $V' \subset V$. Выберем $u \in V - V'$ и положим $m(uv) := \max\{m(ux) - m(xv) : x \in V' - v\}$. Продолжаем аналогично для $V' := V' \cup u$, и т.д., пока не станет $V' = V$. Повторяем процедуру для другой безмедианной тройки в текущем (V, m), и т.д.

Доказывается, что для любой рациональной метрики μ процесс оканчивается за конечное число итераций, и результирующее модулярное метрическое пространство (V, m) является примитивным расширением μ. Это и есть модулярное замыкание μ.

Замечание. A priori модулярное замыкание зависит от порядка рассмотрения точек. В [40] показывается, что оно единственно для каждой рациональной ПК-метрики. Для произвольных метрик вопрос единственности открытый.

Следующий аспект касается дробности примитивных расширений. Напомним, что полуметрика d на X называется *циклически четной*, если $d(xy) + d(yz) + d(zx) \in 2\mathbf{Z}$ для всех $x, y, z \in X$. Показывается, что модулярное замыкание циклически четной метрики — циклически четное.

Теорема 5.24 *Каждое примитивное расширение циклически четной ПК-метрики μ — полуцелочисленное. Если к тому же опорный граф модулярного замыкания μ рамочный, то каждое примитивное расширение μ целочисленное.*

Эта теорема получается в [40] как "побочный продукт" в процессе доказательства основной теоремы 5.23. Другой результат, получаемый при доказательстве и имеющий самостоятельное значение, касается классификации метрик по размерности их жестких оболочек.

Теорема 5.25 *Метрика μ примитивно-конечная т. и т.т., когда $\dim(\mathcal{T}(\mu)) \leq 2$. Более того, для любой ПК-метрики μ $\mathcal{T}(\mu)$ изоморфно $\mathcal{T}(\mathrm{d}^H/\lambda)$ для некоторого рамочного графа H и числа $\lambda > 0$. Другими словами, с точностью до подобия, жесткие оболочки размерности ≤ 2 для конечных метрик — это жесткие оболочки метрик рамочных графов и только они.*

[Эта теорема касается произвольных конечных метрик. Эквивалентность (i) и (ii) в теореме 5.23 также распространяется на нерациональные конечные метрики (с $\lambda \in \mathbf{R}_+ - \{0\}$).]

Эффективное распознавание ПК-метрик оказывается возможным благодаря результатам Дресса, характеризующим размерность жесткой оболочки в локальных терминах.

Теорема 5.26 [Dr]. *Для метрического пространства (X, d),*

(i) *если $\dim(\mathcal{T}(d)) = k < \infty$, то d имеет подметрику d' на $2k$ точках такую, что $\dim(\mathcal{T}(d')) = k$;*

(ii) *если $|X| = 2k$, то $\dim(\mathcal{T}(d)) = k$ т. и т.т., когда существует биекция $\pi : X \to X$, удовлетворяющая* (а) *$\pi(v) \neq v$ и $\pi^2(v) = v$ для всех $v \in X$ (инволюция), и* (б) *$\sum(d(v\pi(v)) : v \in X) > \sum(d(v\pi'(v)) : v \in X)$ для всех других биекций $\pi' : X \to X$.*

Ввиду (ii) в этой теореме и теоремы 5.25, примитивная конечность проверяется в сильно-полиномиальное время перебором всех биекций на 6-точечных подмножествах. В свою очередь, (i) и теорема 5.25 позволяют охарактеризовать ПК-метрики в локальных терминах.

Следствие 5.27 *Метрика является примитивно-конечной т. и т.т., когда каждая ее подметрика на 6 точках — примитивно-конечная.*

Доказательство основной теоремы 5.23 вовлекает комбинаторно-топологические аргументы и существенно использует описание и свойства минимизируемых графовых метрик. Скажем несколько слов о структуре доказательства. Чтобы получить импликацию (ii)$\to$(i), показывается, что мощность множества $\Pi(\lambda\mu)$ (равная мощности $\Pi(\mu)$) оценивается сверху общим количеством подметрик в примитивных расширениях для d^H, поэтому $|\Pi(\mathrm{d}^H)| = 1$ обеспечивает конечность $|\Pi(\mu)|$. В основе доказательства (i)$\to$(iii) лежит явная конструкция примитивных расширений для метрик графов C_k ($k \geq 6$) и $K_{3,3}^-$, которые имеют собственные подметрики, пропорциональные метрике $K_{3,3}^-$ с коэффициентом пропорциональности < 1. Это позволяет рекурсивно построить бесконечную последовательность различных примитивных расширений для μ, начиная с модулярного замыкания m, при нарушении (iii). Доказательство ключевой импликации (iii)$\to$(ii) основано на идее расщепления орбиты полурамочного графа с орбитно-инвариантными длинами ребер. Определенным образом организованная последовательность операций расщепления орбит, примененная к модулярному замыканию m и его опорному графу, строит искомый рамочный граф H, в метрику которого вкладывается λm (и следовательно, $\lambda\mu$) для некоторого целого λ. Отметим, что если μ циклически четная, то $\lambda = 2$, а если к тому же все орбиты $H(m)$ ориентируемые, то $\lambda = 1$; это влечет теорему 5.24.

5.8 ПК-метрики и метрическая мультипотоковая задача.

Напомним, что метрическая мультипотоковая задача (ММЗ) (см. с. 36) задается потоковой сетью $(G = (V, E), c)$ и метрикой μ на множестве полюсов $T \subseteq V$. В ней нужно найти свободный мультипоток f, максимизирующий сумму мощностей составляющих потоков f_{st}, взвешенных числами $\mu(st)$. Это задача линейного программирования, и ее двойственная задача легко преобразуется к задаче минимизации $c \cdot m$ среди всех расширений m метрики μ на множество T (ср. (2.4)), т.е. к ЗМР для μ, V, c (без ограничения общности считая, что граф G полный, т.е. c определено на $\binom{V}{2}$).

Как указывалось в п. 5.3, ЗМР имеет оптимальное решение, являющееся экстремальным расширением μ на V. Поэтому $\Pi(\mu)$ описывает множество всех неизбегаемых "типов" оптимальных двойственных решений метрической мультипотоковой задачи с фиксированным μ

и всевозможными G, c (в том смысле, что этими решениями являются 0-расширения метрик в $\Pi(\mu)$). Так каждая минимизируемая метрика μ дает всего один двойственный "тип" для ММЗ, а именно, само μ, в то время как множество "типов" становится бесконечным, если μ — не ПК-метрика. Далее, из теоремы 5.24 и аргументов в доказательстве (i)$\to$(iii) теоремы 5.23 вытекает следующий результат о дробности ЗМР (или двойственной дробности ММЗ).

Следствие 5.28 *Пусть μ — целочисленная метрика на T, и пусть ЗМР(μ) обозначает множество задач о минимальном расширении с фиксированным μ и произвольными V, c. Тогда $\varphi(\text{ЗМР}(\mu)) \in \{1, 2, 4\}$, если μ примитивно конечная, и $\varphi(\text{ЗМР}(\mu)) = \infty$ — иначе.*

VI. Приложение. Сепарабельная выпуклая минимизация над унимодулярным линейным пространством и её приложения

Задачи о мультипотоках, рассмотренные в разделах I–III, возникают как естественные обобщения классических задач об одном потоке в сети. В то же время (одно)потоковые алгоритмы часто используются как процедуры в методах решения мультипотоковых задач, и быстрота первых влияет на эффективность последних. Для стандартных потоковых задач накоплен большой арсенал быстрых методов и приемов (см. [ADK,AMO,GTT]), и развитие этого направления продолжается. Одним из этапным событий в области потоковых алгоритмов стало появление алгоритма Гольдберга и Таржана [GT] для *задачи о циркуляции минимальной стоимости* (являющейся широко используемым для алгоритмического дизайна представителем класса эквивалентных задач о потоках минимальной стоимости и транспортных задач). Итерация этого комбинаторного алгоритма улучшает текущию циркуляцию преобразованием ("пропусканием потока") вдоль цикла *минимальной средней стоимости*. Оказалось, что это простое правило выбора цикла обеспечивает быструю сходимость и нахождение оптимальной циркуляции в сильнополиномиальное время.

Позднее идея "минимального среднего цикла" была применена в эффективных алгоритмах для определения эвклидова расстояния до многогранника совершенных паросочетаний двудольного графа [23] и нахождения коциркуляции минимальной стоимости [EM]. В данном Приложении эта идея развивается для решения далекого обобщения — *задачи минимизации сепарабельной выпуклой функции над унимодулярным линейным пространством* и затем над более общим линейным пространством *ограниченной дробности*. Предлагаемый метод имеет комбинаторный характер и в общем случае обеспечивает геометрическую двойственную сходимость. Мы также обобщаем убыстренную версию алгоритма минимального среднего цикла. Для разнообразных рассматриваемых частных случаев функции и пространства наши методы воплощаются в полиномиальные и сильнополиномиальные алгоритмы точного решения, не худшие по временным оценкам, чем известные ранее специализированные алгоритмы (в тех случаях, когда таковые имелись).

Результаты Приложения опубликованы в работах [12, 23, 33].

$ 1 Постановка задачи, частные случаи и источники методов

В изложении используются известные понятия факты из линейной алгебры, выпуклого анализа и теории матроидов; см, например, [Ro1,Sch1,We].

Пусть E — конечное множество, и L — подпространство эвклидова пространства $\mathbb{R}^E$, задаваемое как множество решений x системы линейных уравнений $Mx = 0$ с целочисленной $n \times m$ матрицей M ранга $n \neq 0, m$, где $m = |E|$. В *задаче (неограниченной) сепарабельной выпуклой минимизации* требуется

(6.1) *Найти* $x \in L$ *с минимальным* $w(x) := \sum_{e \in E} w_e(x_e)$,

где каждая заданная функция $w_e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ выпуклая. Мы предполагаем, что (6.1) имеет *конечное* оптимальное решение x. [При естественном задании w это может быть проверено решением двух линейных программ, см. [Ro2].] Хохбаум и Шантикумар [HS] предложили общий метод решения этой задачи, основанный на шкалировании и линеаризации w и решении расширенных линейных программ.

В наших, более комбинаторных, методах решения (6.1) временная сложность будет зависеть от свойств L. Под *циклом* (*коциклом*) для L будет пониматься целочисленный вектор $\xi \ne 0$ в L (соответственно, в ортогональном дополнении $L^{\perp}$) с наибольшим общим делителем 1 его компонент и минимальным по включению носителем $\mathrm{supp}(\xi)$. Максимум абсолютных величин компонент среди всех циклов называется *дробностью* L и обозначается $q(L)$. *Унимодулярное пространство* L характеризуется любым из следующих эквивалентных свойств: (а) матрица M вполне унимодулярная; (б) $L^{\perp}$ задается как множество решений системы $Kx = 0$ с вполне унимодулярной $(m-n)\times m$ матрицей K; (в) все циклы L — $(0,\pm 1)$-вектора, т.е. $q(L) = 1$; (г) все коциклы L — $(0,\pm 1)$-вектора, т.е. $q(L^{\perp}) = 1$. [Такое L ассоциируется с *регулярным матроидом*, циклы которого соответствуют циклам L с точностью до множителей ± 1.] Основными параметрами для нас будут максимальные размеры (количества ненулевых компонент) цикла и коцикла, обозначаемые ϕ и $\phi^{\perp}$, соответственно, а также числа $\rho := \mathrm{rank}(M) = m - \dim(L)$ и $\rho^{\perp} := \mathrm{rank}(K) = m - \dim(L^{\perp})$. Тогда $\phi \le \rho + 1 = n + 1$ и $\phi^{\perp} \le \rho^{\perp} + 1 = m - n + 1$.

Основные рассмотрения будут касаться унимодулярных пространств L. Базовыми примерами служат множество циркуляций и множество коциркуляций орграфа $G = (V, E)$. *Циркуляция* — это вектор $x \in \mathbb{R}^E$, удовлетворяющий условию сохранения $\sum(x_e : e = (j, i) \in E) = \sum(x_e : e = (i, k) \in E)$ во всех вершинах $i \in V$. *Коциркуляция* (или функция разности потенциалов) $\Delta\pi \in \mathbb{R}^E$ индуцируется вектором $\pi \in \mathbb{R}^V$ и определяется как $\Delta\pi(i, j) = \pi_j - \pi_i$ для $(i, j) \in E$. Пространство $\mathcal{C}$ циркуляций в G задается матрицей инциденций вершины–дуги и ортогонально пространству коциркуляций.

Наиболее популярна классическая задача о циркуляции минимальной стоимости, сокращенно, *задача о линейной циркуляции*: для заданных нижних и верхних дуговых пропускных способностях $\ell, u \in \mathbb{R}^E$ $(\ell \le u)$ и удельных дуговых стоимостях $c \in \mathbb{R}^E$ найти $x \in \mathcal{C}$, минимизирующее $\sum_{e \in E} c_e x_e$ при ограничении $\ell \le x \le u$. Она сводится к "неограниченной" задаче (6.1) при стандартной замене ящичных ограничений быстрорастущими линейными функциями: для каждого $e \in E$ и $r \in \mathbb{R}$ определим $w_e(r)$ как $c_e u_e + \alpha(r - u_e)$ при $r > u_e$, $c_e r$ при $\ell_e \le r \le u_e$, и $c_e \ell_e + \alpha(\ell_e - r)$ при $r < \ell_e$, где α — достаточно большое положительное число. Это дает частный случай сепарабельной кусочно-линейной целевой функции w. Аналогично сводится задача о коциркуляции минимальной стоимости.

Еще один пример — задача нахождения квадрата эвклидова расстояния до многогранника совершенных паросочетаний двудольного графа (ЗРМСП). Известно, что для двудольного графа $G = (V, E)$ выпуклая оболочка (характеристических векторов) совершенных паросочетаний совпадает с множеством $\mathcal{P}$ векторов $x \in \mathbb{R}^E$, удовлетворяющих $x_e \ge 0$ $(e \in E)$ и $\sum(x_e : e \in E_v) = 1$ $(v \in V)$, где E_v — множество ребер, инцидентных v. Требуется найти точку $x \in \mathcal{P}$ с минимальным $\sum(x_e^2 : e \in E)$. Введением дополнительной вершины эта задача сводится к задаче о циркуляции на специальном орграфе, но с квадратичной целевой функцией, и далее к (6.1).

Алгоритм Гольдберга и Таржана [GT] решает задачу о линейной циркуляции следующим образом. Пусть x — текущая допустимая циркуляция для G, ℓ, u. Для простого цикла $F = (v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k = v_0)$ в G с множеством A прямых дуг $e_i = (v_{i-1}, v_i)$ и множеством B обратных дуг $e_i = (v_i, v_{i-1})$ определим *стоимость* F относительно x как $c(x, F) := \sum(c_e : e \in A) - \sum(c_e : e \in B)$, и *среднюю стоимость* как $\overline{c}(x, F) := c(x, F)/(|A| + |B|)$. Скажем, что F *допустимый*, если $\delta_e := u_e - x_e > 0$ для всех $e \in A$ и $\delta_e := x_e - \ell_e > 0$ для всех $e \in B$. *Минимальный средний цикл* — это допустимый цикл минимальной средней стоимости. Итерация алгоритма отыскивает такой цикл F. Если $c(x, F) \geq 0$, x уже оптимальное. Иначе изменяем x, "пропуская поток" величины $\delta := \min\{\delta_e : e \in A \cup B\}$ вдоль F (или "сдвигая" x на δ вдоль F), т.е. увеличивая x_e на δ для $e \in A$ и уменьшая x_e на δ для $e \in B$. Нетривиальный факт состоит в том, что число итераций ограничено полиномом от $|V|, |E|$. Для нахождения минимального среднего цикла на итерации применяется известный алгоритм Карпа [Krp] с оценкой $O(|V||E|)$.

Выше отмечалось, что идея минимального среднего цикла была позднее применена в эффективных алгоритмах для ЗРМСП [23] и для задачи о линейной коциркуляции [EM] (в последнем случае роль "циклов" играют разрезы графа). В $ 2 мы обобщаем эту идею для решения задачи (6.1), получая эффективный метод для унимодулярных пространств и вообще пространств L ограниченной дробности q. Примером последнего (с $q = 2$) служит пространство "циркуляций" *неориентированного* графа (в частности, возникающее в релаксации известной задачи обобщенного паросочетании; см., например, [GLS]). Важный для приложений пример возникает при добавлении новых равенств к унимодулярной системе $Mx = 0$, когда сумма абсолютных величин коэффициентов в этих равенствах не превышает $k = \log_2 q$. Например, в задаче о циркуляции можно добавить потоковые равенства $x_e = x_{e'}$ для $k/2$ пар дуг $\{e, e'\}$, получая пространство дробности $\leq q$.

Гольдберг и Таржан также предложили в [GT] убыстренную версию их алгоритма для задачи о линейной циркуляции (в оригинале — Cancel-and-Tighten method). Убыстрение достигается за счет работы с "близкими к минимальным средним" циклами (нахождение которых значительно проще) и агрегирования итераций. Мы обобщаем этот метод в $ 3.

В указанных частных случаях наши общие методы воплощаются в алгоритмы, близкие к алгоритмам в [GT],[23],[EM], и имеют не худшие временные оценки. Предлагаемые методы модифицируются для задачи (6.1) с дополнительным требованием *целочисленности* решения x. Полученные временные оценки для общего, частных и целочисленного случаев даются в $ 4.

$ 2 Общий метод минимального среднего цикла (ММСЦ)

По аналогии со случаем задачи на орграфе будем называть вектора унимодулярного пространства L ($L^\perp$) *циркуляциями* (*коциркуляциями*).

Выпуклость w_e влечет существование правой производной, обозначаемой $c_e^{\vdash}(r)$, и левой производной, $c_e^{\dashv}(r)$, в каждой точке $r \in \mathbb{R}$. Числа $c_e^{\vdash}(r)$ и $c_e^{\dashv}(r)$ интерпретируются как *правая* и *левая стоимости* элемента e в точке r, соответственно. Они удовлетворяют свойству монотонности:

$$c_e^{\dashv}(r) \le c_e^{\vdash}(r) \le c_e^{\dashv}(r') \le c_e^{\vdash}(r') \qquad \text{при } r < r'. \tag{6.2}$$

Для наших целей предполагается, что каждая функция w_e задается *оракулом*, который:

(O) (i) для предъявляемой точки $r \in \mathbb{R}$ сообщает стоимости $c_e^{\vdash}(r)$ и $c_e^{\dashv}(r)$;
(ii) для "наклона" $p \in \mathbb{R}$ сообщает точку r такую, что $c_e^{\dashv}(r) \le p \le c_e^{\vdash}(r)$.

[Для линейных и квадратичных функций (O) реализуется эффективными процедурами.]

Далее будем предполагать унимодулярность L. Будем ассоциировать $(0, \pm 1)$-вектор ξ с парой $F_\xi = (A_\xi, B_\xi)$, где $A_\xi = \{e : \xi_e = 1\}$ и $B_\xi = \{e : \xi_e = -1\}$. Если ξ — цикл (коцикл) в L, F_ξ также назовем циклом (коциклом); множество таких F_ξ обозначим $\mathcal{F}$ (соответственно, $\mathcal{F}^\perp$). *Размер* цикла $F = (A, B)$ — это $|F| := |A| + |B|$. Для фиксированной точки $x \in L$ и цикла $F = (A, B)$ обозначим $\sum_{e \in A} c_e^{\vdash}(x_e)$ через $c^{\vdash}(x, A)$, $\sum_{e \in B} c_e^{\dashv}(x_e)$ через $c^{\dashv}(x, B)$, и $c^{\vdash}(x, A) - c^{\dashv}(x, B)$ через $c(x, F)$, называя последнее *стоимостью* F в точке x.

Предположим, имея цикл $F = (A, B)$ и циркуляцию $x \in L$, мы хотим "сдвинуть x вдоль F на $\delta > 0$", т.е. увеличить x на δ на элементах A и уменьшить x на δ на элементах B. Тогда локальное изменение значения целевой функции на единицу приращения δ будет $c(x, F)$. Скажем, что F *отрицательный* в x, если $c(x, F) < 0$. *Средняя стоимость* F в x определяется как $\overline{c}(x, F) := c(x, F)/|F|$, и F называется *минимальным средним циклом*, если $\overline{c}(x, F)$ минимальное. Положим

$$\lambda(x) := \max\{0, -\min\{\overline{c}(x, F) : F \in \mathcal{F}\}\}. \tag{6.3}$$

Лемма 6.1 *$x \in L$ — оптимальное решение (6.1) т. и т.т., когда в x нет отрицательного цикла, или, эквивалентно, когда $\lambda(x) = 0$.*

Этот критерий можно доказать в комбинаторном духе, используя только линейное программирование (см. [33]). Необходимость отсутствия отрицательных циклов устанавливается просто, а достаточность доказывается вместе с оценкой $\lambda(x)$ через т.н. редуцированные стоимости (показывающей, что $\lambda(x)$ — это ℓ_∞-расстояние от текущего вектора стоимостей до $L^\perp$). Здесь для циркуляции x и коциркуляции h *правая* и *левая редуцированные стоимости* элемента e определяются как $c_e^{\vdash}(x_e) - h_e$ и $h_e - c_e^{\dashv}(x_e)$, соответственно.

Лемма 6.2 *Существует $h \in L^\perp$ такое, что*

$$c_e^{\vdash}(x_e) - h_e \ge -\lambda(x) \quad \textit{and} \quad h_e - c_e^{\dashv}(x_e) \ge -\lambda(x) \quad \textit{для всех } e \in E. \tag{6.4}$$

При этом цикл $F = (A, B)$ является минимальным средним циклом в x т. и т.т., когда $c_e^{\vdash}(x_e) - h_e = -\lambda(x)$ для всех $e \in A$ и $h_e - c_e^{\dashv}(x_e) = -\lambda(x)$ для всех $e \in B$.

Эти леммы дают теоретическую основу нашего метода. Он предполагает наличие эффективной процедуры решения вспомогательной *задачи о минимальном среднем цикле*:

(6.5) *Для данного $x \in L$, определить $\lambda = \lambda(x)$, и если $\lambda > 0$, найти минимальный средний цикл $F = (A, B)$ в x и коциркуляцию $h \in L^\perp$, удовлетворяющую (6.4).*

Метод минимального среднего цикла для (6.1) с унимодулярным L (см. [33]). Начинаем с некоторого (разумного) $x \in L$, и вычисляем $\lambda = \lambda(x)$, решая (6.5). Если $\lambda = 0$, то x оптимальное (согласно лемме 6.1). Иначе ($\lambda > 0$) рассматриваем F и h, найденные в (6.5). Для каждого элемента $e \in F$ полагаем $p := h_e$ и обращаемся к оракулу (O)(ii), чтобы определить величину δ_e (желаемую длину сдвига) такую, что

$$\begin{cases} c_e^{\dashv}(x_e + \delta_e) \le h_e \le c_e^{\vdash}(x_e + \delta_e), & \text{если } e \in A, \\ c_e^{\dashv}(x_e - \delta_e) \le h_e \le c_e^{\vdash}(x_e - \delta_e), & \text{если } e \in B. \end{cases} \tag{6.6}$$

[Из свойства (6.2) и леммы 6.2 следует, что δ_e существует и $\delta_e > 0$.] Окончательная длина сдвига δ определяется как $\min\{\delta_e : e \in A \cup B\}$ (иначе говоря, мы равномерно сдвигаем x вдоль F до тех пор, пока для какого-либо e редуцированная стоимость относительно h не станет нулевой). Образуем $x' \in L$ сдвигом x вдоль F на δ и делаем x' новой текущей точкой x в L. Продолжаем процесс, пока $\lambda(x)$ не станет “достаточно малым”.

Правило выбора длины сдвига δ — решающее для сходимости метода (в частности, оно действительно уменьшает целевое значение). Оно заимствовано из алгоритма для квадратичной задачи в [23]. В простейшем случае — задаче о линейной циркуляции — это превращается в выбор длины сдвига в алгоритме Гольдберга и Таржана: δ максимальное при условии ненарушения двухсторонних пропускных способностей дуг.

ММСЦ имеет геометрическую сходимость в терминах $\lambda(x)$, ввиду следующих двух лемм (первая аналогична соответствующей лемме в [GT], а вторая — в [23]).

Лемма 6.3 $\lambda(x') \le \lambda(x)$.

Лемма 6.4 *Последовательность* $\rho^{\perp} + 1$ *итераций уменьшает* λ *в* $\ge (1 - 1/2\phi)^{-1}$ *раз.*

Таким образом, λ уменьшается вдвое за $O(\rho^{\perp}\phi)$ итераций. Для вспомогательной задачи (6.5) мы применяем алгоритм в [12], решающий задачу о минимальном среднем цикле для ограниченно-дробных пространств в сильнополиномиальное время. Он имеет временную оценку $O(\rho\phi\Lambda_1(n,m))$ для унимодулярного L, где $\Lambda_q(n,m)$ — время решения задачи линейного программирования размера $n \times m$ над пространством дробности q. Это дает следующий результат.

Теорема 6.5 *Пусть* L *унимодулярное,* β *— верхняя оценка на* $\lambda(x_0)$ *для начального* $x_0 \in L$*, и* $\epsilon > 0$ *— желаемая верхняя оценка на* $\lambda(x)$*. Тогда ММСЦ находит* $x \in L$ *с* $\lambda(x) \le \epsilon$ *за* $O(\rho^{\perp}\phi\log(\beta/\epsilon))$ *итераций, и каждая итерация выполняется за время* $O(\rho\phi\Lambda_1(n,m))$*.*

Леммы и алгоритм обобщаются на пространства L дробности q. В этом случае стоимость $c(x,\xi)$ цикла ξ в точке x определяется как $\sum(c^{\vdash}(x_e)\xi_e : \xi_e > 0) + \sum(c^{\dashv}(x_e)\xi_e : \xi_e < 0)$, а средняя стоимость $\overline{c}(x,\xi)$ — как $c(x,\xi)/\sum(|\xi_e| : e \in E)$. В частности, лемма 6.4 становится такой: последовательность $\rho^{\perp}$ итераций уменьшает λ в $\ge (1 - 1/(2q\phi))^{-1}$ раз. Оценка алгоритма в [12] для вспомогательной задачи становится $O(\rho\phi q^2\Lambda_q(n,m))$, и мы имеем такой результат: ММСЦ достигает $\lambda \le \epsilon$ за $O(\rho^{\perp}\phi q\log(\beta/\epsilon))$ итераций, и каждая итерация выполняется за время $O(\rho\phi q^2\Lambda_q(n,m))$. Следовательно, ММСЦ остается эффективным при ограниченном q.

\$ 3 Метод агрегированных сокращений (MAC)

Этот метод, обобщающий второй алгоритм в [GT], ускоряет ММСЦ по двум направлениям. Во-первых, он не требует точного нахождения минимальной средней стоимости цикла. Во-вторых, одна итерация MAC производит последовательность сдвигов вместо только одного сдвига в ММСЦ. В результате при той же скорости сходимости уменьшается как число итераций, так и время выполнения одной итерации. Дадим краткие пояснения.

В методе поддерживается верхняя оценка $\overline{\lambda}$ на $\lambda(x)$. В начале каждой итерации $\overline{\lambda}$ полагается равным абсолютной величине минимальной редуцированной стоимости элемента для текущих $x \in L$ и $h \in L^{\perp}$. Цикл $F = (A, B)$ назовем *существенным*, если $A \subseteq P^{\text{far}}$ и $B \subseteq N^{\text{far}}$, где P^{far} (N^{far}) — множество элементов $e \in E$, правая (левая) редуцированная стоимость которых относительно h не превосходит $-\overline{\lambda}/2$; ср. (6.4). [Тогда средняя стоимость F в x составляет по крайней мере половину от минимальной средней стоимости цикла $-\lambda(x)$.] Нахождение существенного цикла сводится к решению всего одной линейной унимодулярной программы.

Итерация состоит из двух стадий. Первая (*прямая*) стадия оставляет неизменной коциркуляцию h и изменяет циркуляцию x последовательными сдвигами вдоль существенных циклов. Как и прежде, для выбранного цикла $F = (A, B)$ длина сдвига полагается $\delta := \min\{\delta_e : e \in A \cup B\}$, где δ_e (определяемое с помощью (O)(ii)) удовлетворяет (6.6). Показывается, что при каждом сдвиге множество $P^{\text{far}} \cup N^{\text{far}}$ монотонно уменьшается; следовательно, после $\leq \rho^{\perp}$ сдвигов существенные циклы исчезают.

Вторая (*двойственная*) стадия пересчитывает h, решая определенную линейную унимодулярную программу. Это дает новую верхнюю оценку $\overline{\lambda}'$ на текущее $\lambda(x)$. Доказывается следующее решающее соотношение: $\overline{\lambda}' \leq (1 - 1/(2\rho + 2))\overline{\lambda}$. В результате для унимодулярных L получаем понижение временной оценки в ϕ^2 раз по сравнению с ММСЦ.

Теорема 6.6 *Пусть L, β, ϵ будут как в теореме 6.5. Тогда MAC находит $x \in L$ с $\lambda(x) \leq \epsilon$ за $O(\rho \log(\beta/\epsilon))$ итераций, и каждая итерация выполняется за время $O(\rho^{\perp}\Lambda_1(n, m))$.*

MAC модифицируется для пространств дробности q, при этом число итераций становится $O(\rho q \log(\beta/\epsilon))$, а время итерации — $O(\rho^{\perp}\Lambda_q(n, m))$. По сравнению с ММСЦ множитель q^2 в последней оценке исчезает, так как не надо обращаться к алгоритму в [12].

\$ 4 Обзор результатов

Теоремы 6.5 и 6.6 дают геометрическую двойственную сходимость, выраженную в терминах $\lambda(x)$ — абсолютной величины минимальной средней стоимости цикла в x (или соответствующего ℓ_∞-расстояния до $L^{\perp}$). Это еще ничего не говорит о прямой сходимости — приближении x к оптимальной точке (или одной из точек) x^*. Оценку последней можно дать для "быстрорастущих" функций w_e, понимая под этим существование $\alpha > 0$ такого, что на интервале, заведомо содержащем x_e и x_e^*, выполняется $c^{\dashv}(r') - c^{\vdash}(r) \geq \alpha(r' - r)$ при $r < r'$ (например, для квадратичных функций). Для них показывается $|x_e - x_e^*| \leq \alpha^{-1}\phi\lambda(x)$.

Этот и другие аргументы и средства позволяют установить быструю прямую сходимость и получить эффективные алгоритмы *точного* решения для важных специальных случаев. Полученные результаты приведены в таблице на с. 87. Дадим краткие пояснения.

1) Строки 1–5 представляют пять рассматриваемых типов целевой функции w, а столбцы I–III — три вида пространств. На пересечении указаны оценки числа итераций методов. Оценки для унимодулярных пространств получаются при $q = 1$ (в столбце I). Строка 7 оценивает время итерации.

2) Параметры $m, \phi, \phi^{\perp}\rho, \rho^{\perp}$ в столбце I — это, соответственно, число координат $|E|$, максимальный размер цикла, максимальный размер коцикла, $m - \dim(L)$, $m - \dim(L^{\perp})$. Параметры n и m в столбцах II,III — это числа вершин и дуг орграфа.

3) Для общего случая w, когда нет никаких предположений, кроме сепарабельности и выпуклости, число итераций оценивается как в теоремах 6.5 и 6.6 и их обобщениях, т.е. через границы β, ϵ для $\lambda(x)$. Для специальных случаев (строки 2–5) находятся точные оптимальные решения прямой и двойственной задач.

4) В строке 2 каждая функция w_e кусочно-линейная с целочисленным наклоном a каждого линейного участка $ax_e + b$, и C обозначает максимум абсолютных величин некрайних наклонов. В строках 4,5 все коэффициенты для линейных и квадратичных участков, а также координаты всех точек излома — целые, и C — максимум абсолютных величин этих данных.

5) Параметр B в строке 3 — это общее число линейных участков в функциях w_e. Например, для задачи о линейной циркуляции каждое w_e имеет не более двух изломов, т.е. $B = O(m)$. В этом случае наши оценки в клетках 3-II превращаются в оценки убыстренных версий алгоритмов в [GT].

6) Строка 6 касается оптимальных *целочисленных* решений. Целочисленная задача становится NP-трудной уже для пространств дробности 2, так как ее частным случаем является задача о максимальном независимом множестве вершин графа. Для унимодулярных пространств L задача эффективно решается путем (неявной) линеаризации функций w_e между целыми точками и переходом к двойственной задаче на $L^{\perp}$ с сопряженными (conjugate) функциями (см. [Ro2]). Эти функции — кусочно-линейные с целочисленными наклонами, и мы попадаем в случай в строке 2 (с $L^{\perp}$ вместо L). Здесь C — верхняя граница интервала для x_e (где ищется оптимальное решение) и соответствующих производных для w_e.

7) В клетке 7-I время $\Lambda_q(n, m)$ не уточняется. Например, здесь может применяться сильнополиномиальная версия [Ta] метода эллипсоидов или (при $q = 1$) эффективные методы, основанные на декомпозиции регулярных матроидов в [Se6]. $\Omega(n, m)$ (клетка 7-III) — время нахождения минимального разреза в сети с n вершинами и m дугами.

Тип целевой ф-ии	Тип ограничений		
	(I) Пространство дробности q	(II) Циркуляции орграфа	(III) Коциркуляции орграфа
Число итераций Метода Минимального Среднего Цикла			
(1) Общая	$O(\rho^{\perp}\phi q\log(\beta/\epsilon))$	$O(mn\log(\beta/\epsilon))$	$O(mn\log(\beta/\epsilon))$
(2) Кус.-линейн., Целоч. наклоны	$O(\rho^{\perp}\phi q\log(\phi C))$	$O(mn\log(nC))$	$O(mn\log(nC))$
(3) Кус.-линейн., Общие наклоны	$O(Bq\rho^{\perp}\phi)$	$O(Bmn)$	$O(Bmn)$
(4) Кус.-квадрат., Целоч. данные	$O(\rho^{\perp}\phi qm\log C)$	$O(m^2n\log C)$	$O(m^2n\log C)$
(5) Смешанная кус.-лин.-квадр., Целоч. данные	$O(\rho^{\perp}\phi qm\log C)$	$O(m^2n\log C)$	$O(m^2n\log C)$
(6) Целочисл. решение	NP-трудная при $q \geq 2$, $O(\rho\phi^{\perp}\log(\phi^{\perp}C))$ при $q = 1$	$O(mn\log(nC))$	$O(mn\log(nC))$
(7) ММСЦ Время итерации	$O(\rho\phi q^2\Lambda_q(n,m))$	$O(mn)$ $O(\sqrt{n}m\log(nC))$	$O(n\Omega(n,m))$ $O(mn\log(nC))$
Число итераций Метода Агрегированных Сокращений			
(1) Общая	$O(\rho q\log(\beta/\epsilon))$	$O(n\log(\beta/\epsilon))$	$O(m\log(\beta/\epsilon))$
(2) Кус.-линейн., Целоч. наклоны	$O(\rho q\log(\phi C))$	$O(n\log(nC))$	$O(m\log(nC))$
(3) Кус.-линейн., Общие наклоны	$O(Bq\rho\log\phi)$	$O(Bn\log n)$	$O(Bm\log n)$
(4) Кус.-квадрат., Целоч. данные	$O(\rho qm\log C)$	$O(mn\log C)$	$O(mn\log C)$
(5) Смешанная кус.-лин.-квадр., Целоч. данные	$O(\rho qm\log(\phi C))$	$O(mn\log(nC))$	$O(mn\log(nC))$
(6) Целочисл. решение	NP-трудная при $q \geq 2$, $O(\rho^{\perp}\log(\phi^{\perp}C))$ при $q = 1$	$O(m\log(nC))$	$O(n\log(nC))$
(7) МАС Время итерации	$O(\rho^{\perp}\Lambda_q(m,n))$	$O(m\log n)$	$O(m+n\log n)$

VI.1: Таблица временной сложности ММСЦ и МАС

Список работ по теме диссертации

[1] Системы потоков в неориентированных сетях (совместно с М.В. Ломоносовым), В кн.: *Математическое Программирование и др.*, Вып. 1, изд-во ВНИИСИ, Москва, 1978, стр. 59-66.

[2] Комбинаторные способы решения разрезных задач о мультипотоках, В кн.: *Комбинаторные Методы в Потоковых Задачах*, Вып. 3, изд-во ВНИИСИ, Москва, 1979, стр. 6-69.

[3] Экономные методы решения двух известных задач о мультипотоках в неориентированных сетях, там же, стр. 96-103.

[4] Задача о максимальном мультипотоке минимальной стоимости, там же, стр. 138-156.

[5] Описание класса неразрезных задач о мультипотоках максимальной мощности (совместно с П.А. Певзнером), там же, стр. 70-81.

[6] Целочисленная задача о двух потоках единичной мощности (совместно с Е.А. Диницем), там же, стр. 127-137.

[7] Задачи о мультиразрезах и методы их решения, *Препринт*, изд-во ВНИИСИ, Москва, 1982, 62 стр.

[8] Семейства цепей с MFMC-свойством, В кн.: *Модели и Алгоритмы Исследования Операций и их Применение к Организации Работ в Вычислительных Системах*, изд-во ЯрГУ, Ярославль, 1984, стр. 80-84.

[9] A generalized MFMC-property and multicommodity cut problems, in: *Finite and Infinite Sets* (Proc. 6th Hungarian Combinatorial Coll., Eger, 1981), Vol. 2, North-Holland, Amsterdam, 1984, pp. 443-486.

[10] О многопродуктовых потоковых задачах с целочисленными оптимальными решениями, *Доклады АН СССР*, **280**, No. 4, 1985, стр. 789-792.

[11] Metrics and undirected cuts, *Mathematical Programming*, **35**, 1985, pp. 183-198.

[12] О минимальных по среднему весу разрезах и циклах ориентированного графа, В кн.: *Качественные и Приближенные Методы Исследования Операторных Уравнений*, изд-во ЯрГУ, Ярославль, 1985, стр. 72-83. (Англ. пер. в *American Math. Soc. Translations*, Ser. 2, **158**, 1994, pp. 47-55).

[13] Families of cuts with the MFMC-property, *Combinatorica*, **5**, No. 4, 1985, pp. 325-335.

[14] Алгоритм максимальной упаковки нечетнополюсных разрезов и его приложения, В кн: *Исследования по Прикладной Теории Графов* (под. ред. А.С. Алексеева), Наука, Новосибирск, 1986, стр. 126-140. (Англ. пер. в *Amer. Math. Soc. Translations*, Ser. 2, **158** (1994) 57-70).

[15] Half-integral five-terminus flows, *Discrete Applied Mathematics*, **18**, No. 3, 1987, pp. 263-278.

[16] Один класс задач о максимальных многопродуктовых потоках с целочисленными оптимальными решениями, В кн.: *Моделирование и Оптимизация Систем Сложной Структуры*, изд-во ОмГУ, Омск, 1987, стр. 103-121. (Англ. пер. в *American Math. Soc. Translations*, Ser. 2, **158**, 1994, pp. 81-99.)

[17] Максимальные и стоимостные многопродуктовые потоки неограниченной дробности, В кн.: *Задачи Дискретной Оптимизации и Методы их Решения*, изд-во ЦЭМИ, 1987, стр. 123-135. (Англ. пер. в *American Math. Soc. Translations*, Ser. 2, **158**, 1994, pp. 71-80.)

[18] Polyhedra related to undirected multicommodity flows, *Linear Algebra and its Applications*, **114-115**, 1989, pp. 293-328.

[19] Packing of cuts realizing distances between certain vertices of a planar graph, *Discrete Mathematics*, **85**, 1990, pp. 73-87.

[20] Sums of cuts and bipartite metrics, *European Journal of Combinatorics*, **11**, 1990, pp. 473-484.

[21] Undirected multiflow problems and related topics – some recent developments and results, *Proceeding of the International Congress of Mathematicians* (Kyoto, 1990), Springer, Tokyo, 1991, pp. 1561-1571.

[22] Maximization over the intersection of two compatible greedy-polyhedra, *Research Report 91732-OR*, Institit für Diskrete Mathematik, Bonn, 1991, 25 pp.

[23] Determining the distance to the perfect matching polytope of a bipartite graph (совместно с A. Frank), *Research Report* RR 895-M, Artemis, IMAG, Grenoble, 1992, 9 pp.

[24] Edge-disjoint T-paths of minimum total cost, *Technical Report* STAN-CS-92-1465, Computer Sci. Dept., Stanford University, Palo Alto, 1993, 66 pp.

[25] Transitive fork environments and minimum cost multiflows (совместно с A. Goldberg), *Technical Report* STAN-CS-93-1476, Computer Sci. Dept., Stanford University, Palo Alto, 1993, 44 pp.

[26] Paths and metrics in a planar graph with three or more holes, I: Metrics, *Journal of Combinatorial Theory, Ser. B*, **60**, 1994, pp. 1-18.

[27] Paths and metrics in a planar graph with three or more holes, II: Paths, *Journal of Combinatorial Theory, Ser. B*, **60**, 1994, pp. 19-35.

[28] Minimum cost multiflows in undirected networks, *Mathematical Programming*, **66**, No. 3, 1994, pp. 313-325.

[29] Half-integral flows in a planar graph with four holes, *Discrete Applied Mathematics*, **56**, No. 2-3, 1995, pp. 267-295.

[30] Minimum (2,r)-metrics and integer multiflows (совместно с Y. Manoussakis), *European Journal of Combinatorics*, **17**, 1996, pp. 223-232.

[31] Scaling methods for finding a maximum free multiflow of minimum cost (совместно с A. Goldberg), *Mathematics of Operations Research*, **22**, No. 1, 1997, pp. 90-109.

[32] On integer multiflow maximization (совместно с A. Frank и A. Sebő), *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, **10**, No. 1, 1997, pp. 158-170.

[33] Polynomial methods for separable convex optimization in unimodular spaces with applications (совместно с S.T. McCormick), *SIAM Journal on Computing* **26**, No. 4, 1997, pp. 1245-1275.

[34] Multiflows and disjoint paths of minimum total cost, *Mathematical Programming*, **78**, 1997, pp. 219-242.

[35] Minimum 0-extensions of graph metrics, *European Journal of Combinatorics*, **19**, 1998, 71-101.

[36] A fast algorithm for finding a maximum free multiflow in an inner Eulerian network and some generalizations (совместно с T. Ibaraki и H. Nagamochi), *Combinatorica*, **18**, No. 1, 1998, pp. 61-83.

[37] Minimum weight (T,d)-joins and multijoins (совместно с M. Burlet), *Discrete Mathematics*, **181**, 1998, pp. 65-76.

[38] On one maximum multiflow problem and related metrics, *Discrete Mathematics*, **192**, 1998, pp. 187-204.

[39] A combinatorial algorithm for the minimum (2,r)-metric problem and some generalizations, *Combinatorica*, **18**, No. 4, 1998, pp. 549-568.

[40] Metrics with finite sets of primitive extensions, *Annals of Combinatorics*, **2**, 1998, pp. 213-243.

[41] How to uncross some modular metrics, *Preprint* FI-GT1999-003, Fields Inst. for Research in Mathematical Sciences, Toronto, 1999; submitted to *Combinatorica*.

[42] A characterization of minimizable metrics in the multifacility location problem (совместно с H.-J. Bandelt и V. Chepoi), *European Journal of Combinatorics* **21** (2000) 715-725.

Цитированная литература

[ADK] Г.М. Адельсон-Вельский, Е.А. Диниц, А.В. Карзанов, *Потоковые алгоритмы*, Наука, Москва, 1975.

[AMO] R.K. Ahuja, T.L. Magnanti, and J.B. Orlin, *Network Flows: Theory, Algorithms and Applications*, Prentice Hall, New York, 1993.

[Ba1] H.-J. Bandelt, Networks with Condorcet solutions, *European J. Oper. Res.* **20** (1985) 314-326.

[Ba2] H.-J. Bandelt, Hereditary modular graphs, *Combinatorica* **8** (1988) 149-157.

[Chp] V. Chepoi, A multifacility location problem on median spaces, *Discrete Applied Math.* **64** (1996) 1-29.

[Chr1] Б.В. Черкасский, Решение одной задачи о многопродуктовых потоках в сети, *Экономика и Математические Методы* **13** (1) (1977) 143-151.

[Chr2] Б.В. Черкасский, Многополюсные двухпродуктовые задачи, В кн: *Исследования по дискретной оптимизации* (под ред. А.А. Фридмана), Наука, Москва, 1976, с. 261–289.

[DL] M. Deza and M. Laurent, *Geometry of Cuts and Metrics*, Springer, 1997.

[DJPSY] E. Dalhaus, D.S. Johnson, C. Papadimitriou, P.D. Seymour, M. Yannakakis, The complexity of the multiterminal cuts, *SIAM J. Comput.* **23** (1994) 864-894.

[Dr] A.W.M. Dress, Trees, tight extensions of metric spaces, and the cohomological dimension of certain groups, *Advances Math.* **53** (1984) 321-402.

[DW] F.D.J. Dunstan and D.J.A. Welsh, A greedy algorithm for solving a certain class of linear programmes, *Math. Programming* **62** (1973) 338-353.

[Ed1] J. Edmonds, Submodular functions, matroids, and certain polyhedra, in: *Combinatorial Structures and Their Applications*, Gordon and Breach, NY, 1970, pp. 69-87.

[Ed2] J. Edmonds, Edge-disjoint branchings, in: R. Rustin (ed.), *Combinatorial Algorithms*, Acad. Press, NY, 1973, pp. 91-96.

[EG] J. Edmonds and R. Giles, A min-max relation for submodular functions on directed graphs, *Annals of Discrete Math.* **1** (1977) 185-204.

[EJ] J. Edmonds and E.L. Johnson, Matchings, Euler tours and Chinese postman, *Math. Programming* **5** (1973) 88-134.

[EKK] В.А. Емеличев, М.М. Ковалев, М.К. Кравцов, *Многогранники. Графы. Оптимизация*, Наука, Москва, 1981.

[EM] T.R. Ervolina and S.T. McCormick, Two strongly polynomial cut cancelling algorithms for minimum cost network flow, *Discrete Applied Math.* **46** (1993) 133–165.

[EIS] S. Even, A. Itai, and A. Shamir, On the complexity of timetable and multicommodity flow problems, *SIAM J. Computing* **5** (4) (1976) 691-703.

[FF] L.R. Ford and D.R. Fulkerson, *Flows in Networks*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1962. (Русск. пер.: Потоки в Сетях, Мир, Москва, 1966.)

[Fr] A. Frank, Connectivity and network flows, in: *Handbook of Combinatorics*, North-Holland, 1995, pp. 111-177.

[Ful] D.R. Fulkerson, Blocking polyhedra, in: B. Harris (ed.), *Graph Theory and its Applications*, Acad. Press, NY, 1970, pp. 93–112.

[GJ] M.R. Garey and D.S. Johnson, *Computers and Intractability*, Freeman, San Francisco, 1979. (Русск. пер.: Вычислительные Машины и Труднорешаемые Задачи, Мир, Москва, 1982.)

[GLS] M. Grötschel, L. Lovász, and A. Schrijver, *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization*, Springer, Berlin, 1988.

[GT] Goldberg, A.V. and R.E. Tarjan, Finding minimum-cost circulations by canceling negative cycles, *J. ACM* **36** (4) (1989) 873–886.

[GTT] A.V. Goldberg, E. Tardos, and R.E. Tarjan, Network flow algorithms, in: B. Korte et al. (eds.), *Paths, Flows, and VLSI-Layout*, Springer, Berlin, 1990, pp. 101–164.

[GY] Е.Г. Гольштейн и Д.Б. Юдин, *Задачи линейного программирования транспортного типа*, Сов. Радио, Москва, 1969.

[HS] D.S. Hochbaum and J.G. Shanthikumar, Convex separable optimization is not much harder than linear optimization, *J. ACM* **37** (1990) 843–862.

[Hu] T.C. Hu, Multicommodity network flows, *Operations Res.* **11** (1963) 344-460.

[Iri] M. Iri, On an extension of the max-flow min-cut theorem for multicommodity flows, *J. Oper. Res. Soc. Japan* **13** (1970) 129–135.

[Is] J. Isbell, Six theorems about metric spaces, *Comment. Math. Helv.* **39** (1964) 65–74.

[Kan] Л.В. Канторович, О перемещении масс, *Доклады АН СССР* **37** (1942) 199–201.

[Krp] R.M. Karp, A characterization of the minimum cycle mean in a digraph, *Discrete Math.* **23** (1978) 309–311.

[Kh] Л.Г. Хачиян, Полиномиальные алгоритмы в линейном программировании, *ЖВМ и МФ* **20** (1980) 51–68.

[KO] O. Kenji and K. Osamu, On feasibility conditions of multicommodity flows in networks, *IEEE Trans. Circuit Theory* **CT-18** (1971) 425–429.

[Kol] A. Kolen, Location problem on trees and in the rectilinear plane, *Proc. of the Stitchting Mathematisch Centrum*, Amsterdam, 1982.

[Le] A. Lehman, On the width-length inequality, *Mimeographic Notes*, 1965.

[Lom1] М.В. Ломоносов, О системе потоков в сети, *Проблемы Передачи Информации* **14** (1978) 60-73.

[Lom2] M.V. Lomonosov, Combinatorial approaches to multiflow problems, *Discrete Applied Math.* **11** (1) (1985) 1-94.

[Lov] L. Lovász, On some connectivity properties of Eulerian graphs, *Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae* **28** (1976) 129-138.

[Ma] W. Mader, Uber die Maximalzahl kantendisjunkter A-Wege, *Arch. Math.* **30** (1978) 325-336.

[MS] H.M. Mulder and A. Schrijver, Median graphs and Helly hypergraphs, *Discrete Math.* **25** (1979) 41-50.

[Ok] H. Okamura, Multicommodity flows in graphs, *Discrete Applied Math.* **6** (1983) 55-62.

[Pa] Б.А. Папернов, О существовании многопродуктовых потоков, В кн.: *Исследования по Дискретной Оптимизации* (под ред. А.А. Фридмана), Наука, Москва, 1976, с. 230-261.

[PR] J.C. Picard and H.D. Ratliff, A cut approach to the rectilinear distance location problems, *Operations Research* **26** (1978) 422-434.

[Ro1] R.T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1970.

[Ro2] R.T. Rockafellar, *Network Flows and Monotropic Optimization*, Wiley Interscience, NY, 1984.

[RW] B. Rothshield and A. Whinston, On two-commodity network flows, *Operations Res.* **14** (1966) 377-387.

[Sch1] A. Schrijver, *Theory of Linear and Integer Programming*, John Wiley & Sons, NY, 1986. (Русск. пер.: Теория Линейного и Целочисленного Программирования, Мир, Москва, 1989.)

[Sch2] A. Schrijver, Distances and cuts in planar graphs, *J. Combin. Theory (B)* **46** (1989) 46-57.

[Sch3] A. Schrijver, Homotopic routing methods, in: B. Korte et al. (eds.), *Paths, Flows, and VLSI-Layout*, Springer, Berlin, 1990, pp. 329–371.

[Se1] P.D. Seymour, A two-commodity cut theorem, *Discrete Math.* **23** (1978) 177–181.

[Se2] P.D. Seymour, Sums of circuits, in: J.A. Bondy and U.S.R. Murty (eds.), *Graph Theory and Related Topics*, Acad. Press, NY, 1978, pp. 341-355.

[Se3] P.D. Seymour, On multi-colouring of cubic graphs, and conjectures of Fulkerson and Tutte, *Proc. Lond. Math. Soc. (3)* **38** (1979) 423-460.

[Se4] P.D. Seymour, Four-terminus flows, *Networks* **10** (1980) 79-86.

[Se5] P.D. Seymour, Disjoint paths in graphs, *Discrete Math.* **29** (1980) 293-309.

[Se6] P.D. Seymour, Decomposition of regular matroids, *J. Combin. Theory* **28** (1980) 305–359.

[Se7] P.D. Seymour, On odd cuts and planar multicommodity flows, *Proc. London Math. Soc. (3)* **42** (1981) 178-192.

[TFL] B.C. Tansel, R.L. Francis, and T.J. Lowe, Location on networks: a survey, *Management Sci.* **29** (1983) 482-511.

[Ta] E. Tardos, A strongly polynomial algorithm to solve combinatorial linear programs, *Oper. Res.* **34** (1986) 250-256.

[Th] C. Thomassen, 2-linked graphs, *European J.Combinatorics* **1** (1980) 371-378.

[We] D.J.A. Welsh, *Matroid Theory*, Academic Press, London, 1976.